

Universität Rostock  
Fakultät für Informatik und Elektrotechnik  
Institut für Nachrichtentechnik  
Albert-Einstein-Straße 26  
D 18059 Rostock

**Skript**

# **Einführung in die Hochfrequenztechnik**

Prof. Dr.-Ing. habil. Tobias Weber

12. Juli 2023

Universität Rostock



# Vorwort

Die Hochfrequenztechnik befasst sich mit dem Nutzen elektromagnetischer Felder hoher Frequenzen in technischen Systemen. Bei hohen Frequenzen gibt es Wechselwirkungen zwischen elektrischen und magnetischen Feldern, die eine Wellenausbreitung ermöglichen. Insbesondere lassen sich integrale Größen wie Spannungen und Ströme im Allgemeinen nicht mehr sinnvoll definieren. Folglich ist der Systementwurf mit den auf konzentrierten Bauelementen basierenden Konzepten der Elektronik nicht mehr möglich. Man muss vielmehr wieder direkt von den Maxwell'schen Gleichungen ausgehen. Eine Abstraktion ist aber auch hier möglich. Sie basiert auf komplexen Wellenamplituden und hat sich in den letzten Jahrzehnten als sehr ergiebig erwiesen. Diese wellenbasierte Sichtweise charakterisiert die Hochfrequenztechnik als eigenständige Disziplin innerhalb der Elektrotechnik.

Die Hochfrequenztechnik ist eines der traditionellen Fachgebiete der Elektrotechnik. Ihre Entwicklung lässt sich bis zur Veröffentlichung der Maxwell'schen Gleichungen zurückverfolgen. Seitdem wurde ein umfangreiches Fachwissen zusammengetragen. Zahlreiche Veröffentlichungen zeugen davon. Im Literaturverzeichnis findet man eine kleine Auswahl bewährter Lehrbücher der Hochfrequenztechnik [Bae98; Gus13; Poz12; RWD94]. Hier steht zumeist der Entwurf hochfrequenztechnischer Komponenten im Vordergrund. Ein Blick auf das heutige Berufsbild des Ingenieurs offenbart jedoch, dass das Anwenden der Hochfrequenztechnik, das heißt das Zusammenfügen hochfrequenztechnischer Komponenten zu komplexen Systemen und die zumeist digitale Verarbeitung von Signalen aus einer hochfrequenztechnischen Umgebung in einem eingebetteten System im Vordergrund der beruflichen Praxis stehen. Beispiele derartiger Anwendungen sind

- die Hochfrequenzmesstechnik [TWK98; Wit14],
- Funkkommunikationssysteme [Kam11; Mol11; OL10; PS08],
- die Radartechnik [CB09; KH00; Lev88; Ric14] und
- Funknavigationssysteme [BAB+07; ME11; SDM14].

Aufgrund der Komplexität und der hohen geforderten Performanz derartiger Systeme ist das Beherrschen theoretisch fundierter Modellierungstechniken und die

---

Kenntnis des Verhaltens typischer hochfrequenztechnischer Komponenten unerlässlich. Ziel des vorliegenden Buchs ist es, dieses Wissen in kompakter Form darzustellen, ohne aber auf mathematische Exaktheit zu verzichten. Dies wird durch eine Konzentration auf zentrale, allgemein anwendbare Theorien und Modelle der Hochfrequenztechnik und eine konsequente Abstraktion erreicht.

Die Maxwellschen Gleichungen bilden ein System linearer und verschiebungsinvarianter partieller Differentialgleichungen. Es ist daher nicht verwunderlich, dass es enge Querbeziehungen der Hochfrequenztechnik zur typischerweise im Rahmen der Signal- und Systemtheorie behandelten Theorie der linearen zeitinvarianten Systeme gibt [FB08; GRS07]. An den entsprechenden Stellen im vorliegenden Buch wurden diesbezügliche Anmerkungen eingefügt. Diese sollen dem mit der Signal- und Systemtheorie vertrauten Leser ein vertieftes Durchdringen der Thematik ermöglichen, sind aber keine Voraussetzung für das weitere Studium des Buchs.

Das Buch ist in zwei Teile gegliedert. Der erste Teil beschäftigt sich mit der feldtheoretischen Modellierung [Gri18; Jac14; Leh10]. Die feldtheoretische Modellierung ist auch heute noch unverzichtbar, da sie nicht nur die Grundlage abstrakterer Modelle bildet, sondern insbesondere auch zur Analyse von Antennen unumgänglich ist [Bal05; Kar11; ST13]. Antennen bilden einen zentralen Bestandteil der meisten hochfrequenztechnischen Systeme. Gerade die Fähigkeit der von Antennen abgestrahlten elektromagnetischen Wellen sich im freien Raum ausbreiten zu können, macht die Hochfrequenztechnik für technische Anwendungen interessant [GW98; Pae12]. Da auch Licht eine elektromagnetische Welle ist, bestehen naturgemäß enge Beziehungen zur Optik [BW99; Hec17]. Ein Vereinfachen der Darstellung und Fokussieren auf die physikalischen Grundprinzipien gelingt bei der feldtheoretischen Modellierung durch ausschließliches Betrachten statischer Szenarien und einfacher Materialien, das Vernachlässigen von Verlusten und die Konzentration auf die für technische Anwendungen primär interessanten ausbreitungsfähigen Wellen.

Der zweite Teil des Buchs beschäftigt sich mit der abstrakteren, auf komplexen Wellenamplituden basierenden Modellierung [Hof97; Mic81; Vie74]. Durch eine derartige Abstraktion werden auch komplexe Systeme beherrschbar, ohne dass Modellierungsgenauigkeit verloren geht. Zum Formulieren und Analysieren der resultierenden linearen Modelle werden Methoden der Matrizenrechnung verwendet [MS00; ZF97]. Die moderne Hochfrequenzschaltungstechnik basiert auf der Modellierung mittels komplexer Wellenamplituden und mit dem Vektornetzwerk-analysator existiert auch eine entsprechende Messtechnik [Hie11; Sch99]. Neben dem idealen Verhalten hochfrequenztechnischer Komponenten [Gon97; MYJ80] wird auch das in vielen Fällen performanzbegrenzende und praktische Systemarchitekturen motivierende Rauschen diskutiert [HA59; HR22].

---

Im Anhang findet man neben den Lösungen der Aufgaben ergänzende Ausführungen zu Filtern, nichtlinearen Systemen, zur Fourier-Analyse und zu Signalgeneratoren. Gegenstand des Filterentwurfs ist die bislang nicht explizit betrachtete Frequenzabhängigkeit des Systemverhaltens [Mil92; Rup72]. Nichtlineares Verhalten tritt häufig in unerwünschter Weise in realen Systemen auf, kann aber auch gezielt genutzt werden [Bae02; Maa03]. Die Fourier-Analyse ist Grundlage vieler Verfahren der Hochfrequenzmesstechnik wie der Spektralanalyse [KK12; SM05]. Eine wesentliche Forderung an Signalgeneratoren ist eine mit hoher Genauigkeit einstellbare Frequenz, die komplexe Systemarchitekturen erfordert [Bes09; Gar05].



# Inhaltsverzeichnis

<b>I. Feldtheoretische Modellierung</b>	<b>1</b>
<b>1. Feldtheoretische Grundlagen</b>	<b>3</b>
1.1. Feldgrößen und ihre komplexen Amplituden . . . . .	3
1.2. Maxwell'sche Gleichungen . . . . .	5
1.2.1. Durchflutungsgesetz . . . . .	5
1.2.1.1. Integrale Form . . . . .	5
1.2.1.2. Differentielle Form, Satz von Stokes . . . . .	6
1.2.2. Induktionsgesetz . . . . .	9
1.2.2.1. Integrale Form . . . . .	9
1.2.2.2. Differentielle Form . . . . .	10
1.2.3. Quellen des elektrischen Feldes . . . . .	10
1.2.3.1. Integrale Form . . . . .	10
1.2.3.2. Differentielle Form, Satz von Gauß . . . . .	11
1.2.4. Quellen des magnetischen Feldes . . . . .	14
1.2.4.1. Integrale Form . . . . .	14
1.2.4.2. Differentielle Form . . . . .	14
1.3. Ladungserhaltung . . . . .	14
1.4. Materialgleichungen . . . . .	16
1.5. Dualität von elektrischem und magnetischem Feld . . . . .	17
1.6. Bedingungen an Grenzflächen . . . . .	18
1.6.1. Elektrisches Feld an einer Grenzfläche . . . . .	18
1.6.2. Magnetisches Feld an einer Grenzfläche . . . . .	19
1.6.3. Grenzfläche zweier Dielektrika . . . . .	21
1.6.4. Oberfläche eines idealen elektrischen Leiters . . . . .	21
1.6.5. Oberfläche eines idealen magnetischen Leiters . . . . .	22
1.7. Poynting-Vektor . . . . .	23
1.8. Reziprozitätstheorem . . . . .	25
<b>2. Elektromagnetische Wellen</b>	<b>27</b>
2.1. Helmholtz-Gleichungen . . . . .	27
2.2. Zylindrische Wellenleiter . . . . .	28
2.2.1. Helmholtz-Gleichungen für zylindrische Wellenleiter . . . . .	28

2.2.2.	Transversalkomponenten und Longitudinalkomponenten . . . . .	30
2.2.3.	Transversalelektromagnetische Wellen . . . . .	31
2.2.4.	Transversalelektrische Wellen . . . . .	33
2.2.5.	Transversalmagnetische Wellen . . . . .	34
2.2.6.	Phasenkonstante und Wellenlänge . . . . .	35
2.2.7.	Phasengeschwindigkeit . . . . .	37
2.2.8.	Gruppengeschwindigkeit . . . . .	38
2.3.	Ebene homogene Welle im freien Raum . . . . .	41
<b>3.</b>	<b>Wellenleiter</b>	<b>45</b>
3.1.	Hohlleiter . . . . .	45
3.1.1.	Aufbau von Hohlleitern . . . . .	45
3.1.2.	Transversalelektrische Wellen in Hohlleitern . . . . .	46
3.1.3.	Transversalmagnetische Wellen in Hohlleitern . . . . .	49
3.2.	Zweileitersysteme . . . . .	50
3.2.1.	Aufbau von Zweileitersystemen . . . . .	50
3.2.2.	Transversalelektromagnetische Wellen auf Zweileitersystemen	51
3.2.2.1.	Feldstärken . . . . .	51
3.2.2.2.	Spannung . . . . .	53
3.2.2.3.	Strom . . . . .	53
3.2.2.4.	Wellenwiderstand . . . . .	54
3.2.2.5.	Ersatzschaltbild . . . . .	55
3.2.2.6.	Leistung . . . . .	56
3.2.3.	Beispiele von Zweileitersystemen . . . . .	57
3.2.3.1.	Bandleitung . . . . .	57
3.2.3.2.	Koaxialleitung . . . . .	58
3.2.3.3.	Planare Wellenleiter . . . . .	59
3.3.	Transversalelektromagnetische Wellen auf Mehrleitersystemen . . . . .	60
3.3.1.	Allgemeine Mehrleitersysteme . . . . .	60
3.3.2.	Symmetrische Dreileitersysteme . . . . .	65
<b>4.</b>	<b>Antennentheorie</b>	<b>71</b>
4.1.	Vektorpotential . . . . .	71
4.2.	Kugelkoordinaten . . . . .	72
4.2.1.	Koordinatentransformation . . . . .	72
4.2.2.	Integrationselemente . . . . .	74
4.2.3.	Vektoranalysis für krummlinige orthogonale Koordinaten . . . . .	75
4.2.3.1.	Gradient . . . . .	75
4.2.3.2.	Divergenz . . . . .	76
4.2.3.3.	Rotation . . . . .	77

4.2.3.4. Laplace-Operator . . . . .	78
4.3. Berechnen des magnetischen Vektorpotentials . . . . .	79
4.4. Fernfeldnäherung des magnetischen Vektorpotentials . . . . .	82
4.5. Berechnen der Feldstärken . . . . .	84
4.6. Eindeutigkeitstheorem . . . . .	88
4.7. Spiegelungsprinzipien . . . . .	90
4.7.1. Spiegelung am idealen elektrischen Leiter . . . . .	90
4.7.2. Spiegelung am idealen magnetischen Leiter . . . . .	91
4.8. Huygens'sches Prinzip . . . . .	91
4.9. Momentenmethode . . . . .	93
4.9.1. Lösungsansatz der Momentenmethode . . . . .	93
4.9.2. Analyse einer Dipolantenne . . . . .	95
<b>5. Antennenbauformen</b>	<b>103</b>
5.1. Kenngrößen von Antennen . . . . .	103
5.1.1. Richtfaktor und Gewinn . . . . .	103
5.1.2. Richtcharakteristik . . . . .	104
5.2. Lineare Antennen . . . . .	107
5.2.1. Allgemeine Betrachtungen zu linearen Antennen . . . . .	107
5.2.2. Dipolantennen mit sinusförmiger Strombelegung . . . . .	110
5.3. Aperturantennen . . . . .	114
5.3.1. Allgemeine Betrachtungen zu Aperturantennen . . . . .	114
5.3.2. Aperturantennen mit konstanter Strombelegung . . . . .	117
5.4. Gruppenantennen . . . . .	120
5.4.1. Allgemeine Betrachtungen zu Gruppenantennen . . . . .	120
5.4.2. Lineare Gruppenantennen . . . . .	122
5.4.2.1. Allgemeine Betrachtungen . . . . .	122
5.4.2.2. Strombelegung konstanten Phasendekrements . . . . .	124
<b>6. Ausbreitung elektromagnetischer Wellen</b>	<b>131</b>
6.1. Freiraumausbreitung . . . . .	131
6.1.1. Wirkfläche . . . . .	131
6.1.2. Empfangsleistung . . . . .	131
6.1.3. Zusammenhang zwischen Gewinn und Wirkfläche . . . . .	132
6.1.4. Polarimetrische Analyse der Freiraumausbreitung . . . . .	134
6.2. Reflexion und Transmission an Grenzflächen . . . . .	136
6.2.1. Schräger Einfall einer ebenen homogenen Welle . . . . .	136
6.2.2. Fresnelsche Formeln . . . . .	138
6.2.2.1. Senkrechte Polarisierung . . . . .	138
6.2.2.2. Parallele Polarisierung . . . . .	142

6.2.3. Reflexion am idealen elektrischen Leiter . . . . .	145
6.2.4. Reflexion am idealen magnetischen Leiter . . . . .	145
6.3. Ionosphäre . . . . .	146
6.3.1. Plasmakreisfrequenz . . . . .	146
6.3.2. Ionosphärenfehlerkorrektur in der Satellitennavigation . . . . .	147
6.4. Streuung . . . . .	149
6.4.1. Streuquerschnitt . . . . .	149
6.4.2. Sinclair-Matrix . . . . .	151
6.5. Mehrwegeausbreitung . . . . .	155
<b>II. Wellenbasierte Modellierung</b>	<b>159</b>
<b>7. Leitungstheorie</b>	<b>161</b>
7.1. Komplexe Wellenamplitude . . . . .	161
7.2. Reflexionsfaktor . . . . .	162
7.3. Resultierende komplexe Wellenamplitude . . . . .	163
7.4. Spannung und Strom . . . . .	166
7.5. Impedanz . . . . .	168
7.6. Leistung . . . . .	170
7.7. Messen des Reflexionsfaktors mit einer Messleitung . . . . .	171
7.8. Leitungen als Bauelemente . . . . .	173
7.8.1. Kurzgeschlossene Leitung . . . . .	173
7.8.2. Leerlaufende Leitung . . . . .	174
7.8.3. Autotransformation . . . . .	175
7.8.4. Dualtransformation . . . . .	176
7.9. Symmetrische Dreileitersysteme . . . . .	177
7.10. Massegekoppelte symmetrische Dreileitersysteme . . . . .	181
<b>8. Kreisdiagramme</b>	<b>183</b>
8.1. Normierung . . . . .	183
8.2. Inversionsdiagramm . . . . .	184
8.2.1. Herleitung des Inversionsdiagramms . . . . .	184
8.2.2. Transformation mit konzentrierten Bauelementen . . . . .	187
8.2.2.1. Serienschaltung im Inversionsdiagramm . . . . .	187
8.2.2.2. Parallelschaltung im Inversionsdiagramm . . . . .	188
8.2.2.3. Transformation mit mehreren Blindelementen . . . . .	189
8.3. Leitungsdiagramm . . . . .	191
8.3.1. Herleitung des Leitungsdiagramms . . . . .	191
8.3.1.1. Negativer reeller Reflexionsfaktor . . . . .	191

8.3.1.2. Komplexer Reflexionsfaktor . . . . .	195
8.3.2. Transformation mittels Stichleitung . . . . .	196
8.4. Smith-Diagramm . . . . .	196
8.4.1. Herleitung des Smith-Diagramms . . . . .	196
8.4.2. Transformation mit konzentrierten Bauelementen . . . . .	198
8.4.2.1. Serienschaltung im Smith-Diagramm . . . . .	198
8.4.2.2. Parallelschaltung im Smith-Diagramm . . . . .	200
8.4.3. Leitungstransformation im Smith-Diagramm . . . . .	201
<b>9. Mehrtore</b>	<b>203</b>
9.1. Mehrtore ohne Quellen . . . . .	203
9.1.1. Streumatrix . . . . .	203
9.1.2. Signalflussgraph . . . . .	205
9.1.3. Eigenschaften von Mehrtoren . . . . .	207
9.1.3.1. Eigenreflexionsfreiheit . . . . .	207
9.1.3.2. Passivität und Verlustfreiheit . . . . .	207
9.1.3.3. Reziprozität . . . . .	207
9.1.3.4. Eigenreflexionssymmetrie . . . . .	209
9.1.4. Impedanzmatrix und Admittanzmatrix . . . . .	209
9.1.5. Transmissionsmatrix . . . . .	212
9.1.6. Modale Streumatrix . . . . .	214
9.2. Mehrtore mit Quellen . . . . .	217
9.2.1. Wellenquellen . . . . .	217
9.2.2. Spannungsquellen . . . . .	218
9.2.3. Stromquellen . . . . .	219
9.3. Analyse komplexer Netzwerke mit Quellen . . . . .	220
<b>10. Komponenten</b>	<b>225</b>
10.1. Eintore . . . . .	225
10.1.1. Quellenfreies Eintor . . . . .	225
10.1.2. Eintorquelle . . . . .	225
10.2. Zweitore . . . . .	226
10.2.1. Symmetrisch aufgebaute Zweitore . . . . .	226
10.2.2. Serienimpedanz . . . . .	228
10.2.3. Paralleladmittanz . . . . .	228
10.2.4. Dämpfungsglied . . . . .	230
10.2.5. Leitungsstück . . . . .	232
10.3. Dreitore . . . . .	235
10.3.1. Zirkulator . . . . .	235
10.3.2. Verzweigung . . . . .	237

10.3.3. Allseitig angepasster Leistungsteiler . . . . .	238
10.4. Viertore . . . . .	240
10.4.1. Symmetrisch aufgebaute Viertore . . . . .	240
10.4.2. Richtkoppler . . . . .	242
10.4.3. Parallelleitungskoppler . . . . .	245
<b>11. Vektorielle Netzwerkanalyse</b>	<b>249</b>
11.1. Reflektometer . . . . .	249
11.1.1. Aufbau eines Reflektometers . . . . .	249
11.1.2. Reflektometerfehlerkorrektur . . . . .	252
11.2. Vektornetzwerkanalysator . . . . .	255
11.2.1. Aufbau eines Vektornetzwerkanalysators . . . . .	255
11.2.2. Vektornetzwerkanalysatorfehlerkorrektur . . . . .	259
11.2.3. Verwenden teilweise unbekannter Kalibrierstandards . . . . .	261
11.2.4. Vereinfachter Vektornetzwerkanalysator . . . . .	262
<b>12. Hochfrequenzverstärker</b>	<b>267</b>
12.1. Aufbau von Hochfrequenzverstärkern . . . . .	267
12.2. Leistungsabgabe von Eintorquellen . . . . .	268
12.3. Stabilität von Zweitoren . . . . .	272
12.3.1. Stabilitätskreise . . . . .	272
12.3.2. Unbedingte Stabilität . . . . .	275
12.4. Leistungsgewinn von Zweitoren . . . . .	278
12.4.1. Klemmenleistungsgewinn . . . . .	278
12.4.2. Einfügungsleistungsgewinn . . . . .	280
12.4.3. Übertragungsleistungsgewinn . . . . .	280
12.4.4. Verfügbarer Leistungsgewinn . . . . .	281
12.4.5. Vergleich der Gewinndefinitionen . . . . .	282
12.4.6. Maximaler verfügbarer Leistungsgewinn . . . . .	282
12.4.7. Maximaler stabiler Leistungsgewinn . . . . .	285
12.4.8. Unilateraler Übertragungsleistungsgewinn . . . . .	285
<b>13. Rauschen</b>	<b>289</b>
13.1. Rauschende Eintore . . . . .	289
13.1.1. Modellierung rauschender Eintore . . . . .	289
13.1.2. Thermisches Rauschen von Widerständen . . . . .	290
13.1.3. Thermisch rauschende Eintore homogener Temperatur . . . . .	290
13.2. Rauschende Mehrttore . . . . .	292
13.2.1. Modellierung rauschender Mehrttore . . . . .	292
13.2.2. Analyse komplexer rauschender Netzwerke . . . . .	293

13.2.3. Thermisch rauschende Mehrtore homogener Temperatur . . . . .	294
13.3. Rauschende Zweitore . . . . .	297
13.3.1. Effektive Rauschtemperatur und Rauschzahl . . . . .	297
13.3.2. Thermisch rauschende Zweitore homogener Temperatur . . . . .	301
13.3.3. Kaskade rauschender Zweitore . . . . .	301
13.3.4. Messen der Rauschzahl mit der Y-Faktor-Methode . . . . .	304
13.3.5. Rauschanpassung . . . . .	307
13.3.6. Messen der Rauschparameter . . . . .	312
<b>III. Anhänge</b>	<b>315</b>
<b>A. Filterentwurf</b>	<b>317</b>
A.1. Verwenden von Filterprototypen . . . . .	317
A.2. Tiefpassprototypen . . . . .	317
A.3. Schaltungstransformationen . . . . .	320
A.3.1. Tiefpass-Hochpass-Transformation . . . . .	320
A.3.2. Tiefpass-Bandpass-Transformation . . . . .	322
A.3.3. Tiefpass-Bandsperre-Transformation . . . . .	324
<b>B. Nichtlineare Systeme</b>	<b>329</b>
B.1. Potenzreihenansatz . . . . .	329
B.2. Eintonanregung . . . . .	330
B.2.1. Analyse der Eintonanregung . . . . .	330
B.2.2. Kompressionspunkt . . . . .	332
B.2.3. Harmonischenabstand . . . . .	333
B.3. Zweintonanregung . . . . .	335
B.3.1. Analyse der Zweintonanregung . . . . .	335
B.3.2. Intermodulationsabstand . . . . .	336
B.4. Dynamikbereich . . . . .	339
B.5. Kaskade statischer nichtlinearer Systeme . . . . .	340
B.6. Mischer . . . . .	343
B.6.1. Idealer Mischer . . . . .	343
B.6.2. Additiver Mischer . . . . .	344
B.6.3. Multiplikativer Mischer . . . . .	345
B.6.4. Quadraturmodulator . . . . .	346
B.6.5. Quadraturdemodulator . . . . .	346

<b>C. Fourier-Analyse</b>	<b>349</b>
C.1. Zeitbereichsanalyse	349
C.1.1. Anwendungsbeispiel der Zeitbereichsanalyse	349
C.1.2. Eigenschaften der Fourier-Transformation	350
C.1.2.1. Umkehrtransformation	350
C.1.2.2. Linearität	351
C.1.2.3. Ähnlichkeitssatz	351
C.1.2.4. Differentiation	352
C.1.2.5. Dualität	352
C.1.2.6. Faltungstheorem	352
C.1.2.7. Symmetrie	353
C.1.2.8. Modulationssatz	353
C.1.3. Kausalität	354
C.1.4. Bandbegrenzung	355
C.1.5. Tiefpassmodus	357
C.1.6. Bandpassmodus	359
C.1.7. Abtastung	360
C.1.7.1. Abtastung im Frequenzbereich	360
C.1.7.2. Dirac-Impulsfolge	361
C.1.7.3. Periodizität im Zeitbereich	362
C.1.7.4. Fourier-Reihe	363
C.1.7.5. Diskrete Fourier-Transformation	365
C.1.8. Überabtastung im Zeitbereich	367
C.2. Spektralanalyse	368
C.2.1. Spektralanalyse deterministischer Signale	368
C.2.2. Spektralanalyse stochastischer Signale	372
C.3. Fourier-Korrespondenzen	374
<b>D. Signalgeneratoren</b>	<b>375</b>
D.1. Additives Rauschen	375
D.2. Phasenrauschen	376
D.3. Momentanfrequenz	380
D.4. Synchronisation	382
D.4.1. Phasenregelschleife	382
D.4.2. Phasendetektor	383
D.4.3. Regler	383
D.4.4. Dynamisches Verhalten der Phasenregelschleife	384
D.4.5. Phasenrauschen der Phasenregelschleife	386
D.4.5.1. Rauschen in linearen zeitinvarianten Systemen	386
D.4.5.2. Übertragungsfunktionen der Phasenregelschleife	387

D.4.6. Synthesizer . . . . .	390
D.5. Allan-Varianz . . . . .	391
<b>E. Lösungen der Aufgaben</b>	<b>395</b>
<b>Literatur</b>	<b>453</b>



**Teil I.**

**Feldtheoretische Modellierung**



# Kapitel 1.

## Feldtheoretische Grundlagen

### 1.1. Feldgrößen und ihre komplexen Amplituden

In der Hochfrequenztechnik interessieren wir uns für sinusförmige Zeitverläufe der Frequenz  $f$  der betrachteten Feldgrößen. Gegebenenfalls auftretende nicht sinusförmige Verläufe kann man mittels der Fourier-Transformation als Überlagerung sinusförmiger Verläufe darstellen. Die folgenden Betrachtungen können somit allgemeiner als Modellierung im Frequenzbereich aufgefasst werden, siehe (C.66).<sup>1</sup> Sinusförmige (vektorielle) Feldgrößen können durch ihre (vektoriellen) komplexen Amplituden beschrieben werden. Mit der Kreisfrequenz

$$\omega = 2\pi f \quad (1.1)$$

kann man die Feldgrößen wie folgt darstellen:

**elektrische Feldstärke:**

$$\vec{E}(x, y, z, t) = \operatorname{Re}\left(\underline{\vec{E}}(x, y, z) e^{j\omega t}\right) \quad (1.2)$$

$\vec{E}$ : vektorieller Momentanwert der elektrischen Feldstärke

$\underline{\vec{E}}$ : vektorielle komplexe Amplitude der elektrischen Feldstärke

**elektrische Flussdichte:**

$$\vec{D}(x, y, z, t) = \operatorname{Re}\left(\underline{\vec{D}}(x, y, z) e^{j\omega t}\right) \quad (1.3)$$

$\vec{D}$ : vektorieller Momentanwert der elektrischen Flussdichte

$\underline{\vec{D}}$ : vektorielle komplexe Amplitude der elektrischen Flussdichte

**magnetische Feldstärke:**

$$\vec{H}(x, y, z, t) = \operatorname{Re}\left(\underline{\vec{H}}(x, y, z) e^{j\omega t}\right) \quad (1.4)$$

---

<sup>1</sup>Die (vektoriellen) komplexen Amplituden kann man weiterhin als die zu den betrachteten Bandpasssignalen äquivalenten Tiefpasssignale interpretieren, siehe (B.40).

$\vec{H}$ : vektorieller Momentanwert der magnetischen Feldstärke

$\underline{\vec{H}}$ : vektorielle komplexe Amplitude der magnetischen Feldstärke

**magnetische Flussdichte:**

$$\vec{B}(x, y, z, t) = \text{Re}\left(\underline{\vec{B}}(x, y, z) e^{j\omega t}\right) \quad (1.5)$$

$\vec{B}$ : vektorieller Momentanwert der magnetischen Flussdichte

$\underline{\vec{B}}$ : vektorielle komplexe Amplitude der magnetischen Flussdichte

**elektrische Stromdichte:**

$$\vec{J}(x, y, z, t) = \text{Re}\left(\underline{\vec{J}}(x, y, z) e^{j\omega t}\right) \quad (1.6)$$

$\vec{J}$ : vektorieller Momentanwert der elektrischen Stromdichte

$\underline{\vec{J}}$ : vektorielle komplexe Amplitude der elektrischen Stromdichte

**elektrische Ladungsdichte:**

$$\rho_e(x, y, z, t) = \text{Re}\left(\underline{\rho}_e(x, y, z) e^{j\omega t}\right) \quad (1.7)$$

$\rho_e$ : Momentanwert der elektrischen Ladungsdichte

$\underline{\rho}_e$ : komplexe Amplitude der elektrischen Ladungsdichte

**magnetische Stromdichte:**

$$\vec{M}(x, y, z, t) = \text{Re}\left(\underline{\vec{M}}(x, y, z) e^{j\omega t}\right) \quad (1.8)$$

$\vec{M}$ : vektorieller Momentanwert der magnetischen Stromdichte

$\underline{\vec{M}}$ : vektorielle komplexe Amplitude der magnetischen Stromdichte

**magnetische Ladungsdichte:**

$$\rho_m(x, y, z, t) = \text{Re}\left(\underline{\rho}_m(x, y, z) e^{j\omega t}\right) \quad (1.9)$$

$\rho_m$ : Momentanwert der magnetischen Ladungsdichte

$\underline{\rho}_m$ : komplexe Amplitude der magnetischen Ladungsdichte

Vektoren im dreidimensionalen Raum werden durch einen Pfeil gekennzeichnet und komplexe Größen werden unterstrichen. Auf eine explizite Angabe der Argumente  $x, y, z$  und  $t$  zum Ausdrücken der Ortsabhängigkeit und der Zeitabhängigkeit wird im Folgenden zumeist verzichtet.

Magnetische Ladungen und die daraus resultierende magnetische Ladungsdichte  $\rho_m$  und magnetische Stromdichte  $\vec{M}$  treten in der Realität nie auf. Ihre Einführung führt aber neben einer totalen Symmetrie der Maxwell'schen Gleichungen insbesondere zu erheblichen Vereinfachungen bei vielen Feldberechnungen, bei denen man das ursprüngliche physikalische Problem ohne magnetische Ladungsdichte  $\rho_m$  und magnetische Stromdichte  $\vec{M}$  durch ein äquivalentes Problem ersetzt, in dem diese Größen vorkommen können, siehe Abschnitt 4.8.

Materialien, in denen weder elektrische Ladungen noch magnetische Ladungen vorhanden sind und in denen folglich die Ladungsdichten und die Stromdichten verschwinden, bezeichnet man als Dielektrika.<sup>2</sup>

## 1.2. Maxwell'sche Gleichungen

### 1.2.1. Durchflutungsgesetz, erste Maxwell'sche Gleichung

#### 1.2.1.1. Integrale Form

Das Umlaufintegral über die magnetische Feldstärke  $\vec{H}$  ist gleich dem gesamten umschlossenen elektrischen Strom:

$$\oint_{\partial A} \langle \vec{H}, d\vec{s} \rangle = \underbrace{\iint_A \langle \vec{J}, d\vec{A} \rangle}_{\text{elektrischer Leitungsstrom}} + \underbrace{\iint_A \langle \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, d\vec{A} \rangle}_{\text{elektrischer Verschiebungsstrom}}. \quad (1.10)$$

elektrischer Strom

Der Umlaufsinn  $d\vec{s}$  des Integrals und die Flächennormale  $d\vec{A}$  bilden dabei eine Rechtsschraube, siehe Abbildung 1.1.  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  bezeichnet das Skalarprodukt zweier Vektoren.<sup>3</sup> In der Hochfrequenztechnik werden häufig elektromagnetische Felder im Dielektrikum mit verschwindender elektrischer Stromdichte  $\vec{J}$  betrachtet.

<sup>2</sup>Genaugenommen sind hier nur die freien Ladungen gemeint.

<sup>3</sup>Mit den Vektoren  $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$  und  $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$  gilt  $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$ . Dies ist die in der elektromagnetische Feldtheorie übliche Definition des Skalarprodukts.

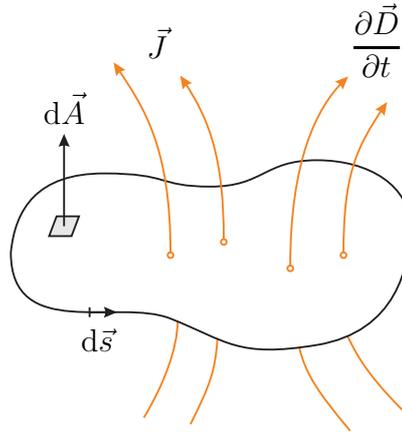


Abbildung 1.1.: Zum Durchflutungsgesetz

Aus (1.3) folgt, dass die Differentiation im Zeitbereich einer Multiplikation mit  $j\omega$  im Frequenzbereich entspricht, siehe auch (C.8):

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \text{Re}(\underline{\vec{D}} e^{j\omega t}) \right) = \text{Re} \left( \underline{\vec{D}} \frac{\partial}{\partial t} (e^{j\omega t}) \right) = \text{Re}(j\omega \underline{\vec{D}} e^{j\omega t}). \quad (1.11)$$

Mit (1.3), (1.4) und (1.6) erhält man das Durchflutungsgesetz für die vektoriellen komplexen Amplituden:

$$\oint_{\partial A} \langle \underline{\vec{H}}, d\vec{s} \rangle = \iint_A \langle \underline{\vec{J}}, d\vec{A} \rangle + j\omega \iint_A \langle \underline{\vec{D}}, d\vec{A} \rangle. \quad (1.12)$$

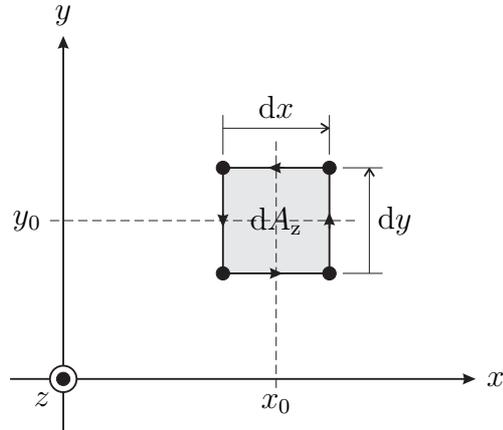
### 1.2.1.2. Differentielle Form, Satz von Stokes

Die Komponenten der Rotation eines Vektorfeldes  $\vec{H}$  definiert man zu

$$\left[ \text{rot}(\vec{H}) \right]_{xyz} = \lim_{dA_{xyz} \rightarrow 0} \frac{\oint \langle \vec{H}, d\vec{s} \rangle}{dA_{xyz}}. \quad (1.13)$$

Hierbei steht xyz für eine der drei Koordinaten  $x$ ,  $y$  oder  $z$ .  $[\cdot]_{xyz}$  bezeichnet die  $x$ -,  $y$ - oder  $z$ -Komponente des Vektors. Der Umlaufsinn  $d\vec{s}$  des Integrals und die Flächennormale  $dA_{xyz}$  bilden wieder eine Rechtsschraube.

Speziell zum Berechnen der  $z$ -Komponente der Rotation in kartesischen Koordinaten betrachtet man das in Abbildung 1.2 gezeigte, in der  $x$ - $y$ -Ebene liegende, infinitesimale Flächenelement  $dA_z$  mit der Flächennormalen in positiver  $z$ -Richtung.


 Abbildung 1.2.: Infinitesimales Flächenelement  $dA_z = dx dy$ 

Das Umlaufintegral der Feldstärke  $\vec{H}$  entlang des Randes  $\partial dA_z$  des Flächenelements  $dA_z$  ergibt

$$\begin{aligned}
 \oint_{\partial dA_z} \langle \vec{H}, d\vec{s} \rangle &= \int_{\text{rechts unten}}^{\text{rechts oben}} \langle \vec{H}, d\vec{s} \rangle + \int_{\text{rechts unten}}^{\text{links unten}} \langle \vec{H}, d\vec{s} \rangle \\
 &+ \int_{\text{links unten}}^{\text{links oben}} \langle \vec{H}, d\vec{s} \rangle + \int_{\text{links oben}}^{\text{rechts oben}} \langle \vec{H}, d\vec{s} \rangle \\
 &= H_x \left( x_0, y_0 - \frac{dy}{2}, z_0, t \right) \cdot dx + H_y \left( x_0 + \frac{dx}{2}, y_0, z_0, t \right) \cdot dy \\
 &- H_x \left( x_0, y_0 + \frac{dy}{2}, z_0, t \right) \cdot dx - H_y \left( x_0 - \frac{dx}{2}, y_0, z_0, t \right) \cdot dy \\
 &= \left( \frac{H_y \left( x_0 + \frac{dx}{2}, y_0, z_0, t \right) - H_y \left( x_0 - \frac{dx}{2}, y_0, z_0, t \right)}{dx} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{H_x \left( x_0, y_0 + \frac{dy}{2}, z_0, t \right) - H_x \left( x_0, y_0 - \frac{dy}{2}, z_0, t \right)}{dy} \right) dx dy.
 \end{aligned}$$

Führt man die Grenzübergänge  $dx \rightarrow 0$  und  $dy \rightarrow 0$  durch, so erhält man

$$\oint_{\partial dA_z} \langle \vec{H}, d\vec{s} \rangle = \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) dx dy = \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) dA_z.$$

Schließlich erhält man die  $z$ -Komponente

$$[\text{rot}(\vec{H})]_z = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}$$

der Rotation in kartesischen Koordinaten.

Man kann gleichartige Überlegungen für infinitesimale Flächenelemente, die in der  $y$ - $z$ -Ebene oder in der  $z$ - $x$ -Ebene liegen, anstellen. Man erhält die entsprechenden Gleichungen auch, indem man die Komponenten und Koordinaten zyklisch vertauscht. Es folgt

$$\text{rot}(\vec{H}) = \left( \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) \vec{u}_x + \left( \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \vec{u}_y + \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \vec{u}_z \quad (1.14)$$

für die Rotation in kartesischen Koordinaten, wobei  $\vec{u}_x$ ,  $\vec{u}_y$  und  $\vec{u}_z$  die Einheitsvektoren in  $x$ -,  $y$ - und  $z$ -Richtung sind.

Eine beliebige, nicht infinitesimale Fläche  $A$  kann man in unendlich viele infinitesimale, in  $x$ -,  $y$ - oder  $z$ -Richtung orientierte Flächenelemente zerlegen. Die Linienintegrale entlang der inneren Begrenzungen kürzen sich dabei gegenseitig weg, so dass die Summe der Umlaufintegrale der infinitesimalen Flächenelemente das Umlaufintegral der gesamten Fläche  $A$  ergibt. Die Summe der Oberflächenintegrale über die infinitesimalen Flächenelemente ergibt das Oberflächenintegral über die gesamte Fläche  $A$ . Damit folgt aus der Definition der Rotation (1.13) der für beliebige Vektorfelder  $\vec{H}$  gültige Satz von Stokes

$$\oint_{\partial A} \langle \vec{H}, d\vec{s} \rangle = \iint_A \langle \text{rot}(\vec{H}), d\vec{A} \rangle. \quad (1.15)$$

Anwenden des Satzes von Stokes auf das Durchflutungsgesetz (1.10) ergibt

$$\oint_{\partial A} \langle \vec{H}, d\vec{s} \rangle = \iint_A \langle \text{rot}(\vec{H}), d\vec{A} \rangle = \iint_A \langle \vec{J}, d\vec{A} \rangle + \iint_A \langle \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, d\vec{A} \rangle.$$

Da dies für beliebige Flächen  $A$  gilt, erhält man schließlich das Durchflutungsgesetz in differentieller Form:

$$\text{rot}(\vec{H}) = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (1.16)$$

Für die vektoriellen komplexen Amplituden erhält man mit (1.3), (1.4), (1.6) und (1.11) die im Folgenden vorwiegend verwendete Darstellung des Durchflutungsgesetzes

$$\text{rot}(\underline{\vec{H}}) = \underline{\vec{J}} + j\omega \underline{\vec{D}} \quad (1.17)$$

und mit (1.14) die folgenden Komponentengleichungen:

$$\frac{\partial \underline{H}_z}{\partial y} - \frac{\partial \underline{H}_y}{\partial z} = \underline{J}_x + j\omega \underline{D}_x, \quad (1.18)$$

$$\frac{\partial \underline{H}_x}{\partial z} - \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial x} = \underline{J}_y + j\omega \underline{D}_y, \quad (1.19)$$

$$\frac{\partial \underline{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial \underline{H}_x}{\partial y} = \underline{J}_z + j\omega \underline{D}_z. \quad (1.20)$$

## 1.2.2. Induktionsgesetz, zweite Maxwell'sche Gleichung

### 1.2.2.1. Integrale Form

Das negative Umlaufintegral über die elektrische Feldstärke  $\vec{E}$  ist gleich dem gesamten umschlossenen magnetischen Strom:

$$-\oint_{\partial A} \langle \vec{E}, d\vec{s} \rangle = \underbrace{\iint_A \langle \vec{M}, d\vec{A} \rangle}_{\text{magnetischer Leitungsstrom}} + \underbrace{\iint_A \langle \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, d\vec{A} \rangle}_{\text{magnetischer Verschiebungsstrom}}. \quad (1.21)$$

Der Umlaufsinn  $d\vec{s}$  des Integrals und die Flächennormale  $d\vec{A}$  bilden auch hier wieder eine Rechtsschraube, siehe Abbildung 1.3. In realen Szenarien gibt es keine magnetischen Ladungen  $\rho_m$  und dann verschwindet die magnetische Stromdichte  $\vec{M}$ .

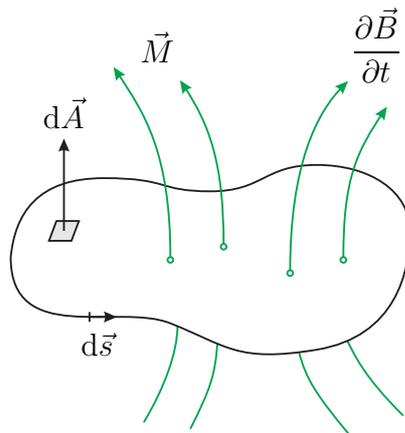


Abbildung 1.3.: Zum Induktionsgesetz

Bei Vernachlässigen des magnetischen Verschiebungsstroms erhält man für reale Szenarien mit verschwindender magnetischer Stromdichte  $\vec{M}$  die Kirchhoffsche Maschenregel

$$\oint_{\partial A} \langle \vec{E}, d\vec{s} \rangle = 0. \quad (1.22)$$

Mit (1.2), (1.5), (1.8) und (1.11) erhält man das Induktionsgesetz für die vektoriellen komplexen Amplituden:

$$-\oint_{\partial A} \langle \vec{E}, d\vec{s} \rangle = \iint_A \langle \vec{M}, d\vec{A} \rangle + j\omega \iint_A \langle \vec{B}, d\vec{A} \rangle. \quad (1.23)$$

### 1.2.2.2. Differentielle Form

Dual zu Abschnitt 1.2.1.2 erhält man durch Anwenden des Satzes von Stokes (1.15) auf das Induktionsgesetz (1.21)

$$-\text{rot}(\vec{E}) = \vec{M} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (1.24)$$

Für die vektoriellen komplexen Amplituden erhält man mit (1.2), (1.5), (1.8) und (1.11) die im Folgenden vorwiegend verwendete Darstellung des Induktionsgesetzes

$$-\text{rot}(\vec{E}) = \vec{M} + j\omega \vec{B} \quad (1.25)$$

und mit (1.14) die folgenden Komponentengleichungen:

$$-\frac{\partial E_z}{\partial y} + \frac{\partial E_y}{\partial z} = M_x + j\omega B_x, \quad (1.26)$$

$$-\frac{\partial E_x}{\partial z} + \frac{\partial E_z}{\partial x} = M_y + j\omega B_y, \quad (1.27)$$

$$-\frac{\partial E_y}{\partial x} + \frac{\partial E_x}{\partial y} = M_z + j\omega B_z. \quad (1.28)$$

### 1.2.3. Quellen des elektrischen Feldes, dritte Maxwellsche Gleichung

#### 1.2.3.1. Integrale Form

Der elektrische Fluss durch eine geschlossene Hülle ist gleich der eingeschlossenen elektrischen Ladung:

$$\boxed{\oiint_{\partial V} \langle \vec{D}, d\vec{A} \rangle = \underbrace{\iiint_V \rho_e dV}_{\text{elektrische Ladung}}}. \quad (1.29)$$

Die Flächennormale  $d\vec{A}$  zeigt dabei nach außen. In der Hochfrequenztechnik werden häufig elektromagnetische Felder in Dielektrika mit verschwindender elektrischer Ladungsdichte  $\rho_e$  betrachtet. Die elektrische Flussdichte  $\vec{D}$  ist dann quellenfrei.

Für die komplexen Amplituden erhält man mit (1.3) und (1.7) die Gleichung

$$\oint\oint_{\partial V} \langle \vec{D}, d\vec{A} \rangle = \iiint_V \rho_e dV. \quad (1.30)$$

### 1.2.3.2. Differentielle Form, Satz von Gauß

Die Divergenz eines Vektorfeldes  $\vec{D}$  definiert man zu

$$\operatorname{div}(\vec{D}) = \lim_{dV \rightarrow 0} \frac{\oint\oint_{\partial dV} \langle \vec{D}, d\vec{A} \rangle}{dV}. \quad (1.31)$$

Die Flächennormale  $d\vec{A}$  zeigt dabei wieder nach außen.

Speziell zum Berechnen der Divergenz in kartesischen Koordinaten betrachtet man das in Abbildung 1.4 gezeigte infinitesimale Volumenelement  $dV$ .

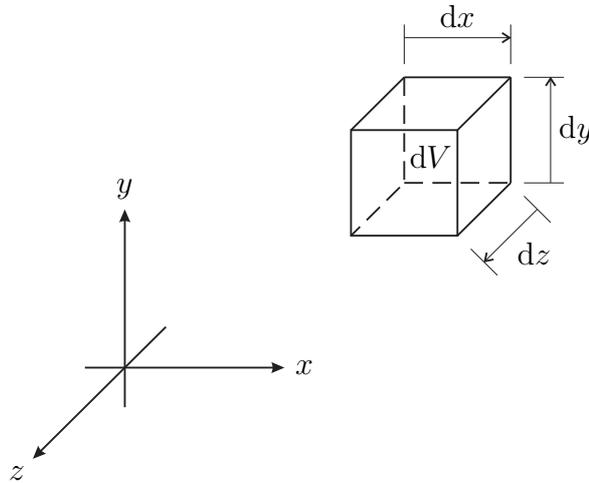


Abbildung 1.4.: Infinitesimales Volumenelement  $dV = dx dy dz$

Der Fluss durch die Hülle  $\partial dV$  des Volumenelements  $dV$  ergibt sich zu

$$\begin{aligned}
 \oiint_{\partial dV} \langle \vec{D}, d\vec{A} \rangle &= \iint_{\text{rechte Seite}} \langle \vec{D}, d\vec{A} \rangle + \iint_{\text{linke Seite}} \langle \vec{D}, d\vec{A} \rangle + \iint_{\text{Deckel}} \langle \vec{D}, d\vec{A} \rangle \\
 &+ \iint_{\text{Boden}} \langle \vec{D}, d\vec{A} \rangle + \iint_{\text{Vorderseite}} \langle \vec{D}, d\vec{A} \rangle + \iint_{\text{Rückseite}} \langle \vec{D}, d\vec{A} \rangle \\
 &= D_x \left( x_0 + \frac{dx}{2}, y_0, z_0, t \right) \cdot dy \cdot dz - D_x \left( x_0 - \frac{dx}{2}, y_0, z_0, t \right) \cdot dy \cdot dz \\
 &+ D_y \left( x_0, y_0 + \frac{dy}{2}, z_0, t \right) \cdot dx \cdot dz - D_y \left( x_0, y_0 - \frac{dy}{2}, z_0, t \right) \cdot dx \cdot dz \\
 &+ D_z \left( x_0, y_0, z_0 + \frac{dz}{2}, t \right) \cdot dx \cdot dy - D_z \left( x_0, y_0, z_0 - \frac{dz}{2}, t \right) \cdot dx \cdot dy \\
 &= \left( \frac{D_x \left( x_0 + \frac{dx}{2}, y_0, z_0, t \right) - D_x \left( x_0 - \frac{dx}{2}, y_0, z_0, t \right)}{dx} \right. \\
 &+ \frac{D_y \left( x_0, y_0 + \frac{dy}{2}, z_0, t \right) - D_y \left( x_0, y_0 - \frac{dy}{2}, z_0, t \right)}{dy} \\
 &\left. + \frac{D_z \left( x_0, y_0, z_0 + \frac{dz}{2}, t \right) - D_z \left( x_0, y_0, z_0 - \frac{dz}{2}, t \right)}{dz} \right) dx dy dz.
 \end{aligned}$$

Führt man die Grenzübergänge  $dx \rightarrow 0$ ,  $dy \rightarrow 0$  und  $dz \rightarrow 0$  durch, so erhält man

$$\oiint_{\partial dV} \langle \vec{D}, d\vec{A} \rangle = \left( \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) dx dy dz = \left( \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) dV.$$

Schließlich erhält man die Divergenz in kartesischen Koordinaten:

$$\operatorname{div}(\vec{D}) = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}. \quad (1.32)$$

Ein beliebiges, nicht infinitesimales Volumen  $V$  kann man in unendlich viele infinitesimale Volumenelemente zerlegen. Die Oberflächenintegrale entlang der inneren Begrenzungen kürzen sich dabei gegenseitig weg, so dass die Summe der Oberflächenintegrale der infinitesimalen Volumenelemente das Oberflächenintegral des gesamten Volumens  $V$  ergibt. Die Summe der Volumenintegrale über die infinitesimalen Volumenelemente ergibt das Volumenintegral über das gesamte Volumen  $V$ . Damit folgt aus der Definition der Divergenz (1.31) der für beliebige Vektorfelder  $\vec{D}$  gültige Satz von Gauß

$$\oiint_{\partial V} \langle \vec{D}, d\vec{A} \rangle = \iiint_V \operatorname{div}(\vec{D}) dV. \quad (1.33)$$

Anwenden des Satzes von Gauß auf (1.29) ergibt

$$\oiint_{\partial V} \langle \vec{D}, d\vec{A} \rangle = \iiint_V \operatorname{div}(\vec{D}) \, dV = \iiint_V \rho_e \, dV.$$

Da dies für beliebige Volumen  $V$  gilt, erhält man schließlich

$$\operatorname{div}(\vec{D}) = \rho_e. \quad (1.34)$$

Für die komplexen Amplituden erhält man mit (1.3) und (1.7) die im Folgenden vorwiegend verwendete Darstellung

$$\operatorname{div}(\underline{\vec{D}}) = \underline{\rho}_e. \quad (1.35)$$

**Aufgabe 1.1** *Es wird eine in der  $x$ - $y$ -Ebene liegende Fläche  $A$  betrachtet, siehe Abbildung 1.5. Zeigen Sie, dass mit dem nach außen gerichteten Normaleneinheitsvektor  $\vec{u}$  auf dem Rand  $\partial A$  der Fläche  $A$  für beliebige Vektorfelder  $\vec{D}$  folgender, als Gaußscher Satz in der Ebene bekannter Zusammenhang*

$$\iint_A \left( \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} \right) dA = \oint_{\partial A} \langle \vec{D}, \vec{u} \rangle ds \quad (1.36)$$

*gilt! Betrachten Sie hierzu zunächst ein infinitesimales rechteckförmiges Flächenelement  $dA_z = dx \, dy$ .*

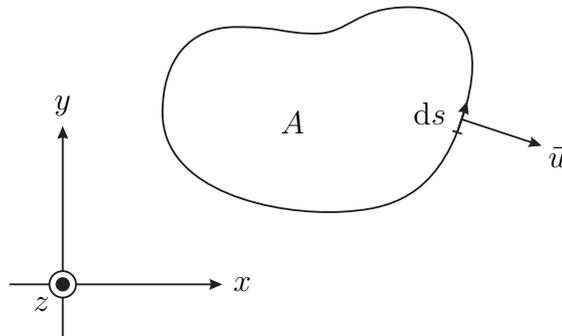


Abbildung 1.5.: Fläche  $A$  mit Normaleneinheitsvektor  $\vec{u}$  auf dem Rand  $\partial A$

## 1.2.4. Quellen des magnetischen Feldes, vierte Maxwell'sche Gleichung

### 1.2.4.1. Integrale Form

Der magnetische Fluss durch eine geschlossene Hülle ist gleich der eingeschlossenen magnetischen Ladung:

$$\boxed{\oiint_{\partial V} \langle \vec{B}, d\vec{A} \rangle = \underbrace{\iiint_V \rho_m dV}_{\text{magnetische Ladung}}}. \quad (1.37)$$

Die Flächennormale  $d\vec{A}$  zeigt auch hier wieder nach außen. In realen Szenarien gibt es keine magnetischen Ladungen und dann verschwindet die magnetische Ladungsdichte  $\rho_m$ , das heißt die magnetische Flussdichte  $\vec{B}$  ist quellenfrei.

Für die komplexen Amplituden erhält man mit (1.5) und (1.9) die Gleichung

$$\oiint_{\partial V} \langle \vec{B}, d\vec{A} \rangle = \iiint_V \rho_m dV. \quad (1.38)$$

### 1.2.4.2. Differentielle Form

Dual zu Abschnitt 1.2.3.2 erhält man durch Anwenden des Satzes von Stokes (1.15) auf (1.37)

$$\operatorname{div}(\vec{B}) = \rho_m. \quad (1.39)$$

Für die komplexen Amplituden erhält man mit (1.5) und (1.9) die im Folgenden vorwiegend verwendete Darstellung

$$\operatorname{div}(\vec{B}) = \rho_m. \quad (1.40)$$

## 1.3. Ladungserhaltung

Anwenden der Divergenz auf das Durchflutungsgesetz (1.16) ergibt mit (1.46) und (1.34) die Kontinuitätsgleichung

$$0 = \operatorname{div}(\operatorname{rot}(\vec{H})) = \operatorname{div}\left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right) = \operatorname{div}(\vec{J}) + \frac{\partial \rho_e}{\partial t}. \quad (1.41)$$

Die Summe aus elektrischer Leitungsstromdichte  $\vec{J}$  und elektrischer Verschiebungsstromdichte  $\partial\vec{D}/\partial t$  ist quellenfrei und eine abfließende elektrische Stromdichte  $\vec{J}$  äußert sich in einer abnehmenden elektrischen Ladungsdichte  $\rho_e$ . Für die komplexen Amplituden erhält man mit (1.6), (1.7) und (1.11) die Kontinuitätsgleichung

$$0 = \operatorname{div}(\vec{J}) + j\omega\rho_e. \quad (1.42)$$

Mit dem Satz von Gauß (1.33) folgt für den aus einem Volumen  $V$  herausfließenden elektrischen Leitungsstrom

$$\underbrace{\oint_{\partial V} \langle \vec{J}, d\vec{A} \rangle}_{\text{elektrischer Leitungsstrom}} = \iiint_V \operatorname{div}(\vec{J}) dV = - \iiint_V \frac{\partial \rho_e}{\partial t} dV = - \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\iiint_V \rho_e dV}_{\text{elektrische Ladung}},$$

das heißt der aus dem Volumen  $V$  herausfließende elektrische Leitungsstrom entspricht der Abnahme der elektrischen Ladung in dem Volumen  $V$ .

Falls die Ladungsänderung vernachlässigt werden kann, erhält man die Kirchhoffsche Knotenregel

$$\oint_{\partial V} \langle \vec{J}, d\vec{A} \rangle = 0. \quad (1.43)$$

Völlig dual folgt aus dem Induktionsgesetz (1.24) mit (1.46) und (1.39) die Kontinuitätsgleichung

$$0 = \operatorname{div}(-\operatorname{rot}(\vec{E})) = \operatorname{div}\left(\vec{M} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = \operatorname{div}(\vec{M}) + \frac{\partial \rho_m}{\partial t}. \quad (1.44)$$

Die Summe aus magnetischer Leitungsstromdichte  $\vec{M}$  und magnetischer Verschiebungsstromdichte  $\partial\vec{B}/\partial t$  ist quellenfrei und eine abfließende magnetische Stromdichte  $\vec{M}$  äußert sich in einer abnehmenden magnetischen Ladungsdichte  $\rho_m$ . Für die komplexen Amplituden erhält man mit (1.8), (1.9) und (1.11) die Kontinuitätsgleichung

$$0 = \operatorname{div}(\vec{M}) + j\omega\rho_m. \quad (1.45)$$

Diese Ladungserhaltungssätze sind aus den Maxwell'schen Gleichungen ableitbar und stellen keine weiteren Naturgesetze dar. Historisch gesehen hat die Forderung nach der Ladungserhaltung das Einführen einer elektrischen Verschiebungsstromdichte  $\partial\vec{D}/\partial t$  in den Maxwell'schen Gleichungen motiviert.

**Aufgabe 1.2** Zeigen Sie unter Verwenden kartesischer Koordinaten, dass für jedes Vektorfeld  $\vec{H}$

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot}(\vec{H})) = 0 \quad (1.46)$$

*gilt!*

## 1.4. Materialgleichungen

Im Rahmen dieses Buchs werden nur einfache Materialien betrachtet, die sich durch folgende Eigenschaften auszeichnen:

- Die Materialien sind linear.
- Die Materialien sind zeitinvariant.
- Die Materialien sind isotrop, das heißt die Eigenschaften sind richtungsunabhängig.

Im Allgemeinen sind die Materialeigenschaften ortsabhängig, was beim Bilden der räumlichen Ableitungen zu beachten ist. Bei den im Folgenden betrachteten Szenarien sind die Materialeigenschaften jedoch gebietsweise homogen, so dass die Ortsabhängigkeiten nur an den Grenzflächen zu beachten sind.

Für das elektrische Feld gilt

$$\boxed{\vec{D} = \varepsilon \vec{E}}. \quad (1.47)$$

Mit (1.2) und (1.3) folgt

$$\underline{\vec{D}} = \varepsilon \underline{\vec{E}}. \quad (1.48)$$

Die Permittivität

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r \quad (1.49)$$

ist das Produkt der absoluten Permittivität

$$\varepsilon_0 = 8,8542 \cdot 10^{-12} \text{ A s V}^{-1} \text{ m}^{-1} \quad (1.50)$$

und der relativen Permittivität  $\varepsilon_r$ .

Für das magnetische Feld gilt

$$\boxed{\vec{B} = \mu \vec{H}}. \quad (1.51)$$

Mit (1.4) und (1.5) folgt

$$\underline{\vec{B}} = \mu \underline{\vec{H}}. \quad (1.52)$$

Die Permeabilität

$$\mu = \mu_0 \mu_r \quad (1.53)$$

ist das Produkt der absoluten Permeabilität

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ V s A}^{-1} \text{ m}^{-1} \quad (1.54)$$

und der relativen Permeabilität  $\mu_r$ .

Mit der elektrischen Leitfähigkeit  $\kappa$  gilt weiterhin das Ohmsche Gesetz

$$\boxed{\vec{J} = \kappa \vec{E}}. \quad (1.55)$$

Mit (1.2) und (1.6) folgt

$$\vec{J} = \kappa \vec{E}. \quad (1.56)$$

Einsetzen der Materialgleichungen in das Durchflutungsgesetz (1.17) ergibt

$$\text{rot}(\vec{H}) = (\kappa + j\omega\varepsilon) \vec{E} = j\omega \left( \varepsilon - j\frac{\kappa}{\omega} \right) \vec{E} = j\omega \underline{\varepsilon} \vec{E}. \quad (1.57)$$

Mit der so definierten komplexen Permittivität  $\underline{\varepsilon}$  lassen sich Verluste in leitfähigen Materialien auf einfache Art und Weise berücksichtigen. Dual kann man eine komplexe Permeabilität  $\underline{\mu}$  definieren. Für das Induktionsgesetz (1.25) folgt

$$-\text{rot}(\vec{E}) = \vec{M} + j\omega \underline{\mu} \vec{H} = j\omega \underline{\mu} \vec{H}. \quad (1.58)$$

## 1.5. Dualität von elektrischem und magnetischem Feld

Aufgrund der Dualität der Maxwell'schen Gleichungen erhält man aus einem die Maxwell'schen Gleichungen erfüllendem elektromagnetischen Feld bei Durchführen der Ersetzungen in Tabelle 1.1 wieder ein mögliches elektromagnetisches Feld. Speziell die Maxwell'schen Gleichungen und die Materialgleichungen gehen durch die Ersetzungen in sich selbst über.

Tabelle 1.1.: Dualität von elektrischem und magnetischem Feld

ersetze	$\vec{H}$	durch	$-\vec{E}$
ersetze	$\vec{E}$	durch	$\vec{H}$
ersetze	$\vec{B}$	durch	$-\vec{D}$
ersetze	$\vec{D}$	durch	$\vec{B}$
ersetze	$\vec{M}$	durch	$-\vec{J}$
ersetze	$\vec{J}$	durch	$\vec{M}$
ersetze	$\rho_m$	durch	$-\rho_e$
ersetze	$\rho_e$	durch	$\rho_m$
ersetze	$\varepsilon$	durch	$\mu$
ersetze	$\mu$	durch	$\varepsilon$

## 1.6. Bedingungen an Grenzflächen

### 1.6.1. Elektrisches Feld an einer Grenzfläche

Es wird das elektrische Feld an der lokal näherungsweise ebenen Grenzfläche zweier Materialien unterschiedlicher Permittivitäten betrachtet. Der Normalenvektor auf der Grenzfläche und die Einfallrichtung spannen die Einfallsebene auf. Das Koordinatensystem wird vereinfachend so gewählt, dass sich die Grenzfläche bei  $z = 0$  befindet und die Einfallsebene der  $x$ - $z$ -Ebene entspricht, siehe Abbildung 1.6. Der Normaleneinheitsvektor auf der Grenzfläche in Richtung des ersten Mediums ist dann der Einheitsvektor  $\vec{u}_z$  in  $z$ -Richtung. Bei Anwenden der Maxwell'schen Gleichungen auf das elektrische Feld an der Grenzfläche sind die magnetische Flächenstromdichte  $\vec{M}_F$  in der Grenzfläche, die elektrische Flächenladungsdichte  $\rho_{eF}$  in der Grenzfläche und die sprunghaften Änderungen der elektrischen Feldstärke  $\vec{E}$  und der elektrischen Flussdichte  $\vec{D}$  an der Grenzfläche relevant. Die Ableitung der Sprungfunktion ist der Dirac-Impuls  $\delta(\cdot)$ .

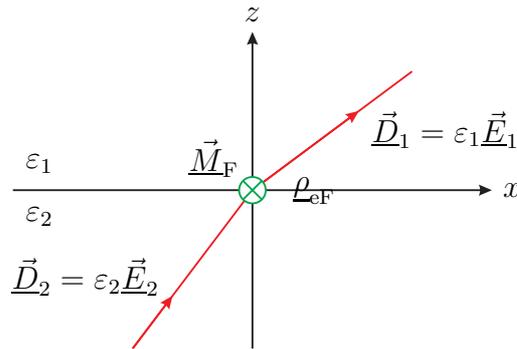


Abbildung 1.6.: Elektrisches Feld an einer Grenzfläche

Für die linke Seite der Gleichung (1.35) erhält man mit (1.32)

$$\operatorname{div}(\vec{D}) = (D_{1z} - D_{2z}) \delta(z) = \langle \vec{D}_1 - \vec{D}_2, \vec{u}_z \rangle \delta(z),$$

da man alle Ableitungen außer denen in  $z$ -Richtung vernachlässigen kann. Für die rechte Seite der Gleichung (1.35) erhält man

$$\rho_e = \rho_{eF} \delta(z).$$

Es folgt

$$\langle \vec{D}_1 - \vec{D}_2, \vec{u}_z \rangle = \rho_{eF}. \quad (1.59)$$

Die Differenz der Normalkomponenten der elektrischen Flussdichten an einer Grenzfläche entspricht der elektrischen Flächenladungsdichte  $\underline{\rho}_{\text{eF}}$  in der Grenzfläche.

Für die linke Seite des Induktionsgesetzes (1.25) erhält man mit (1.14)

$$\begin{aligned} -\text{rot}(\vec{E}) &= (\underline{E}_{1y} - \underline{E}_{2y}) \delta(z) \vec{u}_x - (\underline{E}_{1x} - \underline{E}_{2x}) \delta(z) \vec{u}_y \\ &= ((\vec{E}_1 - \vec{E}_2) \times \vec{u}_z) \delta(z), \end{aligned}$$

da man alle Ableitungen außer denen in  $z$ -Richtung vernachlässigen kann.  $\times$  bezeichnet hierbei das Vektorprodukt zweier Vektoren.<sup>4</sup> Für die rechte Seite des Induktionsgesetzes (1.25) erhält man

$$\vec{M} = \vec{M}_{\text{F}} \delta(z),$$

da man die auch an der Grenzfläche endlich große magnetische Flussdichte  $\vec{B}$  vernachlässigen kann. Es folgt

$$(\vec{E}_1 - \vec{E}_2) \times \vec{u}_z = \vec{M}_{\text{F}}. \quad (1.60)$$

Die Differenz der Tangentialkomponenten der elektrischen Feldstärken an einer Grenzfläche ist proportional zur magnetischen Flächenstromdichte  $\vec{M}_{\text{F}}$  in der Grenzfläche.

### 1.6.2. Magnetisches Feld an einer Grenzfläche

Es wird das magnetische Feld an der lokal näherungsweise ebenen Grenzfläche zweier Materialien unterschiedlicher Permeabilitäten betrachtet. Das Koordinatensystem wird vereinfachend wieder so gewählt, dass sich die Grenzfläche bei  $z = 0$  befindet und die Einfallsebene der  $x$ - $z$ -Ebene entspricht, siehe Abbildung 1.7. Bei Anwenden der Maxwell'schen Gleichungen auf das magnetische Feld an der Grenzfläche sind die elektrische Flächenstromdichte  $\vec{J}_{\text{F}}$  in der Grenzfläche, die magnetische Flächenladungsdichte  $\underline{\rho}_{\text{mF}}$  in der Grenzfläche und die sprunghaften Änderungen der magnetischen Feldstärke  $\vec{H}$  und der magnetischen Flussdichte  $\vec{B}$  an der Grenzfläche relevant.

Für die linke Seite der Gleichung (1.40) erhält man mit (1.32)

$$\text{div}(\vec{B}) = (\underline{B}_{1z} - \underline{B}_{2z}) \delta(z) = \langle \vec{B}_1 - \vec{B}_2, \vec{u}_z \rangle \delta(z),$$

---

<sup>4</sup>Mit den Vektoren  $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$  und  $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$  gilt  $\vec{a} \times \vec{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2) \vec{u}_x + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \vec{u}_y + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \vec{u}_z$ . Dies ist die in der elektromagnetische Feldtheorie übliche Definition des Vektorprodukts.

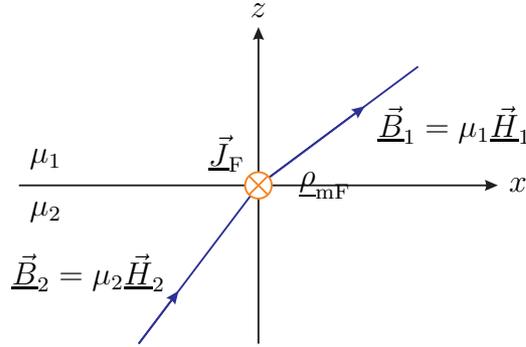


Abbildung 1.7.: Magnetisches Feld an einer Grenzfläche

da man alle Ableitungen außer denen in  $z$ -Richtung vernachlässigen kann. Für die rechte Seite der Gleichung (1.40) erhält man

$$\rho_m = \rho_{mF} \delta(z).$$

Es folgt

$$\langle \vec{B}_1 - \vec{B}_2, \vec{u}_z \rangle = \rho_{mF}. \quad (1.61)$$

Die Differenz der Normalkomponenten der magnetischen Flussdichten an einer Grenzfläche entspricht der magnetischen Flächenladungsdichte  $\rho_{mF}$  in der Grenzfläche.

Für die linke Seite des Durchflutungsgesetzes (1.17) erhält man mit (1.14)

$$\begin{aligned} \text{rot}(\vec{H}) &= -(\underline{H}_{1y} - \underline{H}_{2y}) \delta(z) \vec{u}_x + (\underline{H}_{1x} - \underline{H}_{2x}) \delta(z) \vec{u}_y \\ &= -((\vec{H}_1 - \vec{H}_2) \times \vec{u}_z) \delta(z), \end{aligned}$$

da man alle Ableitungen außer denen in  $z$ -Richtung vernachlässigen kann. Für die rechte Seite des Durchflutungsgesetzes (1.17) erhält man

$$\vec{J} = \vec{J}_F \delta(z),$$

da man die auch an der Grenzfläche endlich große elektrische Flussdichte  $\vec{D}$  vernachlässigen kann. Es folgt

$$-(\vec{H}_1 - \vec{H}_2) \times \vec{u}_z = \vec{J}_F. \quad (1.62)$$

Die negative Differenz der Tangentialkomponenten der magnetischen Feldstärken an einer Grenzfläche ist proportional zur elektrischen Flächenstromdichte  $\vec{J}_F$  in der Grenzfläche.

**Aufgabe 1.3** Die betrachteten elektromagnetischen Felder seien im jeweiligen Medium Lösungen der Maxwell'schen Gleichungen. Zeigen Sie, dass dann die Grenzflächenbedingungen (1.59) und (1.61) der Normalkomponenten der Flussdichten erfüllt sind, falls die Grenzflächenbedingungen (1.60) und (1.62) der Tangentialkomponenten der Feldstärken erfüllt sind!

### 1.6.3. Grenzfläche zweier Dielektrika

An der Grenzfläche zweier Dielektrika sind die Flächenladungsdichten und die Flächenstromdichten Null. Wenn man das Koordinatensystem vereinfachend wieder so wählt, dass die Grenzfläche der  $x$ - $y$ -Ebene entspricht, folgen aus (1.59), (1.60), (1.61) und (1.62) an der Grenzfläche  $z = 0$ :

$$\langle \vec{D}_1 - \vec{D}_2, \vec{u}_z \rangle = 0, \quad (1.63)$$

$$(\vec{E}_1 - \vec{E}_2) \times \vec{u}_z = \vec{0}, \quad (1.64)$$

$$\langle \vec{B}_1 - \vec{B}_2, \vec{u}_z \rangle = 0. \quad (1.65)$$

$$(\vec{H}_1 - \vec{H}_2) \times \vec{u}_z = \vec{0}, \quad (1.66)$$

Die Normalkomponenten der Flussdichten und die Tangentialkomponenten der Feldstärken sind an der Grenzfläche zweier Dielektrika stetig.

### 1.6.4. Oberfläche eines idealen elektrischen Leiters

In einem idealen elektrischen Leiter muss das elektrische Feld verschwinden. Wegen des Induktionsgesetzes (1.25) und der verschwindenden magnetischen Stromdichte  $\vec{M}$  kann dann in einem idealen elektrischen Leiter auch kein zeitveränderliches magnetisches Feld existieren. Ideale elektrische Leiter sind feldfrei. An der Oberfläche eines idealen elektrischen Leiters können eine elektrische Flächenstromdichte  $\vec{J}_F$  und eine elektrische Flächenladungsdichte  $\rho_{eF}$  vorhanden sein. Die magnetische Flächenstromdichte  $\vec{M}_F$  und die magnetische Flächenladungsdichte  $\rho_{mF}$  sind jedoch an der Oberfläche eines idealen elektrischen Leiters stets Null. Folglich müssen die Tangentialkomponenten der elektrischen Feldstärke  $\vec{E}$  und die Normalkomponente der magnetischen Flussdichte  $\vec{B}$  an der Oberfläche eines idealen elektrischen Leiters Null sein, siehe (1.60) und (1.61). Wenn das Koordinatensystem so gewählt wird, dass der Bereich  $z < 0$  mit dem idealen elektrischen Leiter gefüllt ist, müssen an der Oberfläche  $z = 0$

$$\vec{E} \times \vec{u}_z = \vec{0} \quad (1.67)$$

und

$$\langle \underline{\vec{D}}, \vec{u}_z \rangle = 0 \quad (1.68)$$

gelten.

Mit (1.59) ergibt sich an der Oberfläche  $z = 0$  des idealen elektrischen Leiters die elektrische Flächenladungsdichte

$$\rho_{eF} = \langle \underline{\vec{D}}, \vec{u}_z \rangle. \quad (1.69)$$

Der negative magnetische Feldstärkevektor  $\underline{\vec{H}}$ , der Normaleneinheitsvektor  $\vec{u}_z$  und die elektrische Flächenstromdichte  $\underline{\vec{J}}_F$  an der Oberfläche  $z = 0$  des idealen elektrischen Leiters bilden wegen (1.62) ein Rechtssystem:

$$\underline{\vec{J}}_F = -\underline{\vec{H}} \times \vec{u}_z. \quad (1.70)$$

### 1.6.5. Oberfläche eines idealen magnetischen Leiters

Aus Dualitätsgründen wird auch ein idealer magnetischer Leiter eingeführt. In einem idealen magnetischen Leiter muss das magnetische Feld verschwinden. Wegen des Durchflutungsgesetzes (1.17) und der verschwindenden elektrischen Stromdichte  $\underline{\vec{J}}$  kann dann in einem idealen magnetischen Leiter auch kein zeitveränderliches elektrisches Feld existieren. Ideale magnetische Leiter sind feldfrei. An der Oberfläche eines idealen magnetischen Leiters können eine magnetische Flächenstromdichte  $\underline{\vec{M}}_F$  und eine magnetische Flächenladungsdichte  $\rho_{mF}$  vorhanden sein. Die elektrische Flächenstromdichte  $\underline{\vec{J}}_F$  und die elektrische Flächenladungsdichte  $\rho_{eF}$  sind jedoch an der Oberfläche eines idealen magnetischen Leiters stets Null. Folglich müssen die Tangentialkomponenten der magnetischen Feldstärke  $\underline{\vec{H}}$  und die Normalkomponente der elektrischen Flussdichte  $\underline{\vec{D}}$  an der Oberfläche eines idealen magnetischen Leiters Null sein, siehe (1.62) und (1.59). Wenn das Koordinatensystem so gewählt wird, dass der Bereich  $z < 0$  mit dem idealen magnetischen Leiter gefüllt ist, müssen an der Oberfläche  $z = 0$

$$\underline{\vec{H}} \times \vec{u}_z = \vec{0} \quad (1.71)$$

und

$$\langle \underline{\vec{D}}, \vec{u}_z \rangle = 0 \quad (1.72)$$

gelten.

Mit (1.61) ergibt sich an der Oberfläche  $z = 0$  des idealen magnetischen Leiters die magnetische Flächenladungsdichte

$$\rho_{mF} = \langle \underline{\vec{B}}, \vec{u}_z \rangle. \quad (1.73)$$

Der elektrische Feldstärkevektor  $\vec{E}$ , der Normaleneinheitsvektor  $\vec{u}_z$  und die magnetische Flächenstromdichte  $\vec{M}_F$  an der Oberfläche  $z = 0$  des idealen magnetischen Leiters bilden wegen (1.60) ein Rechtssystem:

$$\vec{M}_F = \vec{E} \times \vec{u}_z. \quad (1.74)$$

## 1.7. Poynting-Vektor

Charakteristisch und für viele technische Anwendungen essentiell ist die Fähigkeit elektromagnetischer Felder, Energie zu transportieren. Das Ziel der folgenden Betrachtungen ist das Gewinnen von Aussagen über den Energiefluss in realen Szenarien mit verschwindender magnetischer Ladungsdichte  $\rho_m$  und verschwindender magnetischer Stromdichte  $\vec{M}$ .

Die folgenden Betrachtungen gehen von der momentanen Verlustleistungsdichte

$$p_V = \langle \vec{E}, \vec{J} \rangle \quad (1.75)$$

aus. Mit dem Durchflutungsgesetz (1.16) und (1.47) folgt

$$p_V = \langle \vec{E}, \text{rot}(\vec{H}) \rangle - \varepsilon \langle \vec{E}, \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \rangle,$$

was man mit (1.82) in

$$p_V = \langle \text{rot}(\vec{E}), \vec{H} \rangle - \text{div}(\vec{E} \times \vec{H}) - \varepsilon \langle \vec{E}, \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \rangle$$

umformen kann. Einsetzen des Induktionsgesetzes (1.24) ergibt mit (1.51) bei verschwindender magnetischer Stromdichte  $\vec{M}$

$$\begin{aligned} p_V &= -\mu \langle \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \vec{H} \rangle - \text{div}(\vec{E} \times \vec{H}) - \varepsilon \langle \vec{E}, \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \rangle \\ &= -\frac{1}{2} \mu \frac{\partial}{\partial t} \langle \vec{H}, \vec{H} \rangle - \text{div}(\vec{E} \times \vec{H}) - \frac{1}{2} \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \langle \vec{E}, \vec{E} \rangle. \end{aligned}$$

Man definiert den Poynting-Vektor

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}. \quad (1.76)$$

Die Verlustleistung im Volumen  $V$  ist

$$P_V = \iiint_V p_V \, dV = -\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \left( \frac{1}{2} \mu \langle \vec{H}, \vec{H} \rangle + \frac{1}{2} \varepsilon \langle \vec{E}, \vec{E} \rangle \right) dV - \iiint_V \text{div}(\vec{S}) \, dV,$$

was sich mit dem Satz von Gauß (1.33) in

$$P_V = -\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \left( \frac{1}{2} \mu \langle \vec{H}, \vec{H} \rangle + \frac{1}{2} \varepsilon \langle \vec{E}, \vec{E} \rangle \right) dV - \oiint_{\partial V} \langle \vec{S}, d\vec{A} \rangle$$

umformen lässt. Aufgrund des Energieerhaltungssatzes muss die Verlustleistung  $P_V$  im Volumen  $V$  gleich der Abnahme der im elektromagnetischen Feld gespeicherten Energie weniger der aus dem Volumen  $V$  austretenden Strahlungsleistung sein. Man identifiziert

$$w_m = \frac{1}{2} \mu \langle \vec{H}, \vec{H} \rangle \quad (1.77)$$

als momentane magnetische Energiedichte,

$$w_e = \frac{1}{2} \varepsilon \langle \vec{E}, \vec{E} \rangle \quad (1.78)$$

als momentane elektrische Energiedichte und

$$P = \oiint_{\partial V} \langle \vec{S}, d\vec{A} \rangle \quad (1.79)$$

als momentane Strahlungsleistung. Der Poynting-Vektor  $\vec{S}$  beschreibt die momentane Energieflussdichte.

In der Hochfrequenztechnik interessieren wir uns insbesondere für den zeitlichen Mittelwert des Poynting-Vektors  $\vec{S}$  bei sinusförmiger Zeitabhängigkeit der Feldstärken. Bei sinusförmigen zeitabhängigen Feldstärken berechnet sich der Poynting-Vektor mit (1.2) und (1.4) zu<sup>5</sup>

$$\begin{aligned} \vec{S} &= \operatorname{Re}(\underline{\vec{E}} e^{j\omega t}) \times \operatorname{Re}(\underline{\vec{H}} e^{j\omega t}) \\ &= \frac{1}{2} (\underline{\vec{E}} e^{j\omega t} + \underline{\vec{E}}^* e^{-j\omega t}) \times \frac{1}{2} (\underline{\vec{H}} e^{j\omega t} + \underline{\vec{H}}^* e^{-j\omega t}) \\ &= \frac{1}{4} (\underline{\vec{E}} \times \underline{\vec{H}}) e^{j2\omega t} + \frac{1}{4} (\underline{\vec{E}} \times \underline{\vec{H}}^*) + \frac{1}{4} (\underline{\vec{E}}^* \times \underline{\vec{H}}) + \frac{1}{4} (\underline{\vec{E}}^* \times \underline{\vec{H}}^*) e^{-j2\omega t}. \end{aligned}$$

Der Mittelwert

$$\frac{1}{4} (\underline{\vec{E}} \times \underline{\vec{H}}^*) + \frac{1}{4} (\underline{\vec{E}}^* \times \underline{\vec{H}}) = \operatorname{Re} \left( \frac{1}{2} \underline{\vec{E}} \times \underline{\vec{H}}^* \right)$$

entspricht dem Realteil des komplexen Poynting-Vektors

$$\underline{\vec{S}} = \frac{1}{2} \underline{\vec{E}} \times \underline{\vec{H}}^*. \quad (1.80)$$

---

<sup>5</sup>Der Realteil einer komplexen Größe  $\underline{x}$  berechnet sich zu  $\operatorname{Re}(\underline{x}) = \frac{1}{2} (\underline{x} + \underline{x}^*)$ .

Die im Mittel aus einem Volumen  $V$  austretende Strahlungsleistung ist

$$P = \oint\!\!\!\oint_{\partial V} \langle \operatorname{Re}(\vec{S}), d\vec{A} \rangle. \quad (1.81)$$

**Aufgabe 1.4** Zeigen Sie unter Verwenden kartesischer Koordinaten, dass für beliebige Vektorfelder  $\vec{E}$  und  $\vec{H}$

$$\operatorname{div}(\vec{E} \times \vec{H}) = \langle \operatorname{rot}(\vec{E}), \vec{H} \rangle - \langle \vec{E}, \operatorname{rot}(\vec{H}) \rangle \quad (1.82)$$

*gilt!*

## 1.8. Reziprozitätstheorem

Es wird eine geschlossene Hülle  $\partial V$  um ein quellenfreies, mit einem reziproken, das heißt einem linearen und isotropen Material ausgefülltes Gebiet  $V$  betrachtet. Die Feldstärken  $\vec{E}_1$  und  $\vec{H}_1$  beschreiben das durch eine erste Konfiguration an Quellen außerhalb des Gebiets  $V$  verursachte elektromagnetische Feld und die Feldstärken  $\vec{E}_2$  und  $\vec{H}_2$  beschreiben das durch eine zweite Konfiguration an Quellen außerhalb des Gebiets  $V$  verursachte elektromagnetische Feld. Mit dem Satz von Gauss (1.33) und (1.82) erhält man

$$\begin{aligned} & \oint\!\!\!\oint_{\partial V} \langle \vec{E}_1 \times \vec{H}_2 - \vec{E}_2 \times \vec{H}_1, d\vec{A} \rangle \\ &= \iiint_V \operatorname{div}(\vec{E}_1 \times \vec{H}_2 - \vec{E}_2 \times \vec{H}_1) dV \\ &= \iiint_V \left( \langle \operatorname{rot}(\vec{E}_1), \vec{H}_2 \rangle - \langle \vec{E}_1, \operatorname{rot}(\vec{H}_2) \rangle - \langle \operatorname{rot}(\vec{E}_2), \vec{H}_1 \rangle + \langle \vec{E}_2, \operatorname{rot}(\vec{H}_1) \rangle \right) dV. \end{aligned}$$

Mit dem Durchflutungsgesetz (1.17), dem Induktionsgesetz (1.25), (1.48), (1.52) und (1.56) folgt im quellenfreien Gebiet  $V$  mit  $\vec{J} = \vec{0}$  und  $\vec{M} = \vec{0}$  weiter

$$\begin{aligned} & \oint\!\!\!\oint_{\partial V} \langle \vec{E}_1 \times \vec{H}_2 - \vec{E}_2 \times \vec{H}_1, d\vec{A} \rangle \\ &= \iiint_V \left( \langle -j\omega\mu\vec{H}_1, \vec{H}_2 \rangle - \langle \vec{E}_1, \kappa\vec{E}_2 + j\omega\varepsilon\vec{E}_2 \rangle - \langle -j\omega\mu\vec{H}_2, \vec{H}_1 \rangle + \langle \vec{E}_2, \kappa\vec{E}_1 + j\omega\varepsilon\vec{E}_1 \rangle \right) dV \\ &= 0. \end{aligned}$$

Es folgt das Reziprozitätstheorem<sup>6</sup>

$$\oint\!\!\!\oint_{\partial V} \langle \vec{E}_1 \times \vec{H}_2, d\vec{A} \rangle = \oint\!\!\!\oint_{\partial V} \langle \vec{E}_2 \times \vec{H}_1, d\vec{A} \rangle. \quad (1.83)$$

<sup>6</sup>Genauer handelt es sich um das Lorentz-Reziprozitätstheorem.



## Kapitel 2.

# Elektromagnetische Wellen

### 2.1. Helmholtz-Gleichungen

Im Folgenden wird das elektromagnetische Feld in einem homogenem Dielektrikum betrachtet. Es werden vereinfachend kartesische Koordinaten verwendet. Wendet man auf das Durchflutungsgesetz (1.17) nochmals die Rotation an, so erhält man mit (1.48) bei verschwindender elektrischer Stromdichte  $\vec{J}$

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot}(\vec{H})) = j\omega\varepsilon \operatorname{rot}(\vec{E}).$$

Mit dem Gradienten

$$\operatorname{grad}(\phi) = \frac{\partial\phi}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial\phi}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial\phi}{\partial z}\vec{u}_z \quad (2.1)$$

eines Skalarfeldes  $\phi$  in kartesischen Koordinaten, dem Laplace-Operator

$$\Delta\vec{H} = \operatorname{grad}(\operatorname{div}(\vec{H})) - \operatorname{rot}(\operatorname{rot}(\vec{H})) \quad (2.2)$$

und der Quellenfreiheit des magnetischen Feldes  $\vec{H}$  im ladungsfreien Raum  $\rho_m = 0$ , siehe (1.40) und (1.52), erhält man

$$-\Delta\vec{H} = j\omega\varepsilon \operatorname{rot}(\vec{E}).$$

Einsetzen des Induktionsgesetzes (1.25) ergibt mit (1.52) und

$$\beta_0 = \omega\sqrt{\varepsilon\mu} \quad (2.3)$$

bei verschwindender magnetischer Stromdichte  $\vec{M}$  die Helmholtz-Gleichung

$$\Delta\vec{H} + \beta_0^2\vec{H} = \vec{0} \quad (2.4)$$

für die magnetische Feldstärke  $\vec{H}$ . Dual erhält man ausgehend vom Induktionsgesetz (1.25) durch Einsetzen des Durchflutungsgesetzes (1.17) die Helmholtz-Gleichung

$$\Delta\vec{E} + \beta_0^2\vec{E} = \vec{0} \quad (2.5)$$

für die elektrische Feldstärke  $\vec{E}$ . Ziel wird es sein, spezielle Randbedingungen und die Helmholtz-Gleichungen erfüllende, als elektromagnetische Wellen bezeichnete, quellenfreie elektromagnetische Felder zu finden. Zunächst werden jedoch charakteristische Eigenschaften möglicher Lösungen der Helmholtz-Gleichungen studiert.

**Aufgabe 2.1** Aus dem Durchflutungsgesetz (1.17) erhält man mit (1.48) bei verschwindender elektrischer Stromdichte  $\vec{J}$  die elektrische Feldstärke

$$\vec{E} = -j \frac{1}{\omega \epsilon} \operatorname{rot}(\vec{H}).$$

Zeigen Sie, dass die so berechnete elektrische Feldstärke  $\vec{E}$  die Helmholtz-Gleichung (2.5) erfüllt, falls die magnetische Feldstärke  $\vec{H}$  die Helmholtz-Gleichung (2.4) erfüllt und quellenfrei ist!

**Aufgabe 2.2** Zeigen Sie ausgehend von der Definition des Laplace-Operators (2.2), dass für den Laplace-Operator in kartesischen Koordinaten

$$\Delta \vec{H} = \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial z^2} \quad (2.6)$$

gilt!

## 2.2. Zylindrische Wellenleiter

### 2.2.1. Helmholtz-Gleichungen für zylindrische Wellenleiter

Zylindrische Wellenleiter, wie der in Abbildung 2.1 gezeigte, zeichnen sich durch ihren konstanten Querschnitt aus. Das Koordinatensystem wird so gewählt, dass die Längsachse des zylindrischen Wellenleiters der  $z$ -Achse entspricht. Das Dielektrikum sei homogen und von idealen elektrischen Leitern berandet.

Es werden Lösungen der Helmholtz-Gleichungen mit einer periodischen  $z$ -Abhängigkeit gesucht. Für eine sich in positive (negative)  $z$ -Richtung ausbreitende elektromagnetische Welle wählt man daher den Ansatz

$$\vec{H}(x, y, z, t) = \operatorname{Re}(\vec{H}(x, y, z) e^{j\omega t}) = \operatorname{Re}(\vec{H}_0(x, y) e^{\mp j\beta z} e^{j\omega t}) \quad (2.7)$$

für die magnetische Feldstärke  $\vec{H}$ . Das obere (untere) Vorzeichen gilt hier und im Folgenden stets bei Ausbreitung in positiver (negativer)  $z$ -Richtung.  $\beta$  ist die Phasenkonstante. Dual verwendet man den Ansatz

$$\vec{E}(x, y, z, t) = \operatorname{Re}(\vec{E}(x, y, z) e^{j\omega t}) = \operatorname{Re}(\vec{E}_0(x, y) e^{\mp j\beta z} e^{j\omega t}) \quad (2.8)$$

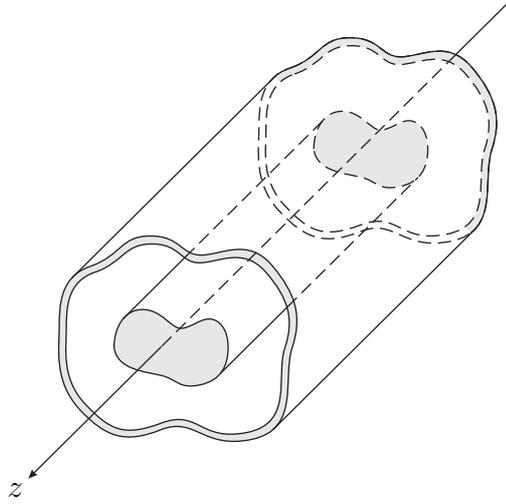


Abbildung 2.1.: Kurzes Stück eines zylindrischen Wellenleiters bestehend aus zwei Leitern, deren Querschnitt grau dargestellt ist

für die elektrische Feldstärke  $\vec{E}$ .

Eine genauere Betrachtung des Anwendens des Laplace-Operators (2.6) auf die magnetische Feldstärke  $\vec{H}$  einer sich auf einem zylindrischen Wellenleiter ausbreitenden elektromagnetischen Welle mit periodischer  $z$ -Abhängigkeit ergibt

$$\Delta \vec{H} = \Delta \left( \vec{H}_0 e^{\mp j\beta z} \right) = \left( \frac{\partial^2 \vec{H}_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{H}_0}{\partial y^2} - \beta^2 \vec{H}_0 \right) e^{\mp j\beta z}.$$

Man definiert den zweidimensionalen Laplace-Operator

$$\Delta_{xy} \vec{H}_0 = \frac{\partial^2 \vec{H}_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{H}_0}{\partial y^2}. \quad (2.9)$$

Dies in die Helmholtz-Gleichung (2.4) eingesetzt ergibt nach Wegkürzen von  $e^{\mp j\beta z}$  die zweidimensionale Helmholtz-Gleichung

$$\Delta_{xy} \vec{H}_0 + \underbrace{(\beta_0^2 - \beta^2)}_{\beta_c^2} \vec{H}_0 = \vec{0} \quad (2.10)$$

für die magnetische Feldstärke  $\vec{H}_0$  bei  $z = 0$ . Dual erhält man aus (2.5) die zweidimensionale Helmholtz-Gleichung

$$\Delta_{xy} \vec{E}_0 + \underbrace{(\beta_0^2 - \beta^2)}_{\beta_c^2} \vec{E}_0 = \vec{0} \quad (2.11)$$

für die elektrische Feldstärke  $\vec{E}_0$  bei  $z = 0$ .

Man findet zunächst elektromagnetische Felder  $\vec{H}_0$  und  $\vec{E}_0$  in der Querschnittsebene  $z = 0$  des zylindrischen Wellenleiters und zugehörige kritische Phasenkonstanten  $\beta_c$  mit

$$\beta_c^2 = \beta_0^2 - \beta^2 \quad (2.12)$$

als frequenzunabhängige Lösungen der zweidimensionalen Helmholtz-Gleichungen. Die kritische Phasenkonstante  $\beta_c$  hängt nur von der Geometrie des zylindrischen Wellenleiters, nicht aber von der Kreisfrequenz  $\omega$  ab. Mathematisch gesehen handelt es sich bei den zweidimensionalen Helmholtz-Gleichungen mit ihren durch die Geometrie des zylindrischen Wellenleiters gegebenen Randbedingungen um Eigenwertprobleme [Bla07]. Es gibt unendlich viele diskrete, aus Eigenwerten  $-\beta_c^2$  und zugehörigen Eigenfunktionen  $\vec{H}_0$  oder  $\vec{E}_0$  bestehende Lösungen. Diese die Feldstruktur beschreibenden Lösungen des Eigenwertproblems werden als Moden bezeichnet. Zu jedem Mode gibt es unendlich viele elektromagnetische Wellen, die sich in Amplitude, Phase und Ausbreitungsrichtung unterscheiden.

Falls sich die Längsachse des zylindrischen Wellenleiters in eine beliebige, durch den Einheitsvektor  $\vec{u}$  beschriebene Raumrichtung erstreckt, erhält man für die sich in diese Raumrichtung ausbreitende elektromagnetische Welle mit dem Phasenvektor

$$\vec{\beta} = \beta\vec{u} = \beta_x\vec{u}_x + \beta_y\vec{u}_y + \beta_z\vec{u}_z \quad (2.13)$$

und dem Ortsvektor

$$\vec{r} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$$

des Beobachtungsortes die Ansätze

$$\vec{H} = \text{Re}\left(\vec{H}_0 e^{-j\langle\vec{\beta},\vec{r}\rangle} e^{j\omega t}\right) = \text{Re}\left(\vec{H}_0 e^{-j\beta_x x} e^{-j\beta_y y} e^{-j\beta_z z} e^{j\omega t}\right) \quad (2.14)$$

und

$$\vec{E} = \text{Re}\left(\vec{E}_0 e^{-j\langle\vec{\beta},\vec{r}\rangle} e^{j\omega t}\right) = \text{Re}\left(\vec{E}_0 e^{-j\beta_x x} e^{-j\beta_y y} e^{-j\beta_z z} e^{j\omega t}\right). \quad (2.15)$$

$\vec{H}_0$  und  $\vec{E}_0$  dürfen hier nur von den zum Phasenvektor  $\vec{\beta}$  senkrechten Transversalkoordinaten abhängen.

### 2.2.2. Transversalkomponenten und Longitudinalkomponenten

Die Transversalkomponenten  $H_x$ ,  $H_y$ ,  $E_x$  und  $E_y$  der Feldstärken einer sich in positive (negative)  $z$ -Richtung ausbreitenden elektromagnetischen Welle kann man aus den Longitudinalkomponenten  $H_z$  und  $E_z$  der Feldstärken berechnen.

Für sich in positive (negative)  $z$ -Richtung ausbreitende elektromagnetische Wellen gemäß (2.7) lauten die ersten beiden Komponentengleichungen (1.18) und

(1.19) des Durchflutungsgesetzes im Dielektrikum  $\underline{J}_x = \underline{J}_y = 0$  unter Verwenden von (1.48):

$$\frac{\partial \underline{H}_z}{\partial y} \pm j\beta \underline{H}_y = j\omega\varepsilon \underline{E}_x, \quad (2.16)$$

$$\mp j\beta \underline{H}_x - \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial x} = j\omega\varepsilon \underline{E}_y. \quad (2.17)$$

Dual erhält durch Einsetzen von (2.8) in die ersten beiden Komponentengleichungen (1.26) und (1.27) des Induktionsgesetzes im Dielektrikum  $\underline{M}_x = \underline{M}_y = 0$  unter Verwenden von (1.52):

$$-\frac{\partial \underline{E}_z}{\partial y} \mp j\beta \underline{E}_y = j\omega\mu \underline{H}_x, \quad (2.18)$$

$$\pm j\beta \underline{E}_x + \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial x} = j\omega\mu \underline{H}_y. \quad (2.19)$$

Auflösen nach den Transversalkomponenten ergibt mit (2.3) und (2.12):

$$\underline{E}_x \beta_c^2 = \mp j\beta \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial x} - j\omega\mu \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial y}, \quad (2.20)$$

$$\underline{E}_y \beta_c^2 = \mp j\beta \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial y} + j\omega\mu \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial x}, \quad (2.21)$$

$$\underline{H}_x \beta_c^2 = \mp j\beta \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial x} + j\omega\varepsilon \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial y}, \quad (2.22)$$

$$\underline{H}_y \beta_c^2 = \mp j\beta \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial y} - j\omega\varepsilon \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial x}. \quad (2.23)$$

### 2.2.3. Transversalelektromagnetische Wellen

Transversalelektromagnetische Wellen (TEM-Wellen), die auch als Lecher-Wellen (L-Wellen) bezeichnet werden, sind elektromagnetische Wellen, deren Feldstärken keine Longitudinalkomponenten  $\underline{H}_z$  und  $\underline{E}_z$  haben. Für die kritische Phasenkonstante transversalelektromagnetischer Wellen muss  $\beta_c = 0$  gelten, siehe (2.20), (2.21), (2.22) und (2.23), wenn das elektromagnetische Feld nicht vollständig verschwinden soll. Mit (2.12) und (2.3) folgt die Phasenkonstante

$$\beta = \beta_0 = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}. \quad (2.24)$$

Weiterhin folgt aus (2.16) und (2.17) oder (2.18) und (2.19) für die Transversalkomponenten einer sich in positive (negative)  $z$ -Richtung ausbreitenden transversalelektromagnetischen Welle

$$\frac{\underline{E}_x}{\underline{H}_y} = -\frac{\underline{E}_y}{\underline{H}_x} = \pm \frac{\beta}{\omega\varepsilon} = \pm \frac{\omega\mu}{\beta}.$$

Man erhält den Feldwellenwiderstand

$$Z_F = \frac{\beta}{\omega \varepsilon} = \frac{\omega \mu}{\beta} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \quad (2.25)$$

transversalelektromagnetischer Wellen. Der Feldwellenwiderstand des Vakuums ergibt sich mit (1.50) und (1.54) zu

$$Z_{F0} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi\Omega = 377\Omega. \quad (2.26)$$

Der elektrische Feldstärkevektor  $\vec{E}$  und der magnetische Feldstärkevektor  $\vec{H}$  einer transversalelektromagnetischen Welle sind in Phase und stehen zu jedem Zeitpunkt senkrecht aufeinander:

$$\vec{E} = \pm Z_F \vec{H} \times \vec{u}_z, \quad (2.27)$$

$$\vec{H} = \mp \frac{\vec{E} \times \vec{u}_z}{Z_F}. \quad (2.28)$$

Mit (1.80) folgt der komplexe Poynting-Vektor

$$\begin{aligned} \vec{S} &= \frac{1}{2} (\underline{E}_x \underline{H}_y^* - \underline{E}_y \underline{H}_x^*) \vec{u}_z \\ &= \pm \frac{1}{2Z_F} (|\underline{E}_x|^2 + |\underline{E}_y|^2) \vec{u}_z = \pm \frac{1}{2Z_F} \|\vec{E}\|^2 \vec{u}_z \\ &= \pm \frac{1}{2} Z_F (|\underline{H}_y|^2 + |\underline{H}_x|^2) \vec{u}_z = \pm \frac{1}{2} Z_F \|\vec{H}\|^2 \vec{u}_z \end{aligned} \quad (2.29)$$

einer sich in positive (negative)  $z$ -Richtung ausbreitenden transversalelektromagnetischen Welle.  $\|\cdot\|$  bezeichnet die Norm des Vektors.<sup>1</sup> Der komplexe Poynting-Vektor  $\vec{S}$  einer transversalelektromagnetischen Welle ist reell, das heißt die transversalelektromagnetische Welle transportiert nur Wirkleistung.

**Aufgabe 2.3** Zeigen Sie, dass bei transversalelektromagnetischen Wellen die elektrische Energiedichte  $w_e$  und die magnetische Energiedichte  $w_m$  zu jedem Zeitpunkt gleich sind! Die Energiedichten selbst können dabei sehr wohl zeitabhängig oder ortsabhängig sein. Wie groß ist die Energiegeschwindigkeit

$$v_e = \frac{\|\vec{S}\|}{w_e + w_m} \quad (2.30)$$

*transversalelektromagnetischer Wellen?*

---

<sup>1</sup>Die Norm des Vektors  $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$  ist  $\|\vec{a}\| = \sqrt{|a_1|^2 + |a_2|^2 + |a_3|^2}$ .

### 2.2.4. Transversalelektrische Wellen

Transversalelektrische Wellen (TE-Wellen), die auch als H-Wellen bezeichnet werden, sind elektromagnetische Wellen, deren elektrische Feldstärke  $\vec{E}$  keine Longitudinalkomponente  $E_z$  hat. Die magnetische Feldstärke  $\vec{H}$  hat jedoch eine Longitudinalkomponente  $H_z$ . Für die kritische Phasenkonstante transversalelektrischer Wellen muss  $\beta_c \neq 0$  gelten, siehe (2.20), (2.21), (2.22) und (2.23), wenn die Longitudinalkomponente  $H_z$  der magnetischen Feldstärke  $\vec{H}$  nicht über die gesamte Querschnittsfläche konstant sein soll, was im Widerspruch zu den Randbedingungen stünde.

Im Folgenden wird gezeigt, dass  $\beta_c^2$  reell und nichtnegativ ist.<sup>2</sup> Sei  $A$  die mit dem Dielektrikum gefüllte Querschnittsebene des zylindrischen Wellenleiters. Der Rand  $\partial A$  der Querschnittsebene  $A$  entspricht den Leiteroberflächen.  $\vec{u}$  sei der Normaleneinheitsvektor dem Rand  $\partial A$  der Querschnittsebene  $A$ . Mit der zweidimensionalen Helmholtz-Gleichung (2.10), (2.9) und dem Gaußschen Satz in der Ebene (1.36) erhält man unter Berücksichtigen der Produktregel der Differentiation

$$\begin{aligned}
 \beta_c^2 \iint_A |H_{0z}|^2 dA &= \iint_A H_{0z}^* \beta_c^2 H_{0z} dA \\
 &= - \iint_A H_{0z}^* \Delta_{xy} H_{0z} dA \\
 &= - \iint_A H_{0z}^* \left( \frac{\partial^2 H_{0z}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_{0z}}{\partial y^2} \right) dA \\
 &= - \iint_A \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( H_{0z}^* \frac{\partial H_{0z}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( H_{0z}^* \frac{\partial H_{0z}}{\partial y} \right) \right) dA \\
 &\quad + \iint_A \left( \frac{\partial H_{0z}^*}{\partial x} \frac{\partial H_{0z}}{\partial x} + \frac{\partial H_{0z}^*}{\partial y} \frac{\partial H_{0z}}{\partial y} \right) dA \\
 &= - \oint_{\partial A} \left\langle H_{0z}^* \frac{\partial H_{0z}}{\partial x} \vec{u}_x + H_{0z}^* \frac{\partial H_{0z}}{\partial y} \vec{u}_y, \vec{u} \right\rangle ds \\
 &\quad + \iint_A \left( \left| \frac{\partial H_{0z}}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial H_{0z}}{\partial y} \right|^2 \right) dA.
 \end{aligned}$$

Die Differentiation der tangentialen  $z$ -Komponente  $H_{0z}$  der magnetischen Feldstärke  $\vec{H}$  an der Oberfläche des idealen elektrischen Leiters nach der Normalen-

<sup>2</sup>Der Laplace-Operator ist auf der Menge der die Randbedingungen erfüllenden Funktion selbstadjungiert. Seine Eigenwerte  $-\beta_c^2$  sind reell und nichtpositiv.

richtung ergibt Null, siehe (2.20), (2.21) und (1.67). Damit folgt

$$\begin{aligned}
 \oint_{\partial A} \langle \underline{H}_{0z}^* \frac{\partial \underline{H}_{0z}}{\partial x} \vec{u}_x + \underline{H}_{0z}^* \frac{\partial \underline{H}_{0z}}{\partial y} \vec{u}_y, \vec{u} \rangle ds &= \oint_{\partial A} \underline{H}_{0z}^* \langle \frac{\partial \underline{H}_{0z}}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial \underline{H}_{0z}}{\partial y} \vec{u}_y, \vec{u} \rangle ds \\
 &= j \frac{\beta_c^2}{\omega \mu} \oint_{\partial A} \underline{H}_{0z}^* \langle -\underline{E}_{0y} \vec{u}_x + \underline{E}_{0x} \vec{u}_y, \vec{u} \rangle ds \\
 &= j \frac{\beta_c^2}{\omega \mu} \oint_{\partial A} \underline{H}_{0z}^* \underbrace{(\underline{E}_{0x} \vec{u}_x + \underline{E}_{0y} \vec{u}_y)}_{= 0 \text{ auf } \partial A} \times \vec{u} ds \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Man erhält schließlich

$$\beta_c^2 = \frac{\iint_A \left( \left| \frac{\partial \underline{H}_{0z}}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial \underline{H}_{0z}}{\partial y} \right|^2 \right) dA}{\underbrace{\iint_A |\underline{H}_{0z}|^2 dA}_{\text{reell}}} \geq 0.$$

Zum Berechnen des Feldwellenwiderstands  $Z_{\text{FTE}}$  bildet man das Verhältnis aus (2.20) und (2.23) oder aus (2.21) und (2.22) und setzt  $\underline{E}_z = 0$  ein. Mit (2.12), (2.3) und (2.25) erhält man den Feldwellenwiderstand

$$Z_{\text{FTE}} = \pm \frac{\underline{E}_x}{\underline{H}_y} = \mp \frac{\underline{E}_y}{\underline{H}_x} = \frac{\omega \mu}{\beta} = \frac{\omega \mu}{\beta_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\beta_c}{\beta_0}\right)^2}} = \frac{Z_{\text{F}}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\beta_c}{\beta_0}\right)^2}} \quad (2.31)$$

transversalelektrischer Wellen, siehe auch (2.42). Zusammenfassend schreibt man

$$\vec{\underline{E}} = \pm Z_{\text{FTE}} \vec{\underline{H}} \times \vec{u}_z. \quad (2.32)$$

## 2.2.5. Transversalmagnetische Wellen

Transversalmagnetische Wellen (TM-Wellen), die auch als E-Wellen bezeichnet werden, sind elektromagnetische Wellen, deren magnetische Feldstärke  $\vec{\underline{H}}$  keine Longitudinalkomponente  $\underline{H}_z$  hat. Die elektrische Feldstärke  $\vec{\underline{E}}$  hat jedoch eine Longitudinalkomponente  $\underline{E}_z$ . Für die kritische Phasenkonstante transversalmagnetischer Wellen muss  $\beta_c \neq 0$  gelten, siehe (2.20), (2.21), (2.22) und (2.23), wenn die Longitudinalkomponente  $\underline{E}_z$  der elektrischen Feldstärke  $\vec{\underline{E}}$  nicht über die gesamte Querschnittsfläche konstant sein soll, was im Widerspruch zu den Randbedingungen stünde.

Die tangentielle  $z$ -Komponente  $\underline{E}_{0z}$  der elektrischen Feldstärke  $\vec{E}$  an der Oberfläche des idealen elektrischen Leiters ist Null, vergleiche (1.67). Damit folgt

$$\oint_{\partial A} \left\langle \underline{E}_{0z}^* \frac{\partial \underline{E}_{0z}}{\partial x} \vec{u}_x + \underline{E}_{0z}^* \frac{\partial \underline{E}_{0z}}{\partial y} \vec{u}_y, \vec{u} \right\rangle ds = \oint_{\partial A} \underbrace{\underline{E}_{0z}^*}_{=0 \text{ auf } \partial A} \left\langle \frac{\partial \underline{E}_{0z}}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial \underline{E}_{0z}}{\partial y} \vec{u}_y, \vec{u} \right\rangle ds = 0.$$

Mit einer im Übrigen formal zur Rechnung in Abschnitt 2.2.4 gleichartigen Rechnung ausgehend von der zweidimensionalen Helmholtz-Gleichung (2.11) kann man zeigen, dass  $\beta_c^2$  auch hier reell und nichtnegativ ist.

Zum Berechnen des Feldwellenwiderstands  $Z_{\text{FTM}}$  bildet man das Verhältnis aus (2.20) und (2.23) oder aus (2.21) und (2.22) und setzt  $\underline{H}_z = 0$  ein. Mit (2.12), (2.3) und (2.25) erhält man den Feldwellenwiderstand

$$Z_{\text{FTM}} = \pm \frac{\underline{E}_x}{\underline{H}_y} = \mp \frac{\underline{E}_y}{\underline{H}_x} = \frac{\beta}{\omega \varepsilon} = \frac{\beta_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\beta_c}{\beta_0}\right)^2}}{\omega \varepsilon} = Z_{\text{F}} \sqrt{1 - \left(\frac{\beta_c}{\beta_0}\right)^2} \quad (2.33)$$

transversalmagnetischer Wellen, siehe auch (2.42). Zusammenfassend schreibt man

$$\vec{H} = \mp \frac{\vec{E} \times \vec{u}_z}{Z_{\text{FTM}}}. \quad (2.34)$$

### 2.2.6. Phasenkonstante und Wellenlänge

Aus (2.12) ergibt sich mit (2.3) die Phasenkonstante

$$\beta = \sqrt{\beta_0^2 - \beta_c^2} = \sqrt{\omega^2 \varepsilon \mu - \beta_c^2}. \quad (2.35)$$

Die elektromagnetische Welle ist nur dann ausbreitungsfähig, das heißt die Phasenkonstante  $\beta$  ist nur dann reell, wenn die Kreisfrequenz  $\omega$  größer als die kritische Kreisfrequenz

$$\omega_c = 2\pi f_c = \frac{\beta_c}{\sqrt{\varepsilon \mu}} \quad (2.36)$$

ist. Anderenfalls entstünde ein aperiodisch abklingendes elektromagnetisches Feld. Für diesen Fall und verallgemeinernd für den Fall verlustbehafteter Dielektrika mit komplexer Permittivität  $\underline{\varepsilon}$  und komplexer Permeabilität  $\underline{\mu}$  ergibt sich eine komplexe Wellenzahl

$$\underline{k} = \beta - j\alpha = \sqrt{\omega^2 \underline{\varepsilon} \underline{\mu} - \beta_c^2}. \quad (2.37)$$

Der negative Imaginärteil  $\alpha$  der Wellenzahl  $\underline{k}$  wird als Dämpfungskonstante bezeichnet. Im Folgenden werden jedoch nur die für technische Anwendungen besonders interessanten ausbreitungsfähigen und ungedämpften elektromagnetischen Wellen mit reeller Wellenzahl  $\underline{k} = \beta$  weiter betrachtet.

Aus der Phasenkonstante  $\beta$  berechnet man die Wellenlänge

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{\sqrt{\beta_0^2 - \beta_c^2}}, \quad (2.38)$$

siehe (2.7), (2.8) und Abbildung 2.2. Es gibt elektromagnetische Wellen, deren kritische Phasenkonstante  $\beta_c$  Null ist, siehe Abschnitt 2.2.3. Die Wellenlänge  $\lambda$  einer derartigen elektromagnetischen Welle entspricht der sogenannten Freiraumwellenlänge

$$\lambda_0 = \frac{2\pi}{\beta_0}. \quad (2.39)$$

Hiermit folgt für die Wellenlänge

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\beta_c}{\beta_0}\right)^2}}. \quad (2.40)$$

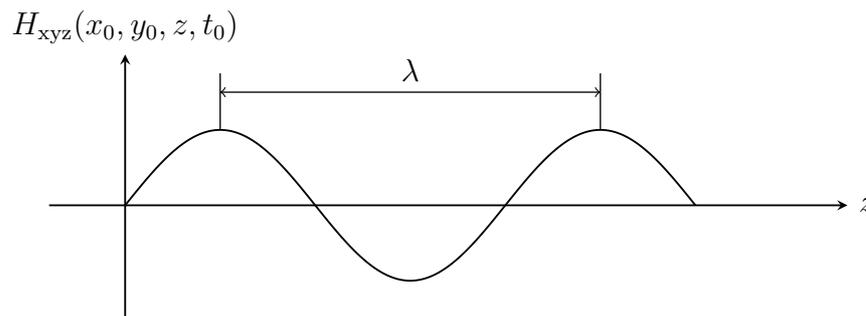


Abbildung 2.2.: Elektromagnetische Welle mit der Wellenlänge  $\lambda$

Man definiert weiterhin die kritische Wellenlänge

$$\lambda_c = \frac{2\pi}{\beta_c}. \quad (2.41)$$

Unter Verwenden von (2.3) folgt für den Term im Nenner von (2.40)

$$\sqrt{1 - \left(\frac{\beta_c}{\beta_0}\right)^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_c}\right)^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2}. \quad (2.42)$$

### 2.2.7. Phasengeschwindigkeit

Die Phasengeschwindigkeit ergibt sich mit der Strecke  $l$ , welche die Phasenfront in der Phasenlaufzeit  $t_p$  zurücklegt, zu

$$v_p = \frac{l}{t_p},$$

siehe Abbildung 2.3. An der Phasenfront einer sich in positive  $z$ -Richtung ausbreitenden elektromagnetischen Welle gilt

$$e^{-j\beta z + j\omega t} = e^{-j\beta(z+l) + j\omega(t+t_p)},$$

siehe (2.7) und (2.8). Es folgt die Phasengeschwindigkeit

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} \quad (2.43)$$

und mit (2.35) und (2.3) schließlich

$$v_p = \frac{\omega}{\beta_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\beta_c}{\beta_0}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu} \sqrt{1 - \left(\frac{\beta_c}{\beta_0}\right)^2}}.$$

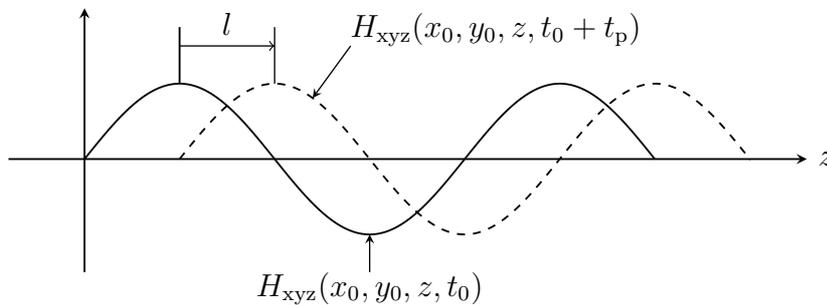


Abbildung 2.3.: Sich in positive  $z$ -Richtung ausbreitende elektromagnetische Welle

Die Phasengeschwindigkeit  $v_p$  einer sich in einem Dielektrikum mit frequenzunabhängigen Materialeigenschaften ausbreitenden elektromagnetischen Welle ist nur dann frequenzunabhängig, wenn die kritische Phasenkonstante  $\beta_c$  Null ist. Für derartige elektromagnetische Wellen entspricht die Phasengeschwindigkeit  $v_p$  der Lichtgeschwindigkeit

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}. \quad (2.44)$$

Mit (1.50) und (1.54) ergibt sich die Vakuumlichtgeschwindigkeit zu

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 3 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}. \quad (2.45)$$

Für die Phasengeschwindigkeit folgt

$$v_p = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\beta_c}{\beta_0}\right)^2}}, \quad (2.46)$$

siehe auch (2.42). Beim Annähern an die kritische Kreisfrequenz  $\omega_c$  wird die Phasengeschwindigkeit  $v_p$  unendlich groß, siehe Abbildung 2.5.

### 2.2.8. Gruppengeschwindigkeit

Es wird ein Wellenleiterstück der Länge  $l$  mit einer sich in positive  $z$ -Richtung ausbreitenden elektromagnetischen Welle betrachtet, siehe Abbildung 2.4. Aus nachrichtentechnischer Sicht ist insbesondere die aus der Impulsantwort einfach ablesbare Gruppenlaufzeit  $t_g$  der Nachrichten interessant. Die gesuchte Impulsantwort lässt sich prinzipiell aus der Übertragungsfunktion  $e^{-j\beta(\omega)l}$  durch inverse Fourier-Transformation berechnen, siehe (C.1). Man wird jedoch typischerweise aufgrund der komplizierten Frequenzabhängigkeit der Phasenkonstante  $\beta(\omega)$  keine analytische Lösung finden.

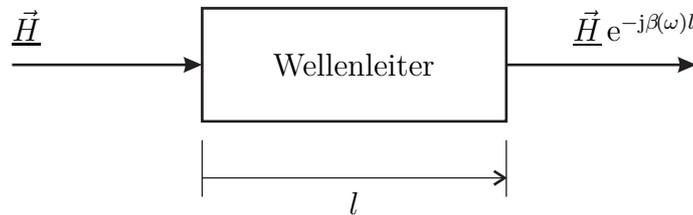


Abbildung 2.4.: Lineares zeitinvariantes System

Für schmalbandige Nachrichtensignale der mittleren Kreisfrequenz  $\omega_0$  kann man zum Vereinfachen des Problems die lineare Taylor-Approximation

$$\beta(\omega) \approx \beta(\omega_0) + \frac{\partial \beta}{\partial \omega} (\omega - \omega_0)$$

verwenden. Damit folgt für die Übertragungsfunktion

$$e^{-j\beta(\omega)l} \approx e^{-j\beta(\omega_0)l - j\frac{\partial \beta}{\partial \omega}(\omega - \omega_0)l} = \underbrace{e^{-j\beta(\omega_0)l + j\frac{\partial \beta}{\partial \omega}\omega_0 l}}_{\text{Phasenverschiebung}} e^{-j\frac{\partial \beta}{\partial \omega}\omega l}.$$

Durch inverse Fourier-Transformation (C.1) erhält man hieraus bis auf eine nicht weiter interessierende Phasenverschiebung die Impulsantwort

$$\mathcal{F}^{-1}\left(e^{-j\frac{\partial\beta}{\partial\omega}\omega l}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\frac{\partial\beta}{\partial\omega}\omega l} e^{j\omega t} d\omega = \delta\left(t - \frac{\partial\beta}{\partial\omega}l\right) = \delta(t - t_g).$$

$\delta(\cdot)$  ist der Dirac-Impuls. Es folgt die Gruppengeschwindigkeit

$$v_g = \frac{l}{t_g} = \frac{1}{\frac{\partial\beta}{\partial\omega}} = \frac{\partial\omega}{\partial\beta}. \quad (2.47)$$

Mit (2.35), (2.3) und (2.44) folgt für elektromagnetische Wellen bei frequenzunabhängigen Materialeigenschaften

$$v_g = \frac{1}{\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\sqrt{\omega^2\varepsilon\mu - \beta_c^2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \sqrt{1 - \left(\frac{\beta_c}{\beta_0}\right)^2} = c \sqrt{1 - \left(\frac{\beta_c}{\beta_0}\right)^2}, \quad (2.48)$$

siehe auch (2.42). Es gilt

$$v_p v_g = c^2, \quad (2.49)$$

siehe (2.46). Beim Annähern an die kritische Kreisfrequenz  $\omega_c$  wird die Gruppengeschwindigkeit  $v_g$  Null, siehe Abbildung 2.5.

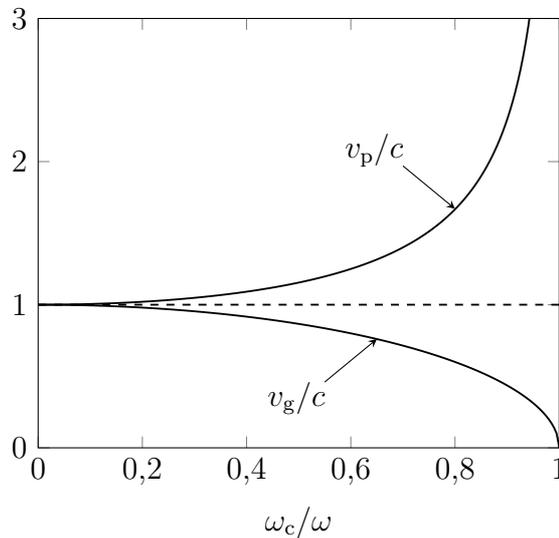


Abbildung 2.5.: Phasengeschwindigkeit  $v_p$  und Gruppengeschwindigkeit  $v_g$

Die Gruppengeschwindigkeit  $v_g$  ist frequenzunabhängig, falls die Phasenkonstante  $\beta$  proportional zur Kreisfrequenz  $\omega$  ist, siehe Abbildung 2.6. Dies ist bei

einer sich in einem Dielektrikum mit frequenzunabhängigen Materialeigenschaften ausbreitenden elektromagnetischen Welle der Fall, wenn die kritische Phasenkonstante  $\beta_c$  Null ist. Dann sind Phasengeschwindigkeit  $v_p$  und Gruppengeschwindigkeit  $v_g$  gleich der Lichtgeschwindigkeit  $c$ . Man bezeichnet die elektromagnetische Welle als dispersionsfrei. Dispersionen resultieren aus einer nichtlinearen Frequenzabhängigkeit der Phasenkonstante  $\beta$ . Dispersionen sind meistens unerwünscht, da die frequenzabhängige Gruppengeschwindigkeit  $v_g$  zu Verzerrungen bei der Signalübertragung führt. Man unterscheidet im Allgemeinen

**Wellenleiterdispersionen**, die aus der charakteristischen nichtlinearen Frequenzabhängigkeit (2.35) der Phasenkonstante  $\beta$  bei elektromagnetischen Wellen mit einer kritischen Phasenkonstante  $\beta_c$  größer Null resultieren und

**Materialdispersionen**, die aus einer nichtlinearen Frequenzabhängigkeit der Phasenkonstante  $\beta$  infolge frequenzabhängiger Materialeigenschaften resultieren.

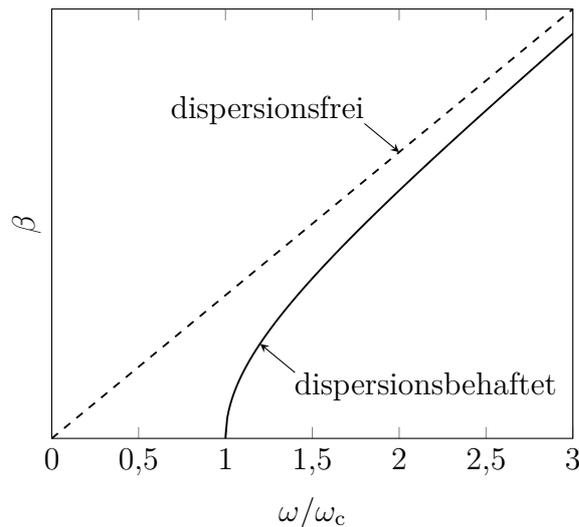


Abbildung 2.6.: Dispersionsdiagramm

**Aufgabe 2.4** Zeigen Sie, dass sich die Gruppengeschwindigkeit mittels

$$v_g = \frac{v_p}{1 - \frac{\omega}{v_p} \frac{\partial v_p}{\partial \omega}}$$

aus der Phasengeschwindigkeit  $v_p$  berechnen lässt!

## 2.3. Ebene homogene Welle im freien Raum

Die ebene homogene Welle stellt die einfachste Lösung der Helmholtz-Gleichungen dar. Eine ebene Welle ist dadurch charakterisiert, dass die Phasenfronten, das heißt die Orte gleicher Phasen, Ebenen im Raum sind. Von einer ebenen homogenen Welle fordert man zusätzlich, dass diese Ebenen konstanter Phase auch Orte konstanter Amplitude sind. Der freie Raum entspricht einem zylindrischen Wellenleiter mit unendlichem Querschnitt. Bei einer ebenen homogenen, sich in positive (negative)  $z$ -Richtung ausbreitenden elektromagnetischen Welle gelten folglich

$$\vec{H}(x, y, z) = \vec{H}_0 e^{\mp j\beta z} \quad (2.50)$$

und

$$\vec{E}(x, y, z) = \vec{E}_0 e^{\mp j\beta z}, \quad (2.51)$$

vergleiche (2.7) und (2.8).

Da die Feldstärken einer sich in  $z$ -Richtung ausbreitenden ebenen homogenen Welle nicht von den Transversalkoordinaten  $x$  und  $y$  abhängen, folgt aus der  $z$ -Komponente (1.20) des Durchflutungsgesetzes im Dielektrikum  $\underline{J}_z = 0$  unter Verwenden von (1.48)

$$\underline{E}_z = \frac{1}{j\omega\varepsilon} \left( \frac{\partial \underline{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial \underline{H}_x}{\partial y} \right) = 0.$$

Dual folgt aus der  $z$ -Komponente (1.28) des Induktionsgesetzes im Dielektrikum  $\underline{M}_z = 0$  unter Verwenden von (1.52)

$$\underline{H}_z = \frac{1}{j\omega\mu} \left( -\frac{\partial \underline{E}_y}{\partial x} + \frac{\partial \underline{E}_x}{\partial y} \right) = 0.$$

Die ebene homogene Welle ist also eine transversalelektromagnetische Welle. Man kann beispielsweise die konstanten, von den Transversalkoordinaten  $x$  und  $y$  unabhängigen Transversalkomponenten  $\underline{E}_{0x}$  und  $\underline{E}_{0y}$  der elektrischen Feldstärke  $\vec{E}_0$  für  $z = 0$  oder alternativ die Transversalkomponenten  $\underline{H}_{0x}$  und  $\underline{H}_{0y}$  der magnetischen Feldstärke  $\vec{H}_0$  für  $z = 0$  beliebig vorgeben. Wie man leicht durch Einsetzen überprüft, erfüllt dieser Ansatz unter Berücksichtigen von  $\beta_c = 0$  die zweidimensionalen Helmholtz-Gleichungen (2.10) und (2.11). Wie bei allen transversalelektromagnetischen Wellen sind die elektrische Feldstärke  $\vec{E}$  und die magnetische Feldstärke  $\vec{H}$  über den Feldwellenwiderstand  $Z_F$  miteinander verknüpft, siehe (2.27) und (2.28). Des Weiteren gelten natürlich alle allgemeinen Eigenschaften transversalelektromagnetischer Wellen auch hier, siehe Abschnitt 2.2.3.

Die Betrachtung der zeitabhängigen räumlichen Ausrichtung des elektrischen Feldstärkevektors  $\vec{E}$  einer sich in positive  $z$ -Richtung ausbreitenden ebenen homogenen Welle führt zum Begriff der Polarisation. Willkürlich wird die Ebene  $z = 0$  betrachtet. Der Polarisationszustand ist durch den Jones-Vektor

$$\underline{\mathbf{E}} = \begin{pmatrix} \underline{E}_{0x} \\ \underline{E}_{0y} \end{pmatrix} \quad (2.52)$$

vollständig beschrieben [Jon41]. Für den Momentanwert der elektrischen Feldstärke gilt mit (1.2)<sup>3</sup>

$$E_{0x} = \operatorname{Re}(\underline{E}_{0x} e^{j\omega t}) = \operatorname{Re}(\underline{E}_{0x}) \cos(\omega t) - \operatorname{Im}(\underline{E}_{0x}) \sin(\omega t)$$

und

$$E_{0y} = \operatorname{Re}(\underline{E}_{0y} e^{j\omega t}) = \operatorname{Re}(\underline{E}_{0y}) \cos(\omega t) - \operatorname{Im}(\underline{E}_{0y}) \sin(\omega t).$$

Die Spitze des elektrischen Feldstärkevektors  $\vec{E}_0$  durchläuft mit fortschreitender Zeit eine Ellipse in der  $x$ - $y$ -Ebene, siehe Abbildung 2.7.

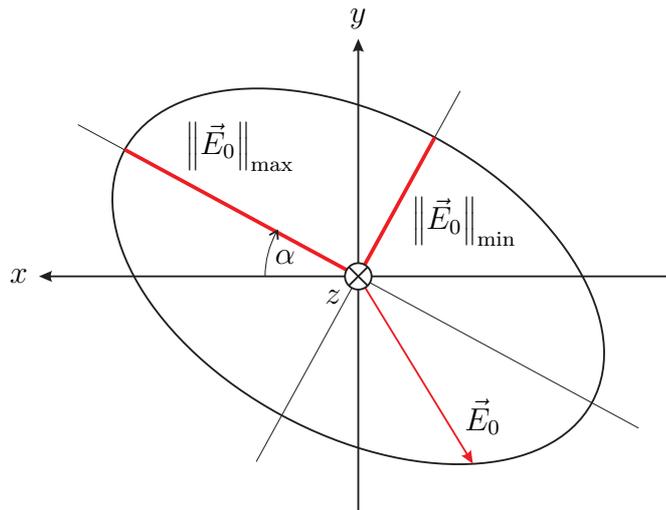


Abbildung 2.7.: Polarisationsellipse

Den Drehsinn definiert man bezüglich der Blickrichtung in Ausbreitungsrichtung der ebenen homogenen Welle. Diese Blickrichtung ist willkürlich aber in der Hochfrequenztechnik üblich. In der Optik wählt man die Blickrichtung beispielsweise genau umgekehrt, so dass sich der Drehsinn umkehrt. Folgende durch ihren Jones-Vektor beschriebene markante Polarisationszustände sind von besonderem Interesse:

---

<sup>3</sup>Es wird die Eulersche Formel  $e^{j\alpha} = \cos(\alpha) + j \sin(\alpha)$  verwendet.

**linear in  $x$ -Richtung polarisiert:**  $\underline{\mathbf{E}} = E_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

**linear in  $y$ -Richtung polarisiert:**  $\underline{\mathbf{E}} = E_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

**zirkular rechtsdrehend polarisiert:**  $E_{0x}$  eilt  $E_{0y}$  vor,  $\underline{\mathbf{E}} = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -j \end{pmatrix}$

**zirkular linksdrehend polarisiert:**  $E_{0y}$  eilt  $E_{0x}$  vor,  $\underline{\mathbf{E}} = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -j \\ 1 \end{pmatrix}$

Bei linearer Polarisation entartet die Polarisationsellipse zu einer Linie und bei zirkularer Polarisation ist die Polarisationsellipse ein Kreis.

Jede beliebig polarisierte ebene homogene Welle kann man eineindeutig als gewichtete Überlagerung zweier orthogonal polarisierter Basiswellen darstellen. Als derartige Polarisationsbasen kommen beispielsweise linear horizontal und linear vertikal oder zirkular rechtsdrehend und zirkular linksdrehend polarisierte ebene homogene Wellen in Frage. Dies wird in Richtfunkssystemen und Satellitenkommunikationssystemen ausgenutzt, um unter Verwenden der beiden orthogonal polarisierten Basiswellen unabhängige Informationen zu übertragen.

**Aufgabe 2.5** *Eine ebene homogene Welle mit dem Jones-Vektor*

$$\underline{\mathbf{E}} = \begin{pmatrix} 1 + j0,5 \\ 1 - j0,5 \end{pmatrix} \text{V m}^{-1}$$

*breite sich in positive  $z$ -Richtung aus. Zeichnen Sie die Polarisationsellipse!*



## Kapitel 3.

# Wellenleiter

### 3.1. Hohlleiter

#### 3.1.1. Aufbau von Hohlleitern

Hohlleiter, wie der in Abbildung 3.1 gezeigte Rechteckhohlleiter, sind mit einem homogenen Dielektrikum, wie zum Beispiel Luft, gefüllte rohrförmige Wellenleiter konstanten Querschnitts aus näherungsweise ideal elektrisch leitendem Material. Es handelt sich um Einleitersysteme.



Abbildung 3.1.: Rechteckhohlleiter WR 137 mit Verbindungsflansch CMR 137. Breite  $a = 34,85$  mm und Höhe  $b = 15,80$  mm. Frequenzbereich 5,85 GHz – 8,20 GHz

Im Folgenden werden nur die mathematisch einfach zu handhabenden Rechteckhohlleiter betrachtet. Dies ist keine wesentliche Einschränkung, da auch bei Hohlleitern anderen Querschnitts wie Rundhohlleitern keine fundamental andersartigen Effekte auftreten. Abbildung 3.2 zeigt das verwendete Koordinatensystem.

Die Längsachse des Hohlleiters, in deren Richtung sich die elektromagnetische Welle ausbreitet, entspricht der  $z$ -Richtung. Die Breite des Hohlleiters wird mit  $a$ , die Höhe mit  $b$  bezeichnet. Das Koordinatensystem wird Im Folgenden so gewählt, dass  $a > b$  gilt.

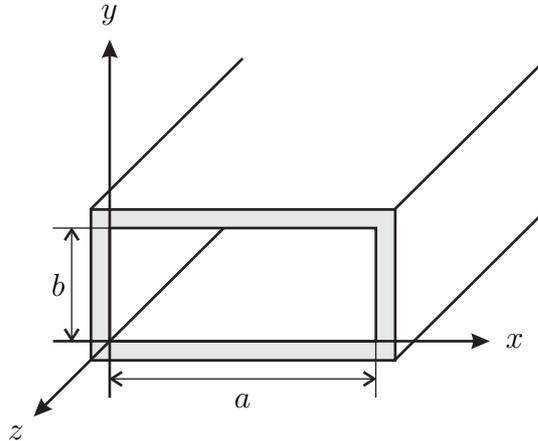


Abbildung 3.2.: Rechteckhohlleiter

### 3.1.2. Transversalelektrische Wellen in Hohlleitern

Zunächst werden transversalelektrische Wellen, das heißt elektromagnetische Wellen, deren elektrische Feldstärke  $\underline{\vec{E}}$  keine Longitudinalkomponente  $\underline{E}_z$  hat, untersucht. Abbildung 3.3 zeigt ein Beispiel einer transversalelektrischen Welle. Es wird eine die  $z$ -Komponente der Helmholtz-Gleichung (2.4) und die Randbedingungen

$$\frac{\partial \underline{H}_z}{\partial x} = -j \frac{\beta_c^2}{\omega \mu} \underline{E}_y = 0 \quad \text{für } x = 0 \text{ und } x = a$$

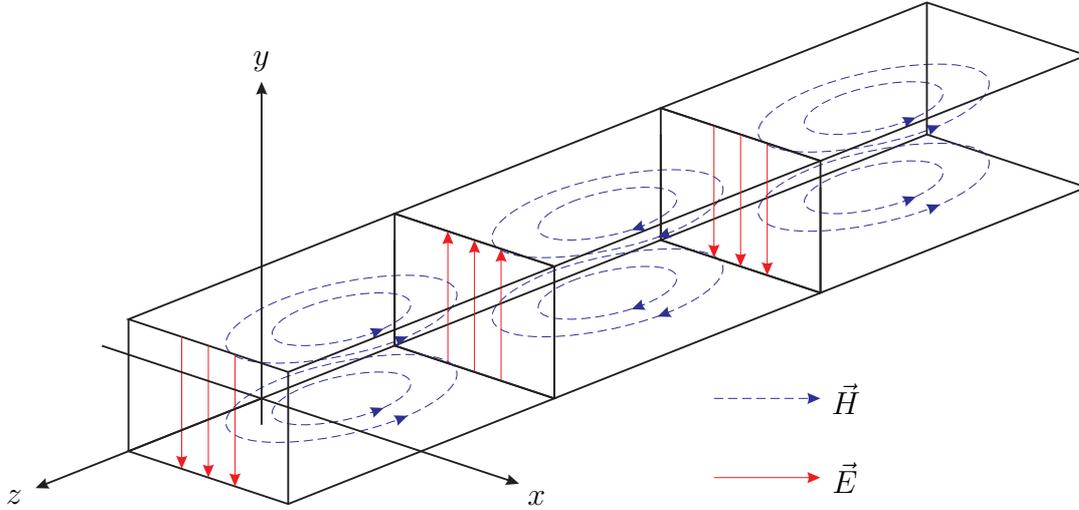
und

$$\frac{\partial \underline{H}_z}{\partial y} = j \frac{\beta_c^2}{\omega \mu} \underline{E}_x = 0 \quad \text{für } y = 0 \text{ und } y = b,$$

siehe (2.20), (2.21) und (1.67), erfüllende Longitudinalkomponente  $\underline{H}_z$  der magnetischen Feldstärke  $\underline{\vec{H}}$  gesucht.

Es wird der Ansatz

$$\underline{H}_z = \underbrace{\underline{H}_0 \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right)}_{\underline{H}_{0z}} e^{\mp j\beta z} \quad (3.1)$$

Abbildung 3.3.: Sich in positive  $z$ -Richtung ausbreitende  $TE_{1,0}$ -Welle

für die Longitudinalkomponente der magnetischen Feldstärke  $\underline{H}$  verwendet, der die Randbedingungen erfüllt, falls  $m$  und  $n$  ganzzahlig sind. Die zu den ganzzahligen Parametern  $m$  und  $n$  gehörenden transversalelektrischen Wellen bezeichnet man als  $TE_{m,n}$ -Wellen.  $m$  oder  $n$  muss von Null verschieden sein. Einsetzen der Longitudinalkomponente  $\underline{H}_{0z}$  der magnetischen Feldstärke  $\underline{H}_0$  bei  $z = 0$  in die  $z$ -Komponente der zweidimensionalen Helmholtz-Gleichung (2.10) ergibt mit (2.9)

$$\begin{aligned}
 0 = & -\underline{H}_0 \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \\
 & -\underline{H}_0 \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \\
 & + \beta_c^2 \underline{H}_0 \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right).
 \end{aligned}$$

Die kritische Phasenkonstante ergibt sich zu

$$\beta_c = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}. \quad (3.2)$$

Die Transversalkomponenten der Feldstärken einer sich in positive (negative)  $z$ -Richtung ausbreitenden transversalelektrischen Welle berechnet man mit (2.20), (2.21), (2.22) und (2.23) aus den Longitudinalkomponenten  $\underline{H}_z$  und  $\underline{E}_z = 0$  der

Feldstärken:

$$\underline{E}_x = -j \frac{\omega \mu}{\beta_c^2} \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial y} = j \frac{\omega \mu \underline{H}_0}{\beta_c^2} \frac{n\pi}{b} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{\mp j\beta z}, \quad (3.3)$$

$$\underline{E}_y = j \frac{\omega \mu}{\beta_c^2} \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial x} = -j \frac{\omega \mu \underline{H}_0}{\beta_c^2} \frac{m\pi}{a} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{\mp j\beta z}, \quad (3.4)$$

$$\underline{H}_x = \mp j \frac{\beta}{\beta_c^2} \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial x} = \pm j \frac{\beta \underline{H}_0}{\beta_c^2} \frac{m\pi}{a} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{\mp j\beta z}, \quad (3.5)$$

$$\underline{H}_y = \mp j \frac{\beta}{\beta_c^2} \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial y} = \pm j \frac{\beta \underline{H}_0}{\beta_c^2} \frac{n\pi}{b} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{\mp j\beta z}. \quad (3.6)$$

Im Allgemeinen ist nur das elektrische Feld transversalelektrischer Wellen übersichtlich darstellbar, da es hier ausreicht, die elektrische Feldstärke in einer Querschnittsebene zweidimensional darzustellen, siehe Abbildung 3.4.

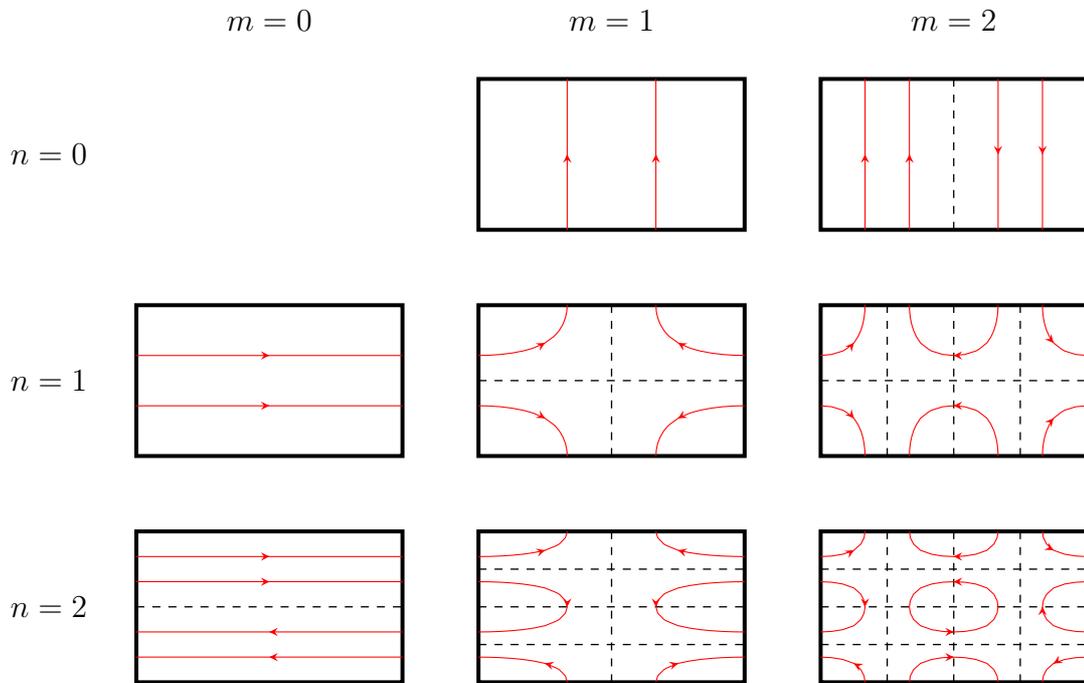


Abbildung 3.4.: Elektrische Felder transversalelektrischer Wellen

**Aufgabe 3.1** Berechnen Sie die kritischen Kreisfrequenzen  $\omega_{c,m,n}$  der  $\text{TE}_{m,n}$ -Wellen eines luftgefüllten Hohlleiters der Breite  $a = 50 \text{ mm}$  und der Höhe  $b = 30 \text{ mm}$  für  $m, n \leq 2$ ! Berechnen Sie weiterhin für eine sich auf diesem Hohlleiter ausbreitende transversalelektrische Welle der Kreisfrequenz  $\omega = 2 \cdot 10^{10} \text{ s}^{-1}$  die Phasengeschwindigkeit  $v_p$ , die Gruppengeschwindigkeit  $v_g$  und die Wellenlänge  $\lambda$ !

**Aufgabe 3.2** Berechnen Sie auf den Hohlleiterwänden jeweils die elektrische Flächenladungsdichte  $\underline{\rho}_{\text{eF}}$  aus der elektrischen Feldstärke  $\underline{\vec{E}}$  und die elektrische Flächenstromdichte  $\underline{\vec{J}}_{\text{F}}$  aus der magnetischen Feldstärke  $\underline{\vec{H}}$ , wenn sich im Hohlleiter eine  $\text{TE}_{m,n}$ -Welle ausbreitet! Überprüfen Sie Ihr Ergebnis mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung (1.42)!

### 3.1.3. Transversalmagnetische Wellen in Hohlleitern

Nun werden transversalmagnetische Wellen, das heißt elektromagnetische Wellen, deren magnetische Feldstärke  $\underline{\vec{H}}$  keine Longitudinalkomponente  $\underline{H}_z$  hat, untersucht. Hier wählt man den Ansatz

$$\underline{E}_z = \underbrace{\underline{E}_0 \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)}_{\underline{E}_{0z}} e^{\mp j\beta z} \quad (3.7)$$

für die Longitudinalkomponente der elektrischen Feldstärke  $\underline{\vec{E}}$ . Der Ansatz erfüllt die Randbedingungen

$$\underline{E}_z = 0 \quad \text{für } x = 0 \text{ und } x = a$$

und

$$\underline{E}_z = 0 \quad \text{für } y = 0 \text{ und } y = b,$$

vergleiche (1.67), falls  $m$  und  $n$  ganzzahlig sind. Die zu den ganzzahligen Parametern  $m$  und  $n$  gehörenden transversalmagnetischen Wellen bezeichnet man als  $\text{TM}_{m,n}$ -Wellen. Im Gegensatz zu transversalelektrischen Wellen, bei denen nur  $m$  oder  $n$  von Null verschieden sein muss, müssen bei transversalmagnetischen Wellen  $m$  und  $n$  von Null verschieden sein. Einsetzen der Longitudinalkomponente  $\underline{E}_{0z}$  der elektrischen Feldstärke  $\underline{\vec{E}}_0$  bei  $z = 0$  in die  $z$ -Komponente der zweidimensionalen Helmholtz-Gleichung (2.11) ergibt mit (2.9)

$$\begin{aligned} 0 = & -\underline{E}_0 \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \\ & - \underline{E}_0 \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \\ & + \beta_c^2 \underline{E}_0 \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right). \end{aligned}$$

Die kritische Phasenkonstante ergibt sich wie bei den transversalelektrischen Wellen, siehe (3.2), zu

$$\beta_c = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}. \quad (3.8)$$

Die Transversalkomponenten der Feldstärken einer sich in positive (negative)  $z$ -Richtung ausbreitenden transversalmagnetischen Welle berechnet man mit (2.20), (2.21), (2.22) und (2.23) aus den Longitudinalkomponenten  $\underline{E}_z$  und  $\underline{H}_z = 0$  der Feldstärken:

$$\underline{E}_x = \mp j \frac{\beta}{\beta_c^2} \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial x} = \mp j \frac{\beta \underline{E}_0}{\beta_c^2} \frac{m\pi}{a} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{\mp j\beta z}, \quad (3.9)$$

$$\underline{E}_y = \mp j \frac{\beta}{\beta_c^2} \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial y} = \mp j \frac{\beta \underline{E}_0}{\beta_c^2} \frac{n\pi}{b} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{\mp j\beta z}, \quad (3.10)$$

$$\underline{H}_x = j \frac{\omega \varepsilon}{\beta_c^2} \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial y} = j \frac{\omega \varepsilon \underline{E}_0}{\beta_c^2} \frac{n\pi}{b} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{\mp j\beta z}, \quad (3.11)$$

$$\underline{H}_y = -j \frac{\omega \varepsilon}{\beta_c^2} \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial x} = -j \frac{\omega \varepsilon \underline{E}_0}{\beta_c^2} \frac{m\pi}{a} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{\mp j\beta z}. \quad (3.12)$$

Im Allgemeinen ist nur das magnetische Feld transversalmagnetischer Wellen übersichtlich darstellbar, da es hier ausreicht, die magnetische Feldstärke in einer Querschnittsebene zweidimensional darzustellen, siehe Abbildung 3.5.

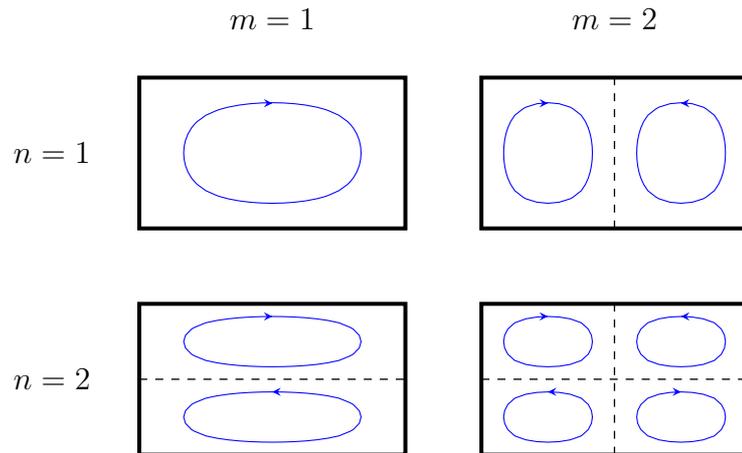


Abbildung 3.5.: Magnetische Felder transversalmagnetischer Wellen

## 3.2. Zweileitersysteme

### 3.2.1. Aufbau von Zweileitersystemen

Im Folgenden werden Zweileitersysteme mit konstantem Querschnitt und homogenem Dielektrikum betrachtet. Das Koordinatensystem wird so gewählt, dass

die der Ausbreitungsrichtung entsprechende Längsachse des Zweileitersystems der  $z$ -Achse entspricht, siehe Abbildung 3.6. Im Folgenden werden transversalelektromagnetische Wellen näher untersucht. Bei höheren Kreisfrequenzen sind aber möglicherweise auch andere Moden ausbreitungsfähig.

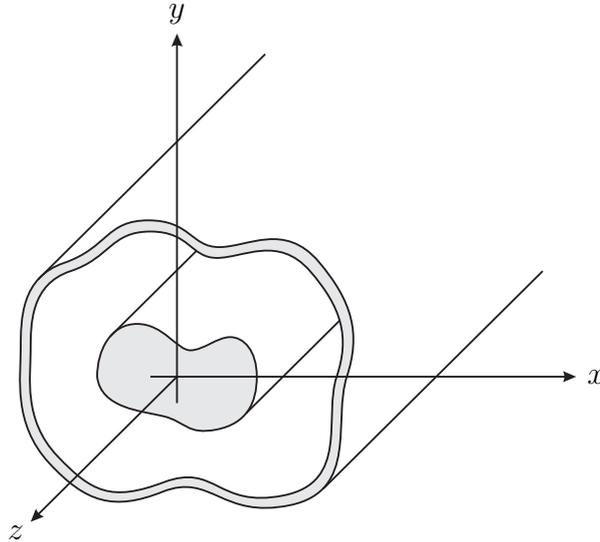


Abbildung 3.6.: Koaxiales Zweileitersystem

## 3.2.2. Transversalelektromagnetische Wellen auf Zweileitersystemen

### 3.2.2.1. Feldstärken

Es wird der Ansatz

$$\vec{E} = \underbrace{-U_0 \text{grad}(\phi)}_{\vec{E}_0} e^{\mp j\beta z} \quad (3.13)$$

für die elektrische Feldstärke einer sich in positive (negative)  $z$ -Richtung ausbreitenden transversalelektromagnetischen Welle verwendet.  $\phi$  ist das auf die Spannung zwischen den Leitern normierte elektrostatische Potential. Da die Tangentialkomponenten des elektrostatischen Feldes an den Leiteroberflächen Null sind, erfüllt der Ansatz die (1.67) entsprechenden Randbedingungen.

Das elektrostatische Feld ist wirbelfrei, siehe (3.14). Im ladungsfreien Dielektrikum  $\rho_e = 0$  ist das elektrostatische Feld zudem gemäß (1.35) und (1.48) auch quellenfrei, das heißt es ist Lösung der Laplace-Gleichung

$$\text{div}(\text{grad}(\phi)) = \Delta\phi = 0.$$

Einsetzen der elektrischen Feldstärke  $\vec{E}_0$  bei  $z = 0$  in die zweidimensionale Helmholtz-Gleichung (2.11) ergibt mit (2.2), (2.6) und (2.9)

$$\begin{aligned}\vec{0} &= -\underline{U}_0 \Delta_{xy} (\text{grad}(\phi)) - \underline{U}_0 \beta_c^2 \text{grad}(\phi) \\ &= -\underline{U}_0 \Delta (\text{grad}(\phi)) - \underline{U}_0 \beta_c^2 \text{grad}(\phi) \\ &= -\underline{U}_0 \text{grad}(\text{div}(\text{grad}(\phi))) + \underline{U}_0 \text{rot}(\text{rot}(\text{grad}(\phi))) - \underline{U}_0 \beta_c^2 \text{grad}(\phi) \\ &= -\underline{U}_0 \beta_c^2 \text{grad}(\phi).\end{aligned}$$

Der Ansatz ist folglich eine Lösung der zweidimensionalen Helmholtz-Gleichung, falls für die kritische Phasenkonstante  $\beta_c = 0$  gilt. Die so gefundene elektrische Feldstärke  $\vec{E}$  hat keine Longitudinalkomponente  $\vec{E}_z$ . Mit Hilfe der  $z$ -Komponente (1.28) des Induktionsgesetzes, (1.52) und (2.1) findet man, dass auch die Longitudinalkomponente

$$\underline{H}_z = -j\underline{U}_0 \frac{1}{\omega\mu} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} \right) e^{\mp j\beta z} = 0$$

der magnetischen Feldstärke  $\vec{H}$  verschwindet. Es handelt sich folglich um eine transversalelektromagnetische Welle. Es gelten die allgemeinen Eigenschaften transversalelektromagnetischer Wellen, siehe Abschnitt 2.2.3.

In einem Hohlleiter, das heißt einen Einleitersystem, kann keine derartige transversalelektromagnetische Welle existieren. Das elektrostatische Potential  $\phi$  muss auf der gesamten leitenden Berandung des Einleitersystems konstant sein und somit ist das elektrostatische Potential  $\phi$  auf einem Einleitersystem insgesamt konstant. Die elektrische Feldstärke  $\vec{E}$  ist dann Null.

**Aufgabe 3.3** Zeigen Sie unter Verwenden kartesischer Koordinaten, dass für alle Skalarfelder  $\phi$

$$\text{rot}(\text{grad}(\phi)) = \vec{0} \tag{3.14}$$

*gilt!*

**Aufgabe 3.4** Zeigen Sie, dass für den skalaren Laplace-Operator in kartesischen Koordinaten

$$\Delta\phi = \text{div}(\text{grad}(\phi)) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \tag{3.15}$$

*gilt!*

### 3.2.2.2. Spannung

Für eine in der Querschnittsebene im Dielektrikum mit verschwindender magnetischer Stromdichte  $\vec{M}$  liegende Fläche  $A$  folgt mit  $\underline{H}_z = 0$  aus dem Induktionsgesetz (1.23) und (1.52)

$$-\oint_{\partial A} \langle \vec{E}, d\vec{r} \rangle = j\omega\mu \iint_A \langle \vec{H}, d\vec{A} \rangle = j\omega\mu \iint_A \underline{H}_z dA = 0.$$

Die elektrische Feldstärke  $\vec{E}$  ist bei transversalelektromagnetischen Wellen in der Querschnittsebene wirbelfrei. Man kann daher in einer Querschnittsebene eine Spannung  $\underline{U}$  zwischen den beiden Leitern definieren, die vom Integrationsweg unabhängig ist. In einer Querschnittsebene gilt unter Verwenden von (3.13) mit einem beliebigen Integrationsweg zwischen den Leitern

$$\underline{U} = \int_r \langle \vec{E}, d\vec{r} \rangle = e^{\mp j\beta z} \underbrace{\int_r \langle \vec{E}_0, d\vec{r} \rangle}_{\underline{U}_0}, \quad (3.16)$$

siehe Abbildung 3.7. Für eine sich in positive (negative)  $z$ -Richtung ausbreitende transversalelektromagnetische Welle gilt daher

$$\underline{U} = \underline{U}_0 e^{\mp j\beta z}. \quad (3.17)$$

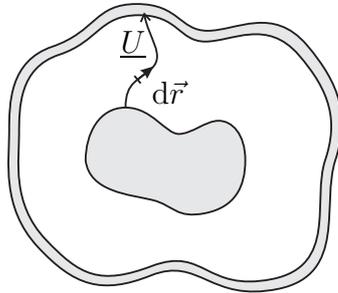


Abbildung 3.7.: Zur Definition der Spannung  $\underline{U}$

### 3.2.2.3. Strom

Für eine in der Querschnittsebene im Dielektrikum mit verschwindender elektrischer Stromdichte  $\vec{J}$  liegende, das heißt keinen Leiter beinhaltende, Fläche  $A$  folgt mit  $\underline{E}_z = 0$  aus dem Durchflutungsgesetz (1.12) unter Verwenden von (1.48)

$$\oint_{\partial A} \langle \vec{H}, d\vec{s} \rangle = j\omega\varepsilon \iint_A \langle \vec{E}, d\vec{A} \rangle = j\omega\varepsilon \iint_A \underline{E}_z dA = 0.$$

Die magnetische Feldstärke  $\vec{H}$  ist bei transversalelektromagnetischen Wellen in der Querschnittsebene innerhalb des Dielektrikums wirbelfrei. Man kann daher in einer Querschnittsebene einen Strom  $\underline{I}$  durch einen der Leiter definieren, der vom Integrationsweg unabhängig ist. In der Querschnittsebene gilt mit einem beliebigen Integrationsweg um einen der Leiter herum

$$\underline{I} = \oint_s \langle \vec{H}, d\vec{s} \rangle = e^{\mp j\beta z} \underbrace{\oint_s \langle \vec{H}_0, d\vec{s} \rangle}_{I_0}. \quad (3.18)$$

$d\vec{r}$ ,  $d\vec{s}$  und die positive  $z$ -Richtung sollen hierbei ein Rechtssystem bilden, siehe Abbildung 3.7 und Abbildung 3.8. Für eine sich in positive (negative)  $z$ -Richtung ausbreitende transversalelektromagnetische Welle gilt

$$\underline{I} = I_0 e^{\mp j\beta z}. \quad (3.19)$$

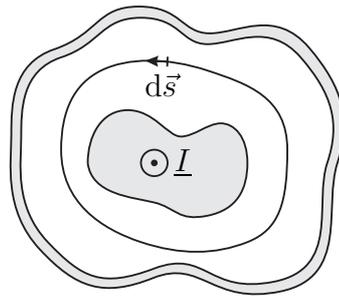


Abbildung 3.8.: Zur Definition des Stroms  $\underline{I}$

### 3.2.2.4. Wellenwiderstand

Das Verhältnis aus Spannung  $\underline{U}$  und Strom  $\underline{I}$  ist eine vom Ort  $z$  unabhängige, als Wellenwiderstand  $Z_L$  bezeichnete und für das Zweileitersystem charakteristische Konstante. Für eine sich in positive (negative)  $z$ -Richtung ausbreitende transversalelektromagnetische Welle gilt

$$\frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{U_0}{I_0} = \pm Z_L, \quad (3.20)$$

siehe (3.17) und (3.19). Wegen der aus der Proportionalität der Feldstärken einer transversalelektromagnetischen Welle, siehe (2.27) und (2.28), folgenden Gleichphasigkeit (Gegenphasigkeit) von Spannung  $\underline{U}$  und Strom  $\underline{I}$  ist der Wellenwiderstand  $Z_L$  reell und positiv.

### 3.2.2.5. Ersatzschaltbild

Für die Ableitung der Spannung  $\underline{U}$  einer sich in positive (negative)  $z$ -Richtung ausbreitenden transversalelektromagnetischen Welle nach  $z$  gilt mit (3.17), (3.20) und (2.24)

$$\frac{\partial \underline{U}}{\partial z} = \mp j \beta \underline{U} = -j \beta Z_L \underline{I} = -j \omega \underbrace{\sqrt{\varepsilon \mu} Z_L}_{L'} \underline{I}. \quad (3.21)$$

Der Induktivitätsbelag

$$L' = \sqrt{\varepsilon \mu} Z_L \quad (3.22)$$

hat die Einheit  $\text{H m}^{-1}$ .

Für die Ableitung des Stroms  $\underline{I}$  einer sich in positive (negative)  $z$ -Richtung ausbreitenden transversalelektromagnetischen Welle nach  $z$  gilt mit (3.19), (3.20) und (2.24)

$$\frac{\partial \underline{I}}{\partial z} = \mp j \beta \underline{I} = -j \beta \frac{1}{Z_L} \underline{U} = -j \omega \underbrace{\sqrt{\varepsilon \mu} \frac{1}{Z_L}}_{C'} \underline{U}. \quad (3.23)$$

Der Kapazitätsbelag

$$C' = \sqrt{\varepsilon \mu} \frac{1}{Z_L} \quad (3.24)$$

hat die Einheit  $\text{F m}^{-1}$ .

Der Wellenwiderstand (3.20) ergibt sich zu

$$Z_L = \frac{L'}{\sqrt{\varepsilon \mu}} = \frac{\sqrt{\varepsilon \mu}}{C'} = \sqrt{\frac{L'}{C'}}. \quad (3.25)$$

Mit (2.45), (2.46) und (2.48) folgt unter Berücksichtigen von  $\beta_c = 0$  für die Phasengeschwindigkeit und die Gruppengeschwindigkeit

$$v_p = v_g = \frac{1}{\sqrt{L' C'}}. \quad (3.26)$$

Die Gleichungen (3.21) und (3.23) bilden ein als Leitungsgleichungen bezeichnetes Differentialgleichungssystem, mit dem man Spannung  $\underline{U}$  und Strom  $\underline{I}$  bestimmen kann. Nochmaliges Ableiten von (3.21) nach  $z$  und Einsetzen von (3.23) ergibt mit (2.24)

$$\frac{\partial^2 \underline{U}}{\partial z^2} = -j \sqrt{\varepsilon \mu} Z_L \frac{\partial \underline{I}}{\partial z} = -\omega^2 \varepsilon \mu \underline{U} = -\beta^2 \underline{U}. \quad (3.27)$$

Dual erhält man

$$\frac{\partial^2 \underline{I}}{\partial z^2} = -\beta^2 \underline{I}. \quad (3.28)$$

Man hätte diese Differentialgleichungen auch direkt aus dem Ersatzschaltbild in Abbildung 3.9 ablesen können. Der hier verfolgte feldtheoretische Ansatz liefert jedoch zusätzlich die Erkenntnis, dass Induktivitätsbelag  $L'$  und Kapazitätsbelag  $C'$  bei Zweileitersystemen mit homogenem Dielektrikum wegen

$$L'C' = \varepsilon\mu \quad (3.29)$$

abhängige Größen sind.

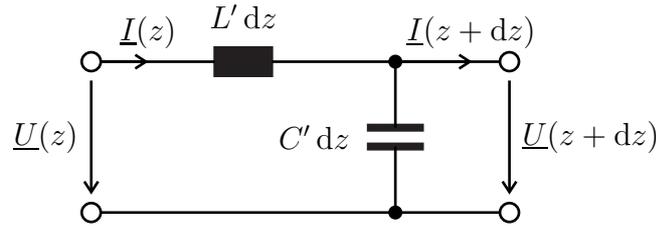


Abbildung 3.9.: Ersatzschaltbild eines kurzen Stücks der Länge  $dz$  eines Zweileitersystems

### 3.2.2.6. Leistung

Die transportierte Leistung  $P$  lässt sich gemäß (1.81) mit Hilfe des komplexen Poynting-Vektors  $\vec{S}$  durch Integration über eine Querschnittsfläche berechnen. Für das Flächenelement gilt

$$d\vec{A} = d\vec{r} \times d\vec{s},$$

wobei wie in Abbildung 3.10 gezeigt der Integrationsweg  $d\vec{r}$  entlang der elektrischen Feldlinien verlaufe und der Integrationsweg  $d\vec{s}$  entlang der magnetischen Feldlinien verlaufe. Mit (1.80), (1.81), (3.16) und (3.18) folgt<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} P &= \iint_A \langle \text{Re} \left( \frac{1}{2} \vec{E} \times \vec{H}^* \right), d\vec{r} \times d\vec{s} \rangle \\ &= \text{Re} \left( \iint_A \frac{1}{2} \left( \langle \vec{E}, d\vec{r} \rangle \langle \vec{H}^*, d\vec{s} \rangle - \langle \vec{H}^*, d\vec{r} \rangle \langle \vec{E}, d\vec{s} \rangle \right) \right) \\ &= \text{Re} \left( \frac{1}{2} \int_r \langle \vec{E}, d\vec{r} \rangle \int_s \langle \vec{H}^*, d\vec{s} \rangle \right) \\ &= \text{Re} \left( \frac{1}{2} U I^* \right). \end{aligned} \quad (3.30)$$

<sup>1</sup>Es wird die Lagrange-Identität  $\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \times \vec{d} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle \langle \vec{b}, \vec{d} \rangle - \langle \vec{a}, \vec{d} \rangle \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle$  verwendet.

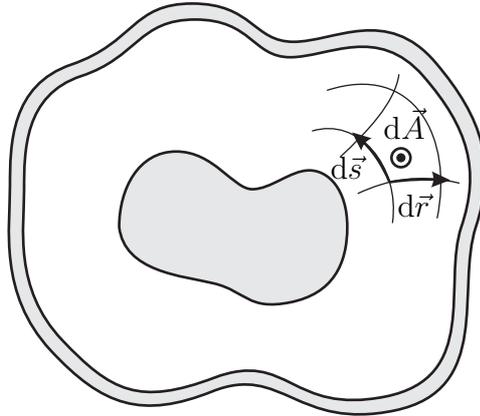


Abbildung 3.10.: Infinitesimales Flächenelement  $d\vec{A} = d\vec{r} \times d\vec{s}$  in der Querschnittsebene

### 3.2.3. Beispiele von Zweileitersystemen

#### 3.2.3.1. Bandleitung

Die Breite  $a$  der Leiter der in Abbildung 3.11 gezeigten Bandleitung sei viel größer als der Abstand  $b$ , so dass Streufelder vernachlässigbar sind.

Das normierte Potential des elektrostatischen Feldes des Plattenkondensators ist

$$\phi = \frac{y}{b}.$$

Mit (3.13) und (2.1) folgt die elektrische Feldstärke

$$\vec{E} = -\underline{U}_0 \frac{1}{b} e^{\mp j\beta z} \vec{u}_y \quad (3.31)$$

und mit (2.28) erhält man schließlich die magnetische Feldstärke

$$\vec{H} = \pm \underline{U}_0 \frac{1}{Z_F b} e^{\mp j\beta z} \vec{u}_x \quad (3.32)$$

einer sich in positive (negative)  $z$ -Richtung ausbreitenden transversalelektromagnetischen Welle auf der Bandleitung.

Die Kapazität eines Plattenkondensators der Länge  $l$  ist

$$C = \frac{\varepsilon a l}{b}.$$

Damit folgen der Kapazitätsbelag

$$C' = \frac{C}{l} = \frac{\varepsilon a}{b}, \quad (3.33)$$

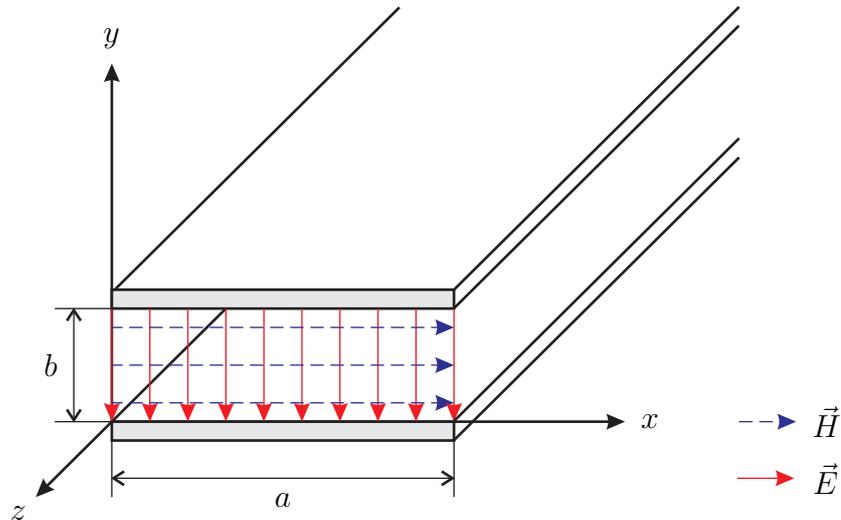


Abbildung 3.11.: Bandleitung mit einer sich in positive  $z$ -Richtung ausbreitenden transversalelektromagnetischen Welle

unter Verwenden von (3.29) der Induktivitätsbelag

$$L' = \frac{\mu b}{a} \quad (3.34)$$

und mit (3.25) und (2.25) der Wellenwiderstand

$$Z_L = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{b}{a} = Z_F \frac{b}{a}. \quad (3.35)$$

### 3.2.3.2. Koaxialleitung

Bei der in Abbildung 3.12 gezeigten Koaxialleitung handelt es sich um einen kreiszylindrischen aus Innenleiter, Dielektrikum und Außenleiter bestehenden Wellenleiter.

Die Kapazität eines Zylinderkondensators der Länge  $l$  ist

$$C = \frac{2\pi\varepsilon l}{\ln\left(\frac{D}{d}\right)}.$$

Damit folgen der Kapazitätsbelag

$$C' = \frac{C}{l} = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln\left(\frac{D}{d}\right)}, \quad (3.36)$$

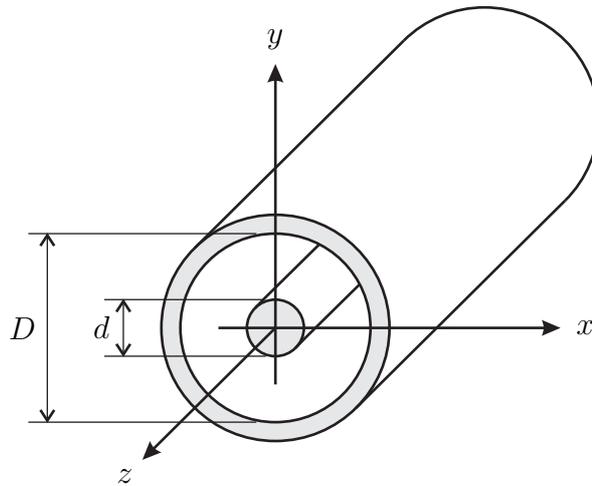


Abbildung 3.12.: Koaxialleitung

unter Verwenden von (3.29) der Induktivitätsbelag

$$L' = \frac{\mu \ln\left(\frac{D}{d}\right)}{2\pi} \quad (3.37)$$

und mit (3.25) und (2.25) der Wellenwiderstand

$$Z_L = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \ln\left(\frac{D}{d}\right) = \frac{1}{2\pi} Z_F \ln\left(\frac{D}{d}\right). \quad (3.38)$$

In der Hochfrequenztechnik verwendet man üblicherweise Koaxialleitungen mit einem einheitlichen Wellenwiderstand von  $Z_L = 50 \Omega$ .

### 3.2.3.3. Planare Wellenleiter

Die in Abbildung 3.13 gezeigten planaren Wellenleiter können beispielsweise in Leiterplattentechnologie aufwandsgünstig gefertigt werden. Die technischen Herausforderungen bestehen neben den häufig ungünstigen Eigenschaften der verwendeten Dielektrika insbesondere darin, dass viele dieser Wellenleiter inhomogene Dielektrika haben. Von den in Abbildung 3.13 gezeigten Beispielen planarer Wellenleiter hat nur die Streifenleitung ein homogenes Dielektrikum. Die Streifenleitung ist allerdings nur in Mehrlagentechnik zu fertigen. Bei den übrigen einfacher zu fertigenden planaren Wellenleitern besteht das felderfüllte Dielektrikum aus dem Substrat und aus Luft. Die sich auf einem derartigen planaren Wellenleiter mit inhomogenem Dielektrikum ausbreitenden elektromagnetischen Wellen sind

keine transversalelektromagnetischen Wellen. Häufig handelt es sich jedoch in hinreichend guter Näherung um transversalelektromagnetischen Wellen. Man spricht dann von quasi-transversalelektromagnetischen Wellen.

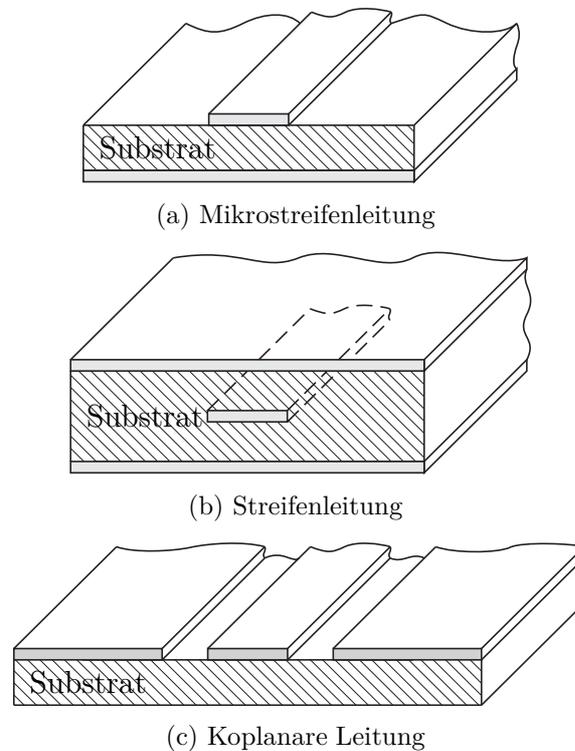


Abbildung 3.13.: Planare Wellenleiter

## 3.3. Transversalelektromagnetische Wellen auf Mehrleitersystemen

### 3.3.1. Allgemeine Mehrleitersysteme

Es werden Mehrleitersysteme mit konstantem Querschnitt und homogenem Dielektrikum betrachtet, siehe Abbildung 3.14. Einer der Leiter wird als Bezugsleiter ausgewählt und im Folgenden als Masse bezeichnet. Es verbleiben  $N \geq 1$  weitere Leiter, wobei der Spezialfall  $N = 1$  den in Abschnitt 3.2 besprochenen Zweileitersystemen entspricht. Das Koordinatensystem wird wieder so gewählt, dass die der Ausbreitungsrichtung entsprechende Längsachse des Mehrleitersystems der  $z$ -Achse entspricht.

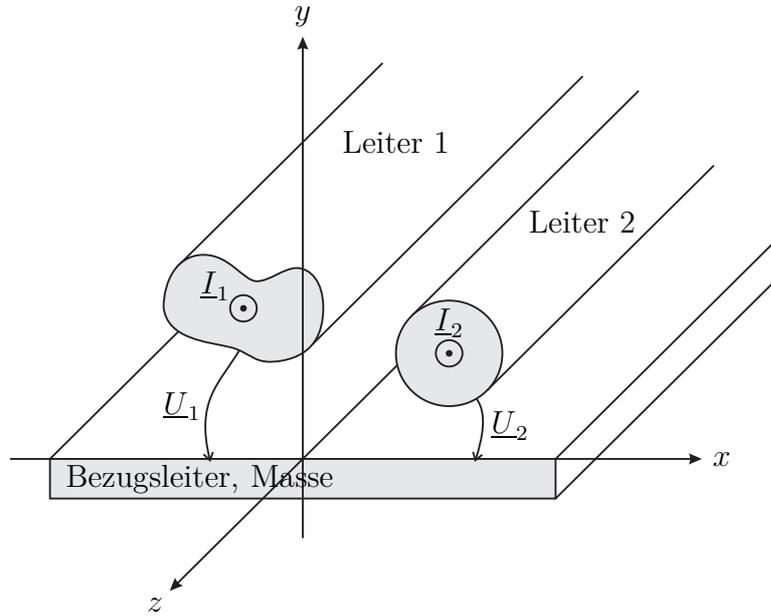


Abbildung 3.14.: Dreileitersystem

Im Folgenden werden nur transversalelektromagnetische Wellen näher untersucht. Eine die Helmholtz-Gleichung (2.5) und die Randbedingungen erfüllende elektrische Feldstärke  $\vec{E}$  einer sich in positive (negative)  $z$ -Richtung ausbreitenden transversalelektromagnetischen Welle findet man wieder ausgehend von einem normierten elektrostatischen Potential  $\phi$ . Der Nachweis erfolgt genau so wie in Abschnitt 3.2.2.1. Der wesentliche Unterschied zu Zweileitersystemen besteht darin, dass das normierte elektrostatische Potential  $\phi$  und damit die Struktur des elektrostatischen Feldes auf Mehrleitersystemen nicht eindeutig ist. Abhängig von der Ladungsverteilung auf den Leitern ergeben sich elektrostatische Felder unterschiedlicher Struktur. Es bestehen  $N$  Freiheitsgrade und man kann folglich jedes elektrostatische Potential  $-\underline{U}_0\phi$  auf dem Mehrleitersystem als Linearkombination von  $N$  linear unabhängigen, aber ansonsten beliebigen, normierten elektrostatischen Potentialen  $\phi^{(n)}$ ,  $n = 1 \dots N$ , darstellen. Für die elektrische Feldstärke einer sich in positive (negative)  $z$ -Richtung ausbreitenden transversalelektromagnetischen Welle folgt in Verallgemeinerung von (3.13)

$$\vec{E} = \sum_{n=1}^N \underbrace{-\underline{U}_0^{(n)} \text{grad}(\phi^{(n)})}_{\vec{E}^{(n)}} e^{\mp j\beta z}. \quad (3.39)$$

Auf dem Mehrleitersystem sind also  $N$  verschiedene transversalelektromagnetische Moden gleichzeitig ausbreitungsfähig. Phasenkonstante  $\beta$ , Phasengeschwin-

digkeit  $v_p$  und Gruppengeschwindigkeit  $v_g$  aller transversalelektromagnetischen Moden auf Mehrleitersystemen mit homogenem Dielektrikum sind gleich.

Analog zur Vorgehensweise bei Zweileitersystemen in den Abschnitten 3.2.2.2 und 3.2.2.3 kann man bei Mehrleitersystemen die Spannung

$$\underline{U}_n = \underline{U}_{0n} e^{\mp j\beta z} \quad (3.40)$$

zwischen Leiter  $n$  und Masse und den Strom

$$\underline{I}_n = \underline{I}_{0n} e^{\mp j\beta z} \quad (3.41)$$

durch Leiter  $n$  definieren. Man definiert den Spannungsvektor

$$\underline{\mathbf{U}} = \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \vdots \\ \underline{U}_N \end{pmatrix} \quad (3.42)$$

und den Stromvektor

$$\underline{\mathbf{I}} = \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \vdots \\ \underline{I}_N \end{pmatrix}. \quad (3.43)$$

Aufgrund der Linearität gilt mit einer geeignet gewählten reellen Wellenwiderstandsmatrix

$$\mathbf{Z}_L = \begin{pmatrix} Z_{L1,1} & \cdots & Z_{L1,N} \\ \vdots & & \vdots \\ Z_{LN,1} & \cdots & Z_{LN,N} \end{pmatrix} \quad (3.44)$$

für eine sich in positive (negative)  $z$ -Richtung ausbreitende transversalelektromagnetische Welle

$$\underline{\mathbf{U}} = \pm \mathbf{Z}_L \cdot \underline{\mathbf{I}}, \quad (3.45)$$

vergleiche Abschnitt 3.2.2.4. Aufgrund der Reziprozität des Mehrleitersystems ist die Wellenwiderstandsmatrix  $\mathbf{Z}_L$  symmetrisch.<sup>2</sup> Ableiten der Spannungen  $\underline{\mathbf{U}}$  nach  $z$  ergibt mit (2.24) die Verallgemeinerung

$$\frac{\partial \underline{\mathbf{U}}}{\partial z} = \mp j\beta \underline{\mathbf{U}} = -j\beta \mathbf{Z}_L \cdot \underline{\mathbf{I}} = -j\omega \underbrace{\sqrt{\varepsilon\mu}}_{\mathbf{L}'} \mathbf{Z}_L \cdot \underline{\mathbf{I}}. \quad (3.46)$$

---

<sup>2</sup>Das Mehrleitersystem kann man als Mehrtor auffassen und die Impedanzmatrix  $\mathbf{Z}$  eines reziproken Mehrtors ist wie auch dessen Streumatrix  $\mathbf{S}$  symmetrisch, siehe Aufgabe 9.2.

der Leitungsgleichung (3.21). Die Induktivitätsbelagsmatrix

$$\mathbf{L}' = \begin{pmatrix} L'_{1,1} & \cdots & L'_{1,N} \\ \vdots & & \vdots \\ L'_{N,1} & \cdots & L'_{N,N} \end{pmatrix} = \sqrt{\varepsilon\mu}\mathbf{Z}_L \quad (3.47)$$

ist wie die Wellenwiderstandsmatrix  $\mathbf{Z}_L$  reell und symmetrisch.

Die inverse Wellenwiderstandsmatrix  $\mathbf{Z}_L^{-1}$  ist reell und symmetrisch, da die Inverse einer reellen symmetrischen Matrix wieder eine reelle symmetrische Matrix ist. Es gilt

$$\underline{\mathbf{I}} = \pm\mathbf{Z}_L^{-1} \cdot \underline{\mathbf{U}}. \quad (3.48)$$

Ableiten der Ströme  $\underline{\mathbf{I}}$  nach  $z$  ergibt mit (2.24) die Verallgemeinerung

$$\frac{\partial \underline{\mathbf{I}}}{\partial z} = \mp j\beta \underline{\mathbf{U}} = -j\beta \mathbf{Z}_L^{-1} \cdot \underline{\mathbf{U}} = -j\omega \underbrace{\sqrt{\varepsilon\mu}\mathbf{Z}_L^{-1}}_{\mathbf{C}'} \cdot \underline{\mathbf{U}}. \quad (3.49)$$

der Leitungsgleichung (3.23). Die Influenzbelagskoeffizientenmatrix

$$\mathbf{C}' = \begin{pmatrix} c'_{1,1} & \cdots & c'_{1,N} \\ \vdots & & \vdots \\ c'_{N,1} & \cdots & c'_{N,N} \end{pmatrix} = \sqrt{\varepsilon\mu}\mathbf{Z}_L^{-1} \quad (3.50)$$

ist wie die Wellenwiderstandsmatrix  $\mathbf{Z}_L$  reell und symmetrisch. Sie enthält die Influenzbelagskoeffizienten  $c'_{n,m} = c'_{m,n}$ .

Für ein kurzes Stück eines Dreileitersystems erhält man das in Abbildung 3.15 gezeigte Ersatzschaltbild mit den folgenden Kapazitätsbelägen:

$$C'_{1,0} = c'_{1,1} + c'_{1,2}, \quad (3.51)$$

$$C'_{2,0} = c'_{2,2} + c'_{1,2}, \quad (3.52)$$

$$C'_{1,2} = -c'_{1,2}. \quad (3.53)$$

Mit der Einheitsmatrix  $\mathbf{E}$  gilt weiterhin

$$\mathbf{L}' \cdot \mathbf{C}' = \varepsilon\mu\mathbf{E}, \quad (3.54)$$

was eine Verallgemeinerung der Zusammenhänge (3.29) beim Zweileitersystem darstellt. Induktivitätsbelagsmatrix  $\mathbf{L}'$  und Influenzbelagskoeffizientenmatrix  $\mathbf{C}'$  sind bei Mehrleitersystemen mit homogenem Dielektrikum abhängige Größen. Speziell für Dreileitersysteme gilt

$$\mathbf{C}' = \begin{pmatrix} c'_{1,1} & c'_{1,2} \\ c'_{1,2} & c'_{2,2} \end{pmatrix} = \varepsilon\mu\mathbf{L}'^{-1} = \frac{\varepsilon\mu}{L'_{1,1}L'_{2,2} - L'^2_{1,2}} \begin{pmatrix} L'_{2,2} & -L'_{1,2} \\ -L'_{1,2} & L'_{1,1} \end{pmatrix}. \quad (3.55)$$

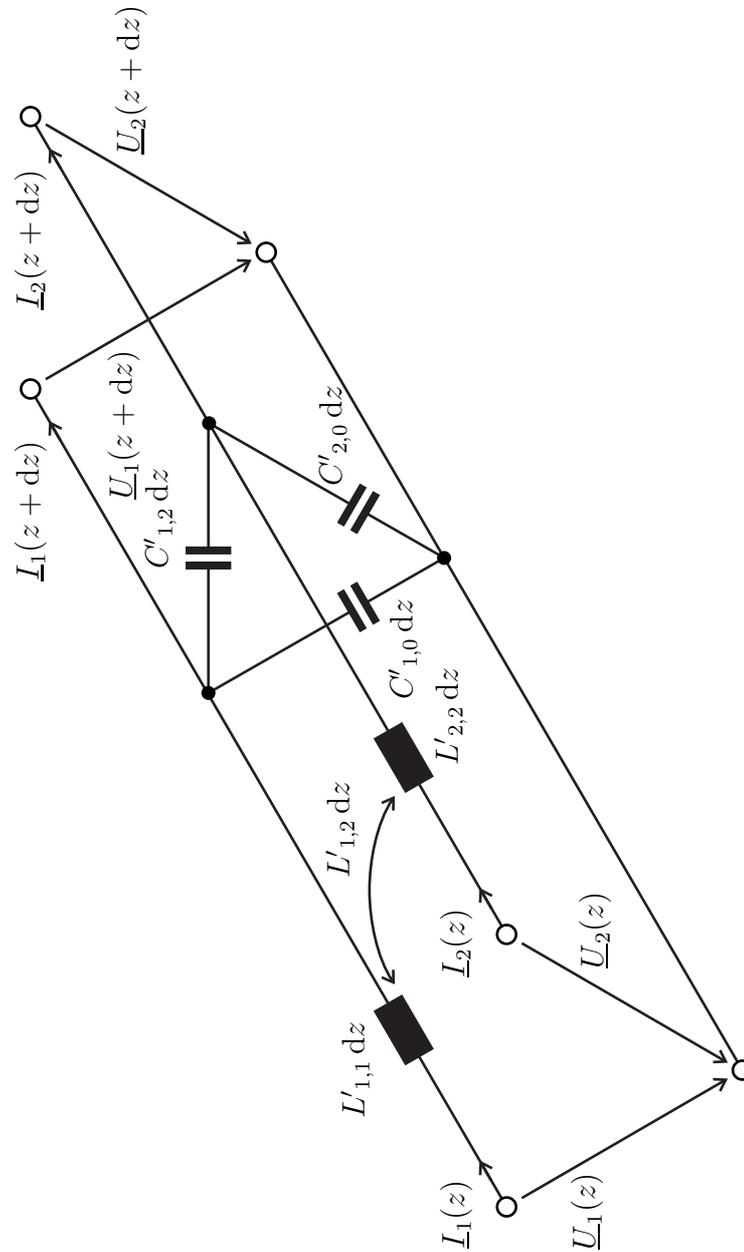


Abbildung 3.15.: Ersatzschaltbild eines kurzen Stücks der Länge  $dz$  eines Dreileitersystems

Nochmaliges Ableiten von (3.46) nach  $z$  und Einsetzen von (3.49) ergibt mit (2.24)

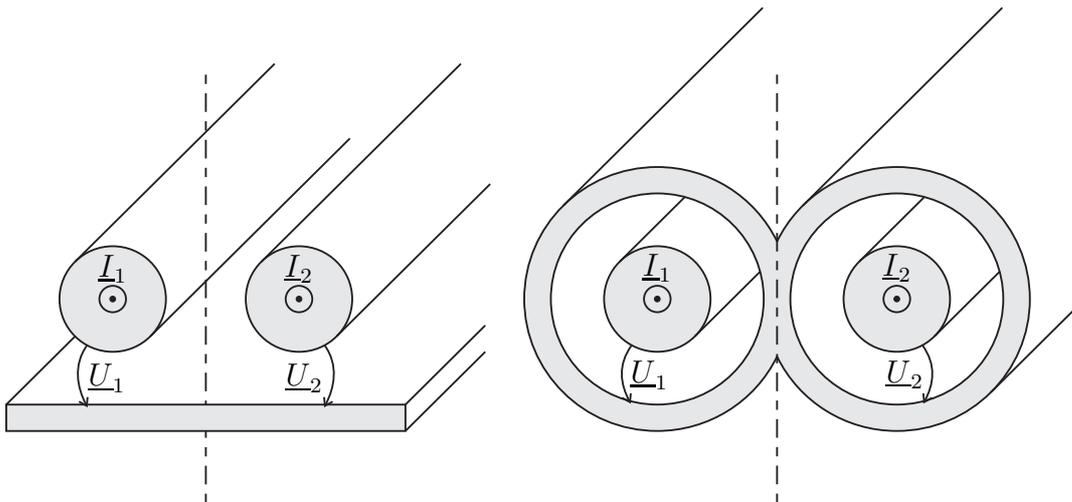
$$\frac{\partial^2 \underline{\mathbf{U}}}{\partial z^2} = -j\sqrt{\varepsilon\mu} \mathbf{Z}_L \frac{\partial \underline{\mathbf{I}}}{\partial z} = -\omega^2 \varepsilon \mu \underline{\mathbf{U}} = -\beta^2 \underline{\mathbf{U}}. \quad (3.56)$$

Dual erhält man

$$\frac{\partial^2 \underline{\mathbf{I}}}{\partial z^2} = -\beta^2 \underline{\mathbf{I}}. \quad (3.57)$$

### 3.3.2. Symmetrische Dreileitersysteme

Symmetrisch zur Masse aufgebaute Dreileitersysteme zum Verbinden elektronischer Komponenten sind von besonderer technischer Bedeutung. Einerseits kann man die Einkopplung von Störsignalen durch Verwenden differentieller Signale reduzieren. Andererseits ist es häufig vorteilhaft, elektronische Schaltungen symmetrisch zur Masse aufzubauen. Man erhält dann zwangsläufig massesymmetrische differentielle Eingänge und Ausgänge. Abbildung 3.16 zeigt zwei Beispiele symmetrisch aufgebaute Dreileitersysteme.



(a) Allgemeines symmetrisches Dreileitersystem (b) Massegekoppeltes symmetrisches Dreileitersystem

Abbildung 3.16.: Symmetrische Dreileitersysteme

Der symmetrische Aufbau bewirkt insbesondere, dass die Induktivitätsbeläge

$$L' = L'_{1,1} = L'_{2,2}$$

und die Influenzbelagskoeffizienten

$$c' = c'_{1,1} = c'_{2,2}$$

für beide Leiter gleich sind. Mit (3.47) folgt

$$Z_{L1,1} = Z_{L2,2}.$$

Der Grad der Kopplung wird durch den Kopplungsfaktor

$$k = \frac{Z_{L1,2}}{Z_{L1,1}} = \frac{L'_{1,2}}{L'} = -\frac{c'_{1,2}}{c'} \quad (3.58)$$

beschrieben. Für die Umformungen wurden (3.47) und (3.55) verwendet. Insbesondere sind die induktiven und die kapazitiven Kopplungen gleich.

Ein eleganter Ansatz besteht darin, Eigenvektoren der Wellenwiderstandsmatrix  $\underline{\mathbf{Z}}$  als Moden zu verwenden. Speziell bei symmetrischen Dreileitersystemen sind die Eigenvektoren alleine durch die Struktur der Matrizen gegeben. Es gelten

$$\pm \underbrace{\begin{pmatrix} Z_{L1,1} & Z_{L1,2} \\ Z_{L1,2} & Z_{L1,1} \end{pmatrix}}_{\underline{\mathbf{Z}}_L} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \underline{\mathbf{I}}^{(-)} \\ -\underline{\mathbf{I}}^{(-)} \end{pmatrix}}_{\underline{\mathbf{I}}^{(-)}} = \pm (Z_{L1,1} - Z_{L1,2}) \underbrace{\begin{pmatrix} \underline{\mathbf{I}}^{(-)} \\ -\underline{\mathbf{I}}^{(-)} \end{pmatrix}}_{\underline{\mathbf{I}}^{(-)}} = \pm \underbrace{\begin{pmatrix} \underline{\mathbf{U}}^{(-)} \\ -\underline{\mathbf{U}}^{(-)} \end{pmatrix}}_{\underline{\mathbf{U}}^{(-)}}$$

und

$$\pm \underbrace{\begin{pmatrix} Z_{L1,1} & Z_{L1,2} \\ Z_{L1,2} & Z_{L1,1} \end{pmatrix}}_{\underline{\mathbf{Z}}_L} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \underline{\mathbf{I}}^{(+)} \\ \underline{\mathbf{I}}^{(+)} \end{pmatrix}}_{\underline{\mathbf{I}}^{(+)}} = \pm (Z_{L1,1} + Z_{L1,2}) \underbrace{\begin{pmatrix} \underline{\mathbf{I}}^{(+)} \\ \underline{\mathbf{I}}^{(+)} \end{pmatrix}}_{\underline{\mathbf{I}}^{(+)}} = \pm \underbrace{\begin{pmatrix} \underline{\mathbf{U}}^{(+)} \\ \underline{\mathbf{U}}^{(+)} \end{pmatrix}}_{\underline{\mathbf{U}}^{(+)}}.$$

Das heißt die Gegentaktwelle und die Gleichtaktwelle sind solche Eigenvektoren entsprechenden Moden. Die Stromvektoren  $\underline{\mathbf{I}}^{(-)}$  und  $\underline{\mathbf{I}}^{(+)}$  sind die Eigenvektoren der Wellenwiderstandsmatrix  $\underline{\mathbf{Z}}_L$ . Der Wellenwiderstand

$$\begin{aligned} Z_L^{(-)} &= \pm \frac{\underline{\mathbf{U}}^{(-)}}{\underline{\mathbf{I}}^{(-)}} = Z_{L1,1} - Z_{L1,2} \\ &= \frac{L' - L'_{1,2}}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{\sqrt{\varepsilon\mu}}{c' - c'_{1,2}} \\ &= \sqrt{\frac{L' - L'_{1,2}}{c' - c'_{1,2}}} = \sqrt{\frac{L'(1-k)}{c'(1+k)}} \end{aligned}$$

der Gegentaktwelle und der Wellenwiderstand

$$\begin{aligned} Z_L^{(+)} &= \pm \frac{U^{(+)}}{I^{(+)}} = Z_{L1,1} + Z_{L1,2} \\ &= \frac{L' + L'_{1,2}}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{\sqrt{\varepsilon\mu}}{c' + c'_{1,2}} \\ &= \sqrt{\frac{L' + L'_{1,2}}{c' + c'_{1,2}}} = \sqrt{\frac{L'(1+k)}{c'(1-k)}} \end{aligned}$$

der Gleichtaktwelle sind die zugehörigen Eigenwerte. Für die Umformungen wurden (3.47), (3.55) und (3.58) verwendet. Weiterhin sind die Spannungsvektoren  $\underline{U}^{(-)}$  und  $\underline{U}^{(+)}$  die Eigenvektoren der inversen Wellenwiderstandsmatrix  $\underline{Z}_L^{-1}$ .

Man definiert den Wellenwiderstand

$$Z_L = \sqrt{Z_L^{(-)} Z_L^{(+)}} = \sqrt[4]{\frac{L'(1-k)}{c'(1+k)} \cdot \frac{L'(1+k)}{c'(1-k)}} = \sqrt{\frac{L'}{c'}}. \quad (3.59)$$

Damit folgt für den Wellenwiderstand der Gegentaktwelle

$$Z_L^{(-)} = Z_L \sqrt{\frac{1-k}{1+k}} \quad (3.60)$$

und für den Wellenwiderstand der Gleichtaktwelle

$$Z_L^{(+)} = Z_L \sqrt{\frac{1+k}{1-k}}. \quad (3.61)$$

Jede sich auf einem symmetrischen Dreileitersystem ausbreitende transversalelektromagnetische Welle kann man in eine Gegentaktwelle und eine Gleichtaktwelle zerlegen, siehe Abbildung 3.17.

Die Spannungen

$$\underline{U}_1 = \underline{U}^{(-)} + \underline{U}^{(+)} \quad (3.62)$$

und

$$\underline{U}_2 = -\underline{U}^{(-)} + \underline{U}^{(+)} \quad (3.63)$$

der Leiter ergeben sich durch Überlagern der Gegentaktspannung  $\underline{U}^{(-)}$  und der Gleichtaktspannung  $\underline{U}^{(+)}$ . Es folgen

$$\underline{U}^{(-)} = \frac{\underline{U}_1 - \underline{U}_2}{2} \quad (3.64)$$

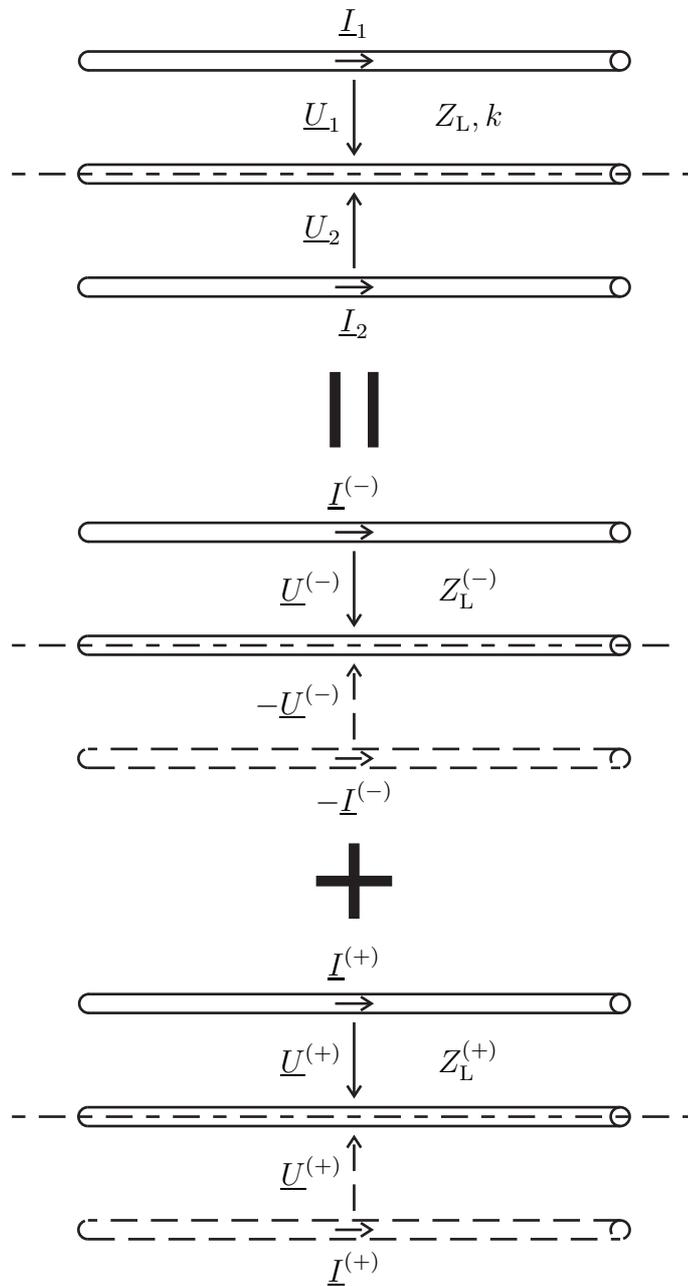


Abbildung 3.17.: Zerlegung eines symmetrischen Dreileitersystems in ein Gegentaktsystem und ein Gleichtaktsystem. Die gestrichelt gezeichneten Hälften brauchen aus Symmetriegründen nicht weiter betrachtet zu werden

und

$$\underline{U}^{(+)} = \frac{\underline{U}_1 + \underline{U}_2}{2}. \quad (3.65)$$

Die Ströme

$$\underline{I}_1 = \underline{I}^{(-)} + \underline{I}^{(+)} \quad (3.66)$$

und

$$\underline{I}_2 = -\underline{I}^{(-)} + \underline{I}^{(+)} \quad (3.67)$$

der Leiter ergeben sich durch Überlagern des Gegentaktstroms  $\underline{I}^{(-)}$  und des Gleichtaktstroms  $\underline{I}^{(+)}$ . Es folgen

$$\underline{I}^{(-)} = \frac{\underline{I}_1 - \underline{I}_2}{2} \quad (3.68)$$

und

$$\underline{I}^{(+)} = \frac{\underline{I}_1 + \underline{I}_2}{2}. \quad (3.69)$$

Für die transportierte Leistung erhält man aufgrund der Orthogonalität von Gegentaktwelle und Gleichtaktwelle

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\underline{U}_1 \underline{I}_1^*) + \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\underline{U}_2 \underline{I}_2^*) \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}\left(\left(\underline{U}^{(-)} + \underline{U}^{(+)}\right) \left(\underline{I}^{(-)} + \underline{I}^{(+)}\right)^*\right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \operatorname{Re}\left(\left(-\underline{U}^{(-)} + \underline{U}^{(+)}\right) \left(-\underline{I}^{(-)} + \underline{I}^{(+)}\right)^*\right) \\ &= \underbrace{\operatorname{Re}\left(\underline{U}^{(-)} \underline{I}^{(-)*}\right)}_{\text{Gegentaktwelle}} + \underbrace{\operatorname{Re}\left(\underline{U}^{(+)} \underline{I}^{(+)*}\right)}_{\text{Gleichtaktwelle}}, \end{aligned} \quad (3.70)$$

vergleiche (3.30). Man beachte den Wegfall des Faktors 1/2 beim Berechnen der transportierten Leistung aus den Gegentaktgrößen und den Gleichtaktgrößen der daraus resultiert, dass Spannungen und Ströme der Gegentaktwelle und der Gleichtaktwelle jeweils nur die Spannung beziehungsweise den Strom eines einzigen Leiters berücksichtigen.

Eine Sonderstellung nehmen die massegekoppelten symmetrischen Dreileitersysteme mit

$$L'_{1,2} = 0$$

und

$$c'_{1,2} = 0$$

ein, siehe Abbildung 3.16b. Mit (3.58) folgt für den Kopplungsfaktor

$$k = 0 \quad (3.71)$$

und folglich sind der Wellenwiderstand (3.60) der Gegentaktwelle und der Wellenwiderstand (3.61) der Gleichtaktwelle gleich:

$$Z_L^{(-)} = Z_L^{(+)} = Z_L. \quad (3.72)$$

**Aufgabe 3.5** Es wird ein aus drei gleichartigen Leitern in gleicher relativer Anordnung bestehendes Dreileitersystem betrachtet, siehe Abbildung 3.18. Zeigen sie, dass für den Kopplungsfaktor

$$k = \frac{1}{2} \quad (3.73)$$

*gilt!*

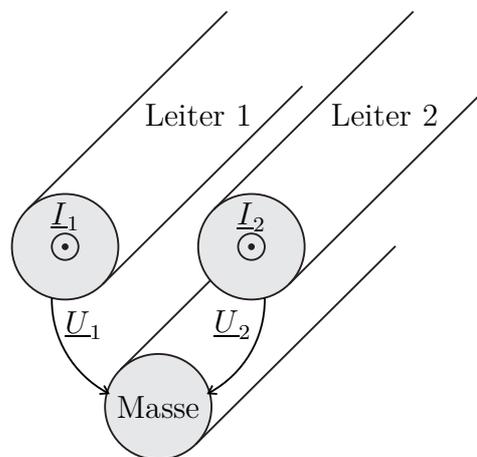


Abbildung 3.18.: Aus drei gleichartigen Leitern in gleicher relativer Anordnung bestehendes Dreileitersystem

# Kapitel 4.

## Antennentheorie

### 4.1. Vektorpotential

Das Ziel der folgenden Betrachtungen ist es, das von der elektrischen Stromdichte  $\vec{J}$  einer Antenne in ein homogenes Dielektrikum abgestrahlte elektromagnetische Feld zu berechnen. Die magnetische Stromdichte  $\vec{M}$  sei hier Null.

Man definiert das magnetische Vektorpotential  $\vec{A}$  als Lösung der inhomogenen Helmholtz-Gleichung

$$\Delta \vec{A} + \beta^2 \vec{A} = -\mu \vec{J}, \quad (4.1)$$

wobei

$$\beta = \omega \sqrt{\varepsilon \mu} \quad (4.2)$$

die Phasenkonstante ist. Die elektrische Stromdichte  $\vec{J}$  ist die Quelle des magnetischen Vektorpotentials  $\vec{A}$ . Bei Verwenden kartesischer Koordinaten zerfällt die vektorielle inhomogene Helmholtz-Gleichung (4.1) des magnetischen Vektorpotentials  $\vec{A}$  in drei skalare inhomogene Helmholtz-Gleichungen

$$\Delta \underline{A}_x + \beta^2 \underline{A}_x = -\mu \underline{J}_x, \quad (4.3)$$

$$\Delta \underline{A}_y + \beta^2 \underline{A}_y = -\mu \underline{J}_y, \quad (4.4)$$

$$\Delta \underline{A}_z + \beta^2 \underline{A}_z = -\mu \underline{J}_z, \quad (4.5)$$

siehe (2.6) und (3.15), das heißt die Komponenten der elektrischen Stromdichte  $\vec{J}$  sind die Quellen der entsprechenden Komponenten des magnetischen Vektorpotentials  $\vec{A}$ . Im Folgenden wird gezeigt, dass man mittels

$$\vec{B} = \text{rot}(\vec{A}) \quad (4.6)$$

aus dem magnetischen Vektorpotential  $\vec{A}$  ein die Maxwell'schen Gleichungen erfüllendes elektromagnetisches Feld erhält.

Wegen (1.46) ist die aus dem magnetischen Vektorpotential  $\vec{A}$  mit (4.6) berechnete magnetische Flussdichte  $\vec{B}$  wie im Fall verschwindender magnetischer Ladungsdichte  $\rho_m$  von (1.40) gefordert stets quellenfrei.

Mit dem Durchflutungsgesetz (1.17), (1.52) und (4.6) erhält man die elektrische Flussdichte

$$\vec{D} = \frac{1}{j\omega\mu} \operatorname{rot}(\operatorname{rot}(\vec{A})) - \frac{1}{j\omega} \vec{J}.$$

Mit (1.46) und (1.42) erhält man wie von (1.35) gefordert

$$\operatorname{div}(\vec{D}) = \frac{1}{j\omega\mu} \operatorname{div}(\operatorname{rot}(\operatorname{rot}(\vec{A}))) - \frac{1}{j\omega} \operatorname{div}(\vec{J}) = \rho_e.$$

Schließlich setzt man die aus der elektrischen Flussdichte  $\vec{D}$  unter Verwenden von (1.48), (2.2), (4.1) und (4.2) berechnete elektrische Feldstärke

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{1}{j\omega\varepsilon\mu} \operatorname{rot}(\operatorname{rot}(\vec{A})) - \frac{1}{j\omega\varepsilon} \vec{J} \\ &= \frac{1}{j\omega\varepsilon\mu} \operatorname{grad}(\operatorname{div}(\vec{A})) - \frac{1}{j\omega\varepsilon\mu} \Delta\vec{A} - \frac{1}{j\omega\varepsilon} \vec{J} \\ &= \frac{1}{j\omega\varepsilon\mu} \operatorname{grad}(\operatorname{div}(\vec{A})) - j\omega\vec{A} \end{aligned} \quad (4.7)$$

noch in das Induktionsgesetz (1.25) ein. Unter Verwenden von (3.14) und (4.6) erhält man wie bei verschwindender magnetischer Stromdichte  $\vec{M}$  vom Induktionsgesetz (1.25) gefordert

$$-\operatorname{rot}(\vec{E}) = -\frac{1}{j\omega\varepsilon\mu} \operatorname{rot}(\operatorname{grad}(\operatorname{div}(\vec{A}))) + j\omega \operatorname{rot}(\vec{A}) = j\omega\vec{B}.$$

Im allgemeinen Fall, dass sowohl eine nichtverschwindende elektrische Stromdichte  $\vec{J}$  als auch eine nichtverschwindende magnetische Stromdichte  $\vec{M}$  vorhanden ist, kann man das elektromagnetische Feld aufgrund der Linearität der Maxwell'schen Gleichungen als Überlagerung des nur von der elektrischen Stromdichte  $\vec{J}$  abgestrahlten elektromagnetischen Feldes und des nur von der magnetischen Stromdichte  $\vec{M}$  abgestrahlten elektromagnetischen Feldes berechnen. Das Berechnen des von der magnetischen Stromdichte  $\vec{M}$  abgestrahlten elektromagnetischen Feldes erfolgt unter Ausnutzen der Dualitätsbeziehungen aus Tabelle 1.1 mit Hilfe eines elektrischen Vektorpotentials.

## 4.2. Kugelkoordinaten

### 4.2.1. Koordinatentransformation

Bei der Analyse von Antennenproblemen interessiert häufig nur das als Fernfeld bezeichnete elektromagnetische Feld in großer Entfernung von der Sendeantenne.

Von hier aus betrachtet erscheint die Antenne wie eine weit entfernte Punktquelle. Das Berechnen des Fernfeldes vereinfacht sich daher signifikant, wenn man Kugelkoordinaten Radius  $r$ , Poldistanzwinkel  $\vartheta$  und Azimutwinkel  $\varphi$  als ein an das Problem angepasstes Koordinatensystem verwendet, siehe Abbildung 4.1. Die kartesischen Koordinaten  $x$ ,  $y$  und  $z$  ergeben sich als Funktionen von Radius  $r$ , Poldistanzwinkel  $\vartheta$  und Azimutwinkel  $\varphi$  wie folgt:

$$x = r \sin(\vartheta) \cos(\varphi), \quad (4.8)$$

$$y = r \sin(\vartheta) \sin(\varphi), \quad (4.9)$$

$$z = r \cos(\vartheta). \quad (4.10)$$

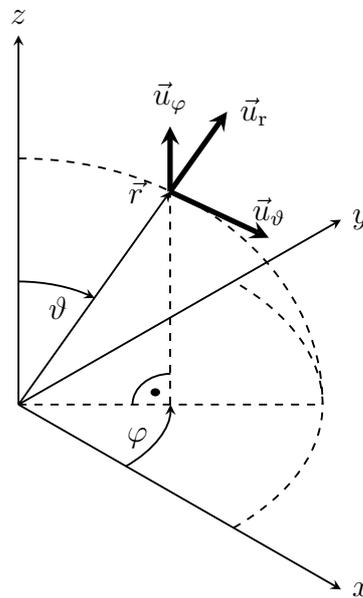


Abbildung 4.1.: Kugelkoordinaten

Die Koordinatenlinien sind die Orte, an denen alle Koordinaten bis auf eine einzige ausgewählte Koordinate konstante Werte annehmen. Da die Koordinatenlinien im Gegensatz zu kartesischen Koordinaten hier im Allgemeinen keine Geraden sind, spricht man von krummlinigen Koordinaten. Man erhält die Tan-

gentialvektoren der Koordinatenlinien:

$$\vec{t}_r = \frac{\partial x}{\partial r} \vec{u}_x + \frac{\partial y}{\partial r} \vec{u}_y + \frac{\partial z}{\partial r} \vec{u}_z = \sin(\vartheta) \cos(\varphi) \vec{u}_x + \sin(\vartheta) \sin(\varphi) \vec{u}_y + \cos(\vartheta) \vec{u}_z,$$

$$\vec{t}_\vartheta = \frac{\partial x}{\partial \vartheta} \vec{u}_x + \frac{\partial y}{\partial \vartheta} \vec{u}_y + \frac{\partial z}{\partial \vartheta} \vec{u}_z = r \cos(\vartheta) \cos(\varphi) \vec{u}_x + r \cos(\vartheta) \sin(\varphi) \vec{u}_y - r \sin(\vartheta) \vec{u}_z,$$

$$\vec{t}_\varphi = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \vec{u}_x + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \vec{u}_y + \frac{\partial z}{\partial \varphi} \vec{u}_z = -r \sin(\vartheta) \sin(\varphi) \vec{u}_x + r \sin(\vartheta) \cos(\varphi) \vec{u}_y.$$

Man definiert die metrischen Größen:

$$g_r = \|\vec{t}_r\| = 1, \quad (4.11)$$

$$g_\vartheta = \|\vec{t}_\vartheta\| = r, \quad (4.12)$$

$$g_\varphi = \|\vec{t}_\varphi\| = r \sin(\vartheta). \quad (4.13)$$

Durch Normieren der Tangentialvektoren erhält man die Einheitsvektoren in Richtung der Koordinatenlinien:

$$\vec{u}_r = \frac{\vec{t}_r}{g_r} = \sin(\vartheta) \cos(\varphi) \vec{u}_x + \sin(\vartheta) \sin(\varphi) \vec{u}_y + \cos(\vartheta) \vec{u}_z, \quad (4.14)$$

$$\vec{u}_\vartheta = \frac{\vec{t}_\vartheta}{g_\vartheta} = \cos(\vartheta) \cos(\varphi) \vec{u}_x + \cos(\vartheta) \sin(\varphi) \vec{u}_y - \sin(\vartheta) \vec{u}_z, \quad (4.15)$$

$$\vec{u}_\varphi = \frac{\vec{t}_\varphi}{g_\varphi} = -\sin(\vartheta) \sin(\varphi) \vec{u}_x + \sin(\vartheta) \cos(\varphi) \vec{u}_y. \quad (4.16)$$

## 4.2.2. Integrationselemente

Im Folgenden werden zunächst die allgemeinen Beziehungen hergeleitet und dann in einem letzten Schritt die metrischen Größen  $g_r$ ,  $g_\vartheta$  und  $g_\varphi$  für Kugelkoordinaten gemäß (4.11), (4.12) und (4.13) eingesetzt. Für ein Linienelement erhält man

$$\begin{aligned} d\vec{s} &= \vec{t}_r dr + \vec{t}_\vartheta d\vartheta + \vec{t}_\varphi d\varphi \\ &= \vec{u}_r g_r dr + \vec{u}_\vartheta g_\vartheta d\vartheta + \vec{u}_\varphi g_\varphi d\varphi \end{aligned} \quad (4.17)$$

$$= \underbrace{\vec{u}_r dr}_{ds_r} + \underbrace{\vec{u}_\vartheta r d\vartheta}_{ds_\vartheta} + \underbrace{\vec{u}_\varphi r \sin(\vartheta) d\varphi}_{ds_\varphi}. \quad (4.18)$$

Kugelkoordinaten sind orthogonale Koordinaten, das heißt die Einheitsvektoren sind orthonormal:

$$\langle \vec{u}_p, \vec{u}_q \rangle = \begin{cases} 1 & p = q \\ 0 & p \neq q \end{cases}.$$

Da die Kugelkoordinaten orthogonal sind, gilt

$$\begin{aligned} \|\underline{d\vec{s}}\|^2 &= \langle \underline{d\vec{s}}, \underline{d\vec{s}} \rangle \\ &= \langle \vec{u}_r g_r dr + \vec{u}_\vartheta g_\vartheta d\vartheta + \vec{u}_\varphi g_\varphi d\varphi, \vec{u}_r g_r dr + \vec{u}_\vartheta g_\vartheta d\vartheta + \vec{u}_\varphi g_\varphi d\varphi \rangle \\ &= g_r^2 dr^2 + g_\vartheta^2 d\vartheta^2 + g_\varphi^2 d\varphi^2 \end{aligned} \quad (4.19)$$

$$= dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2(\vartheta) d\varphi^2. \quad (4.20)$$

Da die Einheitsvektoren  $\vec{u}_\vartheta$ ,  $\vec{u}_\varphi$  und  $\vec{u}_r = \vec{u}_\vartheta \times \vec{u}_\varphi$  orthogonal sind und ein Rechtssystem bilden, gilt für das Flächenelement

$$\begin{aligned} d\vec{A}_r &= (\vec{t}_\vartheta d\vartheta) \times (\vec{t}_\varphi d\varphi) = (\vec{u}_\vartheta g_\vartheta d\vartheta) \times (\vec{u}_\varphi g_\varphi d\varphi) \\ &= g_\vartheta g_\varphi d\vartheta d\varphi \vec{u}_r \end{aligned} \quad (4.21)$$

$$= r^2 \sin(\vartheta) d\vartheta d\varphi \vec{u}_r. \quad (4.22)$$

Analog erhält man die übrigen Flächenelemente

$$d\vec{A}_\vartheta = g_r g_\varphi dr d\varphi \vec{u}_\vartheta = r \sin(\vartheta) dr d\varphi \vec{u}_\vartheta \quad (4.23)$$

und

$$d\vec{A}_\varphi = g_r g_\vartheta dr d\vartheta \vec{u}_\varphi = r dr d\vartheta \vec{u}_\varphi. \quad (4.24)$$

Mit dem Spatprodukt erhält man schließlich das Volumenelement

$$\begin{aligned} dV &= \langle \vec{t}_r dr, (\vec{t}_\vartheta d\vartheta) \times (\vec{t}_\varphi d\varphi) \rangle = \langle \vec{u}_r g_r dr, (\vec{u}_\vartheta g_\vartheta d\vartheta) \times (\vec{u}_\varphi g_\varphi d\varphi) \rangle \\ &= g_r g_\vartheta g_\varphi dr d\vartheta d\varphi \end{aligned} \quad (4.25)$$

$$= r^2 \sin(\vartheta) dr d\vartheta d\varphi. \quad (4.26)$$

### 4.2.3. Vektoranalysis für krummlinige orthogonale Koordinaten

#### 4.2.3.1. Gradient

Die Komponenten des Gradienten ergeben sich aus der Änderung des Skalarfeldes  $\underline{\phi}$  in die entsprechenden Richtungen. Für die  $r$ -Komponente gilt beispielsweise

$$\left[ \text{grad}(\underline{\phi}) \right]_r = \lim_{dr \rightarrow 0} \frac{\underline{\phi}\left(r + \frac{dr}{2}, \vartheta, \varphi\right) - \underline{\phi}\left(r - \frac{dr}{2}, \vartheta, \varphi\right)}{\underbrace{g_r dr}_{ds_r}} = \frac{1}{g_r} \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial r}.$$

Zusammengefasst erhält man

$$\text{grad}(\underline{\phi}) = \frac{1}{g_r} \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{g_\vartheta} \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial \vartheta} \vec{u}_\vartheta + \frac{1}{g_\varphi} \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial \varphi} \vec{u}_\varphi \quad (4.27)$$

$$= \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial \vartheta} \vec{u}_\vartheta + \frac{1}{r \sin(\vartheta)} \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial \varphi} \vec{u}_\varphi, \quad (4.28)$$

wobei in der letzten Zeile die metrischen Größen  $g_r$ ,  $g_\vartheta$  und  $g_\varphi$  für Kugelkoordinaten gemäß (4.11), (4.12) und (4.13) eingesetzt wurden.

#### 4.2.3.2. Divergenz

Eine Rechnung analog zu Abschnitt 1.2.3.2 ergibt für ein infinitesimales Volumenelement  $dV$

$$\begin{aligned}
 \oiint_{\partial dV} \langle \vec{D}, d\vec{A} \rangle = & \underline{D}_r \left( r + \frac{dr}{2}, \vartheta, \varphi \right) \cdot g_\vartheta \left( r + \frac{dr}{2}, \vartheta, \varphi \right) \cdot g_\varphi \left( r + \frac{dr}{2}, \vartheta, \varphi \right) \cdot d\vartheta \cdot d\varphi \\
 & - \underline{D}_r \left( r - \frac{dr}{2}, \vartheta, \varphi \right) \cdot g_\vartheta \left( r - \frac{dr}{2}, \vartheta, \varphi \right) \cdot g_\varphi \left( r - \frac{dr}{2}, \vartheta, \varphi \right) \cdot d\vartheta \cdot d\varphi \\
 & + \underline{D}_\vartheta \left( r, \vartheta + \frac{d\vartheta}{2}, \varphi \right) \cdot g_r \left( r, \vartheta + \frac{d\vartheta}{2}, \varphi \right) \cdot g_\varphi \left( r, \vartheta + \frac{d\vartheta}{2}, \varphi \right) \cdot dr \cdot d\varphi \\
 & - \underline{D}_\vartheta \left( r, \vartheta - \frac{d\vartheta}{2}, \varphi \right) \cdot g_r \left( r, \vartheta - \frac{d\vartheta}{2}, \varphi \right) \cdot g_\varphi \left( r, \vartheta - \frac{d\vartheta}{2}, \varphi \right) \cdot dr \cdot d\varphi \\
 & + \underline{D}_\varphi \left( r, \vartheta, \varphi + \frac{d\varphi}{2} \right) \cdot g_r \left( r, \vartheta, \varphi + \frac{d\varphi}{2} \right) \cdot g_\vartheta \left( r, \vartheta, \varphi + \frac{d\varphi}{2} \right) \cdot dr \cdot d\vartheta \\
 & - \underline{D}_\varphi \left( r, \vartheta, \varphi - \frac{d\varphi}{2} \right) \cdot g_r \left( r, \vartheta, \varphi - \frac{d\varphi}{2} \right) \cdot g_\vartheta \left( r, \vartheta, \varphi - \frac{d\varphi}{2} \right) \cdot dr \cdot d\vartheta.
 \end{aligned}$$

Dies in die Definition der Divergenz (1.31) eingesetzt ergibt mit dem Volumenelement  $dV$  gemäß (4.25)

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div}(\vec{D}) = & \lim_{dr d\vartheta d\varphi \rightarrow 0} \frac{\oiint_{\partial dV} \langle \vec{D}, d\vec{A} \rangle}{\underbrace{g_r g_\vartheta g_\varphi dr d\vartheta d\varphi}_{dV}} \\
 = & \frac{1}{g_r g_\vartheta g_\varphi} \left( \frac{\partial}{\partial r} (\underline{D}_r g_\vartheta g_\varphi) + \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\underline{D}_\vartheta g_r g_\varphi) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (\underline{D}_\varphi g_r g_\vartheta) \right) \quad (4.29)
 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \underline{D}_r) + \frac{1}{r \sin(\vartheta)} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin(\vartheta) \underline{D}_\vartheta) + \frac{1}{r \sin(\vartheta)} \frac{\partial \underline{D}_\varphi}{\partial \varphi}, \quad (4.30)$$

wobei in der letzten Zeile die metrischen Größen  $g_r$ ,  $g_\vartheta$  und  $g_\varphi$  für Kugelkoordinaten gemäß (4.11), (4.12) und (4.13) eingesetzt wurden.

### 4.2.3.3. Rotation

Eine Rechnung analog zu Abschnitt 1.2.1.2 ergibt für ein infinitesimales Flächenelement  $dA_\varphi$

$$\begin{aligned} \oint_{\partial dA_\varphi} \langle \vec{H}, d\vec{s} \rangle &= \underline{H}_r \left( r, \vartheta - \frac{d\vartheta}{2}, \varphi \right) \cdot g_r \left( r, \vartheta - \frac{d\vartheta}{2}, \varphi \right) \cdot dr \\ &\quad + \underline{H}_\vartheta \left( r + \frac{dr}{2}, \vartheta, \varphi \right) \cdot g_\vartheta \left( r + \frac{dr}{2}, \vartheta, \varphi \right) \cdot d\vartheta \\ &\quad - \underline{H}_r \left( r, \vartheta + \frac{d\vartheta}{2}, \varphi \right) \cdot g_r \left( r, \vartheta + \frac{d\vartheta}{2}, \varphi \right) \cdot dr \\ &\quad - \underline{H}_\vartheta \left( r - \frac{dr}{2}, \vartheta, \varphi \right) \cdot g_\vartheta \left( r - \frac{dr}{2}, \vartheta, \varphi \right) \cdot d\vartheta. \end{aligned}$$

Dies in die Definition der Rotation (1.13) eingesetzt ergibt mit dem Flächenelement  $dA_\varphi$  gemäß (4.24) die  $\varphi$ -Komponente der Rotation

$$\left[ \text{rot}(\vec{H}) \right]_\varphi = \lim_{dr d\vartheta \rightarrow 0} \frac{\oint_{\partial dA_\varphi} \langle \vec{H}, d\vec{s} \rangle}{\underbrace{g_r g_\vartheta dr d\vartheta}_{dA_\varphi}} = \frac{1}{g_r g_\vartheta} \left( \frac{\partial}{\partial r} (\underline{H}_\vartheta g_\vartheta) - \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\underline{H}_r g_r) \right).$$

Die übrigen Komponenten erhält man auf analoge Art und Weise, so dass man zusammengefasst das Endergebnis

$$\begin{aligned} \text{rot}(\vec{H}) &= \frac{1}{g_\vartheta g_\varphi} \left( \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\underline{H}_\varphi g_\varphi) - \frac{\partial}{\partial \varphi} (\underline{H}_\vartheta g_\vartheta) \right) \vec{u}_r \\ &\quad + \frac{1}{g_r g_\varphi} \left( \frac{\partial}{\partial \varphi} (\underline{H}_r g_r) - \frac{\partial}{\partial r} (\underline{H}_\varphi g_\varphi) \right) \vec{u}_\vartheta \\ &\quad + \frac{1}{g_r g_\vartheta} \left( \frac{\partial}{\partial r} (\underline{H}_\vartheta g_\vartheta) - \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\underline{H}_r g_r) \right) \vec{u}_\varphi \end{aligned} \quad (4.31)$$

$$\begin{aligned} &= \left( \frac{1}{r \sin(\vartheta)} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin(\vartheta) \underline{H}_\varphi) - \frac{1}{r \sin(\vartheta)} \frac{\partial \underline{H}_\vartheta}{\partial \varphi} \right) \vec{u}_r \\ &\quad + \left( \frac{1}{r \sin(\vartheta)} \frac{\partial \underline{H}_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \underline{H}_\varphi) \right) \vec{u}_\vartheta \\ &\quad + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \underline{H}_\vartheta) - \frac{1}{r} \frac{\partial \underline{H}_r}{\partial \vartheta} \right) \vec{u}_\varphi \end{aligned} \quad (4.32)$$

erhält, wobei in der letzten Gleichung die metrischen Größen  $g_r$ ,  $g_\vartheta$  und  $g_\varphi$  für Kugelkoordinaten gemäß (4.11), (4.12) und (4.13) eingesetzt wurden.

#### 4.2.3.4. Laplace-Operator

Anwenden des skalaren Laplace-Operators (3.15) auf ein Skalarfeld  $\underline{\phi}$  ergibt

$$\begin{aligned} \Delta \underline{\phi} &= \operatorname{div}(\operatorname{grad}(\underline{\phi})) = \operatorname{div}\left(\frac{1}{g_r} \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{g_\vartheta} \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial \vartheta} \vec{u}_\vartheta + \frac{1}{g_\varphi} \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial \varphi} \vec{u}_\varphi\right) \\ &= \frac{1}{g_r g_\vartheta g_\varphi} \left( \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{g_\vartheta g_\varphi}{g_r} \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \frac{g_r g_\varphi}{g_\vartheta} \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial \vartheta} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{g_r g_\vartheta}{g_\varphi} \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial \varphi} \right) \right) \end{aligned} \quad (4.33)$$

$$= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin(\vartheta)} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin(\vartheta) \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2(\vartheta)} \frac{\partial^2 \underline{\phi}}{\partial \varphi^2}. \quad (4.34)$$

In der letzten Zeile wurden die metrischen Größen  $g_r$ ,  $g_\vartheta$  und  $g_\varphi$  für Kugelkoordinaten gemäß (4.11), (4.12) und (4.13) eingesetzt.

**Aufgabe 4.1** Ein weiteres häufig verwendetes Koordinatensystem sind die Zylinderkoordinaten Radius  $r$ , Azimutwinkel  $\varphi$  und Höhe  $z$ , siehe Abbildung 4.2. Die kartesischen Koordinaten  $x$ ,  $y$  und  $z$  ergeben sich als Funktionen von Radius  $r$ , Azimutwinkel  $\varphi$  und Höhe  $z$  wie folgt:

$$\begin{aligned} x &= r \cos(\varphi), \\ y &= r \sin(\varphi), \\ z &= z. \end{aligned}$$

Berechnen Sie die Tangentialvektoren, die metrischen Größen, die Integrations-elemente und die Differentialoperatoren für Zylinderkoordinaten!

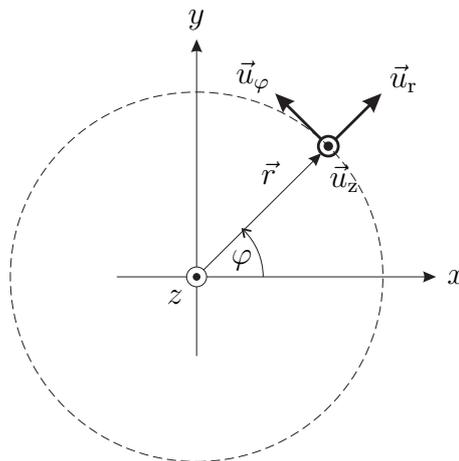


Abbildung 4.2.: Zylinderkoordinaten

### 4.3. Berechnen des magnetischen Vektorpotentials

Die folgenden Betrachtungen gelten nur für homogene Dielektrika. Zunächst wird ein in  $z$ -Richtung orientierter idealer elektrischer Dipol (Hertzscher Dipol) im Ursprung betrachtet, siehe Abbildung 4.3. Der ideale elektrische Dipol besteht aus zwei im Gegentakt oszillierenden elektrischen Ladungen  $\underline{Q}$  und  $-\underline{Q}$  in einem infinitesimalen Abstand  $l$ . Zwischen diesen Ladungen fließt ein elektrischer Linienstrom

$$\underline{I}_0 = j\omega\underline{Q},$$

siehe Abschnitt 1.3. Trotz des infinitesimalen Abstands  $l$  soll das elektrische Dipolmoment

$$\underline{Q}l = \frac{\underline{I}_0 l}{j\omega} \quad (4.35)$$

einen endlichen Wert annehmen.

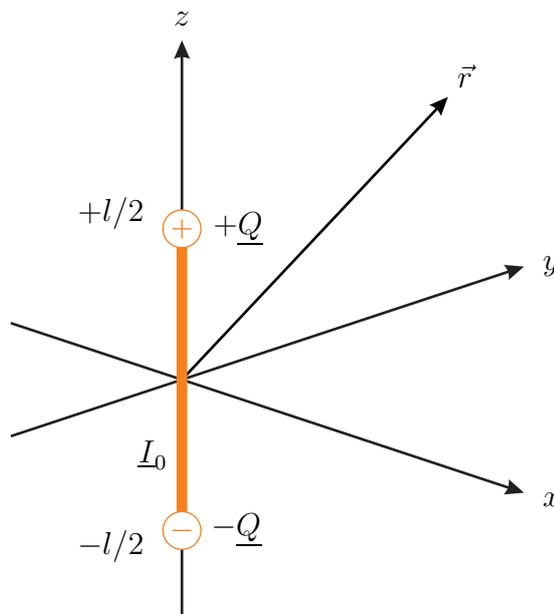


Abbildung 4.3.: Idealer elektrischer Dipol

Die elektrische Stromdichte  $\vec{J}(\vec{r})$  mit der  $z$ -Komponente

$$\underline{J}_z(\vec{r}) = \underline{I}_0 l \delta(\vec{r})$$

erzeugt die  $z$ -Komponente  $\underline{A}_z$  des magnetischen Vektorpotentials  $\vec{A}$ . Außerhalb des Ursprungs, das heißt für  $r > 0$  ist die  $z$ -Komponente  $\underline{J}_z(\vec{r})$  der elektrischen

Stromdichte  $\vec{J}(\vec{r})$  Null und aus der inhomogenen Helmholtz-Gleichung (4.5) folgt die homogene Helmholtz-Gleichung

$$\Delta \underline{A}_z + \beta^2 \underline{A}_z = 0.$$

Die hier gesuchte Lösung der homogenen Helmholtz-Gleichung muss kugelsymmetrisch sein, das heißt die  $z$ -Komponente  $\underline{A}_z$  des magnetischen Vektorpotentials  $\vec{A}$  darf nur vom Radius  $r$  und nicht von Poldistanzwinkel  $\vartheta$  und Azimutwinkel  $\varphi$  abhängen. Mit (4.34) folgt die homogene Helmholtz-Gleichung

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \underline{A}_z}{\partial r} \right) + \beta^2 \underline{A}_z = 0$$

für ein kugelsymmetrisches Szenario. Man findet die hier interessierende retardierte Lösung

$$\underline{A}_z \sim \frac{1}{r} e^{-j\beta r}$$

sowie die wegen Verletzens des Kausalitätsprinzips physikalisch unsinnige avancierte Lösung

$$\underline{A}_z \sim \frac{1}{r} e^{+j\beta r}.$$

Zum Bestimmen des Proportionalitätsfaktors betrachten wir die  $z$ -Komponente  $\underline{A}_z$  des magnetischen Vektorpotentials  $\vec{A}$  in unmittelbarer Nähe des idealen elektrischen Dipols, das heißt für sehr kleine  $r \ll 1/\beta$ . Dann ist die Phasenkonstante  $\beta$  vernachlässigbar klein und die  $z$ -Komponente

$$\underline{A}_z \sim \frac{1}{r}$$

des magnetischen Vektorpotentials  $\vec{A}$  muss der Poisson-Gleichung

$$\Delta \underline{A}_z = \text{div}(\text{grad}(\underline{A}_z)) = -\mu I_0 l \delta(\vec{r})$$

genügen, siehe (4.5) und (3.15). Für eine kleine Kugel um den Ursprung folgt mit dem Satz von Gauss (1.33) und (4.28):

$$\begin{aligned} \iiint_{\text{Kugel}} \text{div} \left( \text{grad} \left( \frac{1}{r} \right) \right) dV &= \oiint_{\text{Kugeloberfläche}} \left\langle \text{grad} \left( \frac{1}{r} \right), d\vec{A}_r \right\rangle \\ &= - \oiint_{\text{Kugeloberfläche}} \frac{1}{r^2} dA_r = -4\pi = - \iiint_{\text{Kugel}} 4\pi \delta(\vec{r}) dV, \\ \Delta \left( \frac{1}{r} \right) &= \text{div} \left( \text{grad} \left( \frac{1}{r} \right) \right) = -4\pi \delta(\vec{r}). \end{aligned}$$

### 4.3. Berechnen des magnetischen Vektorpotentials

Der Proportionalitätsfaktor muss also  $\frac{\mu \underline{I}_0 l}{4\pi}$  sein und man erhält die  $z$ -Komponente

$$\underline{A}_z(\vec{r}) = \mu \underline{I}_0 l \underbrace{\frac{e^{-j\beta r}}{4\pi r}}_{\underline{\psi}(\vec{r})} \quad (4.36)$$

des magnetischen Vektorpotentials  $\vec{A}$  eines idealen elektrischen Dipols im Ursprung. Die im Folgenden immer wieder verwendete, einer Kugelwelle entsprechende Elementarlösung

$$\underline{\psi}(\vec{r}) = \frac{e^{-j\beta r}}{4\pi r} = \frac{e^{-j\beta \|\vec{r}\|}}{4\pi \|\vec{r}\|} \quad (4.37)$$

ist als Greensche Funktion des freien Raumes bekannt.

Aufgrund der Verschiebungsinvarianz der Helmholtz-Gleichung (4.5) ergibt sich die von einem an den Ort  $\vec{r}'$  verschobenen idealen elektrischen Dipol

$$\underline{J}_z(\vec{r}) = \underline{I}_0 l \delta(\vec{r} - \vec{r}')$$

erzeugte  $z$ -Komponente des magnetischen Vektorpotentials  $\vec{A}$  zu

$$\underline{A}_z(\vec{r}) = \mu \underline{I}_0 l \underline{\psi}(\vec{r} - \vec{r}').$$

Mit Hilfe der Ausblendeigenschaft des Dirac-Impulses  $\delta(\cdot)$  kann man eine beliebige elektrische Stromdichte  $\underline{J}_z(\vec{r})$  in  $z$ -Richtung als gewichtete Überlagerung von verschobenen idealen elektrischen Dipolen darstellen:

$$\underline{J}_z(\vec{r}) = \iiint_{V'} \underline{J}_z(\vec{r}') \delta(\vec{r} - \vec{r}') dV'.$$

Aufgrund der Linearität und Verschiebungsinvarianz der Helmholtz-Gleichung (4.5) ergibt sich die  $z$ -Komponente des magnetischen Vektorpotentials  $\vec{A}$  zu

$$\underline{A}_z(\vec{r}) = \iiint_{V'} \mu \underline{J}_z(\vec{r}') \underline{\psi}(\vec{r} - \vec{r}') dV'. \quad (4.38)$$

Formal handelt es sich bei diesem Integral um ein Faltungsintegral. Die  $z$ -Komponente  $\underline{A}_z(\vec{r})$  des magnetischen Vektorpotentials  $\vec{A}$  erhält man durch Falten der mit  $\mu$  skalierten  $z$ -Komponente  $\underline{J}_z(\vec{r})$  der elektrischen Stromdichte  $\vec{J}(\vec{r})$  mit der Greenschen Funktion  $\underline{\psi}(\vec{r})$ .

Gleichartige Betrachtungen gelten auch für die übrigen Komponenten des magnetischen Vektorpotentials  $\vec{A}$ . Bei Verwenden kartesischer Koordinaten erhält man zusammengefasst das magnetische Vektorpotential

$$\vec{A}(\vec{r}) = \iiint_{V'} \mu \vec{J}(\vec{r}') \underline{\psi}(\vec{r} - \vec{r}') dV'. \quad (4.39)$$

Mit den hier eingeführten Hilfsmitteln ist es beispielsweise möglich, bei gegebener Strombelegung  $\vec{J}(\vec{r}')$  in einer Antenne das abgestrahlte elektromagnetische Feld zu berechnen. Hierzu wird man zunächst das magnetische Vektorpotential  $\vec{A}(\vec{r})$  und daraus mit (4.6) und (4.7) die Feldstärken berechnen.

## 4.4. Fernfeldnäherung des magnetischen Vektorpotentials

Beispielsweise beim Einsatz in Funkkommunikationssystemen interessiert man sich primär für das Fernfeld der Sendeantenne, das heißt für das elektromagnetische Feld in einer relativ zu den Antennenabmessungen  $r'$  und zu  $1/\beta$  großen Entfernung  $r$  von der Sendeantenne.

Allgemein gilt nach dem Kosinussatz

$$\|\vec{r} - \vec{r}'\| = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\xi)},$$

siehe Abbildung 4.4. Im Fernfeld ist  $r'$  relativ klein, das heißt es gilt  $r' \ll r$ , und man kann die in  $r'$  lineare Approximation

$$\|\vec{r} - \vec{r}'\| \approx r - r' \cos(\xi)$$

verwenden. Eingesetzt in die Greensche Funktion (4.37) erhält man mit dem in die betrachtete Ausbreitungsrichtung zeigenden Phasenvektor  $\vec{\beta}$  gemäß (2.13) die auch als Fraunhofer-Näherung bezeichnete Fernfeldnäherung der Greenschen Funktion<sup>1</sup>

$$\underline{\psi}(\vec{r} - \vec{r}') \approx \frac{e^{-j\beta(r-r' \cos(\xi))}}{4\pi r} = \frac{e^{-j\beta r}}{4\pi r} e^{j\beta r' \cos(\xi)} = \frac{e^{-j\beta r}}{4\pi r} e^{j\langle \vec{\beta}, \vec{r}' \rangle}. \quad (4.40)$$

Durch Einsetzen der Fernfeldnäherung der Greenschen Funktion in (4.39) erhält man die Fernfeldnäherung des magnetischen Vektorpotentials in kartesischen Koordinaten

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{r}) &\approx \underbrace{\frac{\mu e^{-j\beta r}}{4\pi r}}_{\text{Abstandsfaktor}} \underbrace{\iiint_{V'} \vec{J}(\vec{r}') e^{j\beta r' \cos(\xi)} dV'}_{\vec{E}} \\ &= \underbrace{\frac{\mu e^{-j\beta r}}{4\pi r}}_{\text{Abstandsfaktor}} \underbrace{\iiint_{V'} \vec{J}(\vec{r}') e^{j\langle \vec{\beta}, \vec{r}' \rangle} dV'}_{\vec{E}}. \end{aligned} \quad (4.41)$$

---

<sup>1</sup>Durch Einsetzen der auch bei nicht ganz so großen Entfernungen  $r$  guten quadratischen Approximation erhält man die Fresnel-Näherung der Greenschen Funktion.

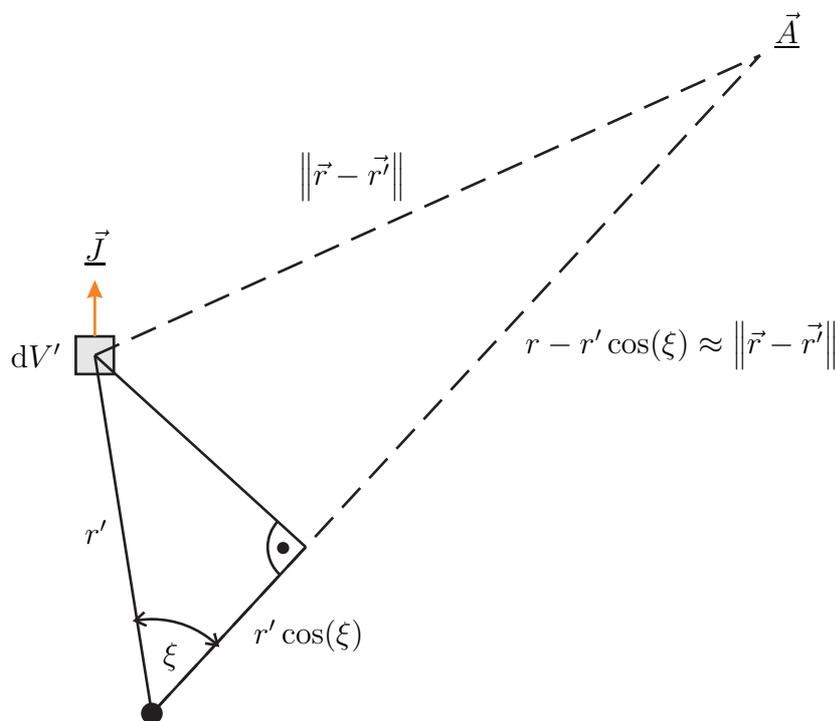


Abbildung 4.4.: Zur Fernfeldnäherung

Der Faktor  $e^{j\langle\vec{\beta},\vec{r}'\rangle}$  resultiert aus den bei der Überlagerung der magnetischen Vektorpotentiale  $\vec{A}(\vec{r})$  der elektrischen Stromdichten  $\vec{J}(\vec{r}')$  in den Volumenelementen  $dV'$  zu berücksichtigenden geometriebedingten Phasenverschiebungen. Die Richtungsabhängigkeit des magnetischen Vektorpotentials  $\vec{A}(\vec{r})$  wird im Fernfeld durch den vektoriellen Richtungsfaktor

$$\vec{F} = \iiint_{V'} \vec{J}(\vec{r}') e^{j\beta r' \cos(\xi)} dV' = \iiint_{V'} \vec{J}(\vec{r}') e^{j\langle\vec{\beta},\vec{r}'\rangle} dV' \quad (4.42)$$

beschrieben. Die Entfernungsabhängigkeit des magnetischen Vektorpotentials  $\vec{A}(\vec{r})$  ist im Fernfeld durch den Abstandsfaktor  $\frac{\mu e^{-j\beta r}}{4\pi r}$  gegeben, das heißt der Betrag des magnetischen Vektorpotentials  $\vec{A}(\vec{r})$  nimmt im Fernfeld mit  $1/r$  ab. Die Wellenlänge ist

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta}. \quad (4.43)$$

Bei vielen Antennen gelingt es zumindest näherungsweise, einen Nullpunkt des Koordinatensystems so zu definieren, dass die Argumente der Komponenten des vektoriellen Richtungsfaktors  $\vec{F}(\vartheta, \varphi)$  für den interessierenden Winkelbereich

$\vartheta$  und  $\varphi$  konstant sind. Die im Fernfeld beobachtete elektromagnetische Welle scheint dann eine von diesem als Phasenzentrum bezeichneten Nullpunkt ausgehende Kugelwelle zu sein.

**Aufgabe 4.2** Zeigen Sie, dass das Phasenzentrum einer Antenne mit einer zum Ursprung symmetrischen elektrischen Stromdichte

$$\underline{\vec{J}}(\vec{r}') = \underline{\vec{J}}^*(-\vec{r}')$$

im Ursprung liegt!

## 4.5. Berechnen der Feldstärken

Durch Berechnen der Rotation (4.32) des magnetischen Vektorpotentials  $\underline{\vec{A}}$  in Kugelkoordinaten erhält man gemäß (4.6) unter Verwenden (1.52) die magnetische Feldstärke

$$\begin{aligned} \underline{\vec{H}} &= \frac{1}{\mu} \operatorname{rot}(\underline{\vec{A}}) = \frac{1}{\mu r} \left( \frac{1}{\sin(\vartheta)} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin(\vartheta) \underline{A}_\varphi) - \frac{1}{\sin(\vartheta)} \frac{\partial \underline{A}_\vartheta}{\partial \varphi} \right) \vec{u}_r \\ &+ \frac{1}{\mu r} \left( \frac{1}{\sin(\vartheta)} \frac{\partial \underline{A}_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r} (r \underline{A}_\varphi) \right) \vec{u}_\vartheta + \frac{1}{\mu r} \left( \frac{\partial}{\partial r} (r \underline{A}_\vartheta) - \frac{\partial \underline{A}_r}{\partial \vartheta} \right) \vec{u}_\varphi. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Im Fernfeld mit  $r \gg 1/\beta$  dominieren die nur mit  $1/r$  abnehmenden Terme und man kann alle stärker abnehmenden Terme vernachlässigen. Mit (4.41) erhält man die Fernfeldnäherung

$$\begin{aligned} \underline{\vec{H}} &\approx -\frac{1}{\mu r} \frac{\partial}{\partial r} (r \underline{A}_\varphi) \vec{u}_\vartheta + \frac{1}{\mu r} \frac{\partial}{\partial r} (r \underline{A}_\vartheta) \vec{u}_\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{e^{-j\beta r}}{4\pi} \right) (-\underline{F}_\varphi \vec{u}_\vartheta + \underline{F}_\vartheta \vec{u}_\varphi) \\ &= \frac{j\beta e^{-j\beta r}}{4\pi r} (\underline{F}_\varphi \vec{u}_\vartheta - \underline{F}_\vartheta \vec{u}_\varphi) \end{aligned} \quad (4.45)$$

$$= j \frac{\beta}{\mu} \underline{A}_\varphi \vec{u}_\vartheta - j \frac{\beta}{\mu} \underline{A}_\vartheta \vec{u}_\varphi = j \frac{\beta}{\mu} \underline{\vec{A}} \times \vec{u}_r \quad (4.46)$$

für die magnetische Feldstärke.  $\underline{F}_\vartheta$  und  $\underline{F}_\varphi$  sind die  $\vartheta$ -Komponente beziehungsweise die  $\varphi$ -Komponente des vektoriiellen Richtungsfaktors  $\underline{\vec{F}}$  gemäß (4.42).

Mit Hilfe des Durchflutungsgesetzes (1.17), (1.48) und der Rotation (4.32) in Kugelkoordinaten kann man nun aus der magnetischen Feldstärke  $\underline{\vec{H}}$  die elektrische Feldstärke

$$\begin{aligned} \underline{\vec{E}} &= \frac{1}{j\omega\epsilon} \operatorname{rot}(\underline{\vec{H}}) = \frac{1}{j\omega\epsilon r} \left( \left( \frac{1}{\sin(\vartheta)} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin(\vartheta) \underline{H}_\varphi) - \frac{1}{\sin(\vartheta)} \frac{\partial \underline{H}_\vartheta}{\partial \varphi} \right) \vec{u}_r \right. \\ &+ \left. \left( \frac{1}{\sin(\vartheta)} \frac{\partial \underline{H}_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r} (r \underline{H}_\varphi) \right) \vec{u}_\vartheta + \left( \frac{\partial}{\partial r} (r \underline{H}_\vartheta) - \frac{\partial \underline{H}_r}{\partial \vartheta} \right) \vec{u}_\varphi \right) \end{aligned} \quad (4.47)$$

berechnen. Wenn man wieder alle stärker als mit  $1/r$  abnehmende Terme vernachlässigt, erhält man mit (4.2) und (4.41) die Fernfeldnäherung der elektrischen Feldstärke

$$\begin{aligned}\vec{E} &\approx \frac{1}{j\omega\epsilon r} \left( -\frac{\partial}{\partial r} (r\vec{H}_\varphi) \vec{u}_\vartheta + \frac{\partial}{\partial r} (r\vec{H}_\vartheta) \vec{u}_\varphi \right) \approx \frac{\beta}{\omega\epsilon r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{e^{-j\beta r}}{4\pi} \right) (\underline{E}_\vartheta \vec{u}_\vartheta + \underline{E}_\varphi \vec{u}_\varphi) \\ &= -j \frac{\beta^2 e^{-j\beta r}}{\omega\epsilon 4\pi r} (\underline{E}_\vartheta \vec{u}_\vartheta + \underline{E}_\varphi \vec{u}_\varphi) \quad (4.48)\end{aligned}$$

$$= -j\omega (\underline{A}_\vartheta \vec{u}_\vartheta + \underline{A}_\varphi \vec{u}_\varphi) = j\omega (\vec{A} \times \vec{u}_r) \times \vec{u}_r. \quad (4.49)$$

Mit dem Feldwellenwiderstand

$$Z_F = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad (4.50)$$

und (4.2) folgt aus (4.46) und (4.49) für das Fernfeld

$$\vec{E} \approx Z_F \vec{H} \times \vec{u}_r. \quad (4.51)$$

Die von einer Antenne abgestrahlte elektromagnetische Welle ist im Fernfeld eine transversalelektromagnetische Welle. Magnetischer Feldstärkevektor  $\vec{H}$  und elektrischer Feldstärkevektor  $\vec{E}$  sind in Phase und stehen zu jedem Zeitpunkt senkrecht aufeinander. Die Feldstärken nehmen mit  $1/r$  ab und es gibt eine Richtungsabhängigkeit der Feldstärken. Der in (1.80) eingeführte komplexe Poynting-Vektor

$$\vec{S} \approx \frac{1}{2} (Z_F \vec{H} \times \vec{u}_r) \times \vec{H}^* = \frac{1}{2} Z_F \|\vec{H}\|^2 \vec{u}_r = \frac{1}{2Z_F} \|\vec{E}\|^2 \vec{u}_r \quad (4.52)$$

zeigt im Fernfeld von der Antenne radial nach außen weg und nimmt mit  $1/r^2$  ab, was auch aus der Energieerhaltung folgt. Da der komplexe Poynting-Vektor  $\vec{S}$  im Fernfeld reell ist, transportiert die abgestrahlte elektromagnetische Welle im Fernfeld nur Wirkleistung, deren Betrag durch die Intensität

$$S = \|\text{Re}(\vec{S})\| \approx \frac{1}{2} Z_F \|\vec{H}\|^2 = \frac{1}{2Z_F} \|\vec{E}\|^2 \quad (4.53)$$

gegeben ist. Ausgehend von (1.81) kann man die abgestrahlte Leistung  $P$  durch Integration der Intensität  $S$  über eine Kugeloberfläche mit dem Flächenelement  $dA_r$  gemäß (4.22) berechnen:

$$P = \iint_{\text{Kugeloberfläche}} S dA_r = \int_{\vartheta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} S r^2 \sin(\vartheta) d\varphi d\vartheta. \quad (4.54)$$

Als Beispiel wird der ideale elektrische Dipol betrachtet. Das magnetische Vektorpotential  $\vec{A}$  des idealen elektrischen Dipols wurde bereits in (4.36) berechnet. Umgerechnet in Kugelkoordinaten erhält man

$$\vec{A} = \langle \vec{A}, \vec{u}_r \rangle \vec{u}_r + \langle \vec{A}, \vec{u}_\vartheta \rangle \vec{u}_\vartheta + \langle \vec{A}, \vec{u}_\varphi \rangle \vec{u}_\varphi = \frac{\mu \underline{I}_0 l e^{-j\beta r}}{4\pi r} (\cos(\vartheta) \vec{u}_r - \sin(\vartheta) \vec{u}_\vartheta),$$

siehe (4.14), (4.15) und (4.16).

Mit (4.44) erhält man die magnetische Feldstärke

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu r} \left( \frac{\partial}{\partial r} (r \underline{A}_\vartheta) - \frac{\partial \underline{A}_r}{\partial \vartheta} \right) \vec{u}_\varphi = j\beta \underline{I}_0 l \frac{e^{-j\beta r}}{4\pi r} \left( 1 + \frac{1}{j\beta r} \right) \sin(\vartheta) \vec{u}_\varphi \quad (4.55)$$

$$\approx j\beta \underline{I}_0 l \frac{e^{-j\beta r}}{4\pi r} \sin(\vartheta) \vec{u}_\varphi \quad (4.56)$$

des idealen elektrischen Dipols und mit (4.47), (4.2) und (4.50) die elektrische Feldstärke

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{1}{j\omega\epsilon r} \frac{1}{\sin(\vartheta)} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin(\vartheta) \underline{H}_\varphi) \vec{u}_r - \frac{1}{j\omega\epsilon r} \frac{\partial}{\partial r} (r \underline{H}_\varphi) \vec{u}_\vartheta \\ &= j\beta Z_F \underline{I}_0 l \frac{e^{-j\beta r}}{4\pi r} \left( \left( \frac{2}{j\beta r} + \frac{2}{(j\beta r)^2} \right) \cos(\vartheta) \vec{u}_r \right. \\ &\quad \left. + \left( 1 + \frac{1}{j\beta r} + \frac{1}{(j\beta r)^2} \right) \sin(\vartheta) \vec{u}_\vartheta \right) \end{aligned} \quad (4.57)$$

$$\approx j\beta Z_F \underline{I}_0 l \frac{e^{-j\beta r}}{4\pi r} \sin(\vartheta) \vec{u}_\vartheta \quad (4.58)$$

des idealen elektrischen Dipols. Es handelt sich um eine transversalmagnetische Welle. Die jeweils in den letzten Zeilen angegebenen Näherungen gelten im Fernfeld, wo es sich erwartungsgemäß um eine transversalelektromagnetische Welle handelt. Das gesamte elektromagnetische Feld ist, wie aufgrund der Antennen-geometrie erwartet, rotationssymmetrisch bezüglich der  $z$ -Achse. Man erkennt, dass die magnetischen Feldlinien kreisförmig um die  $z$ -Achse, das heißt entlang von Breitenkreisen auf Kugeln um die Antenne verlaufen. Die elektrischen Feldlinien verlaufen im Fernfeld entlang der Meridiankreise auf Kugeln um die Antenne, siehe Abbildung 4.5. Die Richtungsabhängigkeit der Feldstärken im Fernfeld wird durch den Faktor  $\sin(\vartheta)$  beschrieben. Die transversalelektromagnetische Welle im Fernfeld ist linear vertikal polarisiert.

Der komplexe Poynting-Vektor

$$\vec{S} \approx \frac{1}{2} Z_F \left( \frac{\beta |\underline{I}_0| l \sin(\vartheta)}{4\pi r} \right)^2 \vec{u}_r \quad (4.59)$$

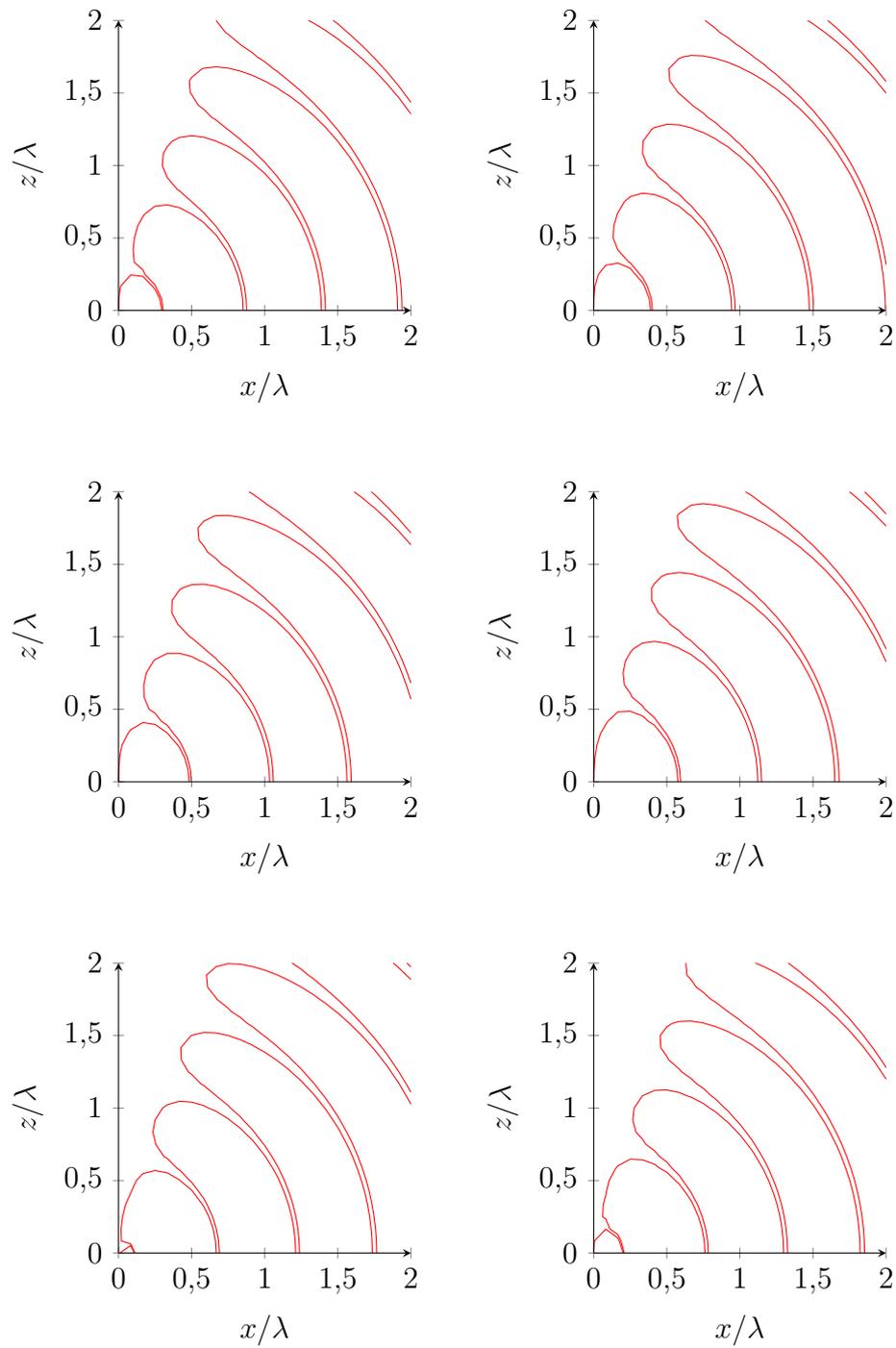


Abbildung 4.5.: Elektrisches Feld eines idealen elektrischen Dipols [KD90]. Momentaufnahmen im Abstand einer zwölftel Periodendauer

des idealen elektrischen Dipols gemäß (4.52) ist im Fernfeld wie erwartet reell und zeigt von der Antenne radial nach außen weg. Die Intensität (4.53) der vom idealen elektrischen Dipol abgestrahlten Welle im Fernfeld ist

$$S \approx \frac{1}{2} Z_F \left( \frac{\beta |\underline{I}_0| l \sin(\vartheta)}{4\pi r} \right)^2. \quad (4.60)$$

Die Intensität  $S$  nimmt erwartungsgemäß mit  $1/r^2$  ab.

## 4.6. Eindeutigkeitstheorem

Das Eindeutigkeitstheorem besagt, dass das elektromagnetische Feld in einem möglicherweise quellenhaltigen Gebiet  $V_2$  durch die Tangentialkomponenten der elektrischen Feldstärke  $\underline{\vec{E}}$  oder die Tangentialkomponenten der magnetischen Feldstärke  $\underline{\vec{H}}$  auf der Hülle  $\partial V_2$  eindeutig bestimmt ist. Wenn es mehrere derartige mögliche elektromagnetische Felder mit gleichen Quellen im Gebiet  $V_2$  gäbe, dann müsste die Differenz zweier solcher elektromagnetischer Felder aufgrund der Linearität der Maxwell'schen Gleichungen ein im nun quellenfreien Gebiet  $V_2$  mögliches elektromagnetische Feld

- mit auf der Hülle  $\partial V_2$  verschwindender Differenz der Tangentialkomponenten der elektrischen Feldstärke  $\underline{\vec{E}}$  oder
- mit auf der Hülle  $\partial V_2$  verschwindender Differenz der Tangentialkomponenten der magnetischen Feldstärke  $\underline{\vec{H}}$

sein.<sup>2</sup> Man muss also zeigen, dass das elektromagnetische Feld im quellenfreien Gebiet  $V_2$  bei verschwindenden Tangentialkomponenten der elektrischen Feldstärke  $\underline{\vec{E}}$  oder verschwindenden Tangentialkomponenten der magnetischen Feldstärke  $\underline{\vec{H}}$  auf der Hülle  $\partial V_2$  verschwindet, siehe Abbildung 4.6.

Mit dem komplexen Poynting-Vektor  $\underline{\vec{S}}$  gemäß (1.80) gilt

$$\oiint_{\partial V_2} \langle \underline{\vec{S}}, d\vec{A} \rangle = \underbrace{\oiint_{\infty} \langle \underline{\vec{S}}, d\vec{A} \rangle}_{\text{Hülle im Unendlichen}} - \underbrace{\oiint_{\partial V_1} \langle \frac{1}{2} \underline{\vec{E}} \times \underline{\vec{H}}^*, d\vec{A} \rangle}_0.$$

Das Integral über die Hülle  $\partial V_1$  ist Null, das heißt in das Gebiet  $V_1$  wird keine Leistung abgegeben, falls die Tangentialkomponenten der elektrischen Feldstärke  $\underline{\vec{E}}$  oder die Tangentialkomponenten der magnetischen Feldstärke  $\underline{\vec{H}}$  auf der Hülle

---

<sup>2</sup>Die Differenz der Quellen ist Null.

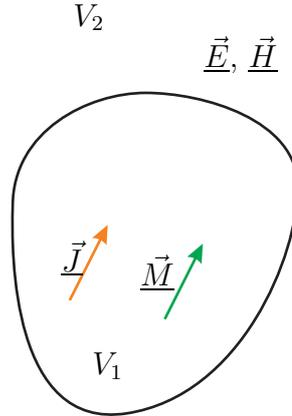


Abbildung 4.6.: Eindeutigkeitstheorem

$\partial V_2$  verschwinden. Da das elektromagnetische Feld im Unendlichen eine transversalelektromagnetische Welle ist, ist das Integral über die Hülle im Unendlichen gemäß (2.29) die reelle und positive abgestrahlte Leistung.

Weiterhin gilt mit dem Satz von Gauß (1.33) und (1.82)

$$\begin{aligned} \oiint_{\partial V_2} \langle \vec{S}, d\vec{A} \rangle &= \iiint_{V_2} \operatorname{div}(\vec{S}) \, dV = \iiint_{V_2} \operatorname{div} \left( \frac{1}{2} \vec{E} \times \vec{H}^* \right) \, dV \\ &= \iiint_{V_2} \frac{1}{2} \left( \langle \operatorname{rot}(\vec{E}), \vec{H}^* \rangle - \langle \vec{E}, \operatorname{rot}(\vec{H}^*) \rangle \right) \, dV. \end{aligned}$$

Einsetzen des Induktionsgesetzes (1.25) bei verschwindender elektrischer Stromdichte  $\vec{J}$  und des Durchflutungsgesetzes (1.17) bei verschwindender magnetischer Stromdichte  $\vec{M}$  ergibt mit (1.52) und (1.48)

$$\begin{aligned} \oiint_{\partial V_2} \langle \vec{S}, d\vec{A} \rangle &= \iiint_{V_2} \frac{1}{2} \left( \langle -j\omega\mu\vec{H}, \vec{H}^* \rangle - \langle \vec{E}, -j\omega\varepsilon\vec{E}^* \rangle \right) \, dV \\ &= -j\omega \iiint_{V_2} \left( \frac{1}{2}\mu \|\vec{H}\|^2 - \frac{1}{2}\varepsilon \|\vec{E}\|^2 \right) \, dV. \end{aligned}$$

Das Ergebnis ist imaginär. Da  $V_2$  quellenfrei ist, kann keine Wirkleistung abgegeben werden und der Realteil muss verschwinden. Da das Integral aber auch reell sein muss, ist der Imaginärteil Null und damit verschwindet auch das elektromagnetische Feld in  $V_2$ .<sup>3</sup>

<sup>3</sup>Theoretisch denkbar wären auch noch nichtverschwindende Felder mit  $\iiint_{V_2} \frac{1}{2}\mu \|\vec{H}\|^2 \, dV =$

## 4.7. Spiegelungsprinzipien

### 4.7.1. Spiegelung am idealen elektrischen Leiter

In der Oberfläche einer unendlich ausgedehnten ideal elektrisch leitenden Ebene werden sich elektrische Flächenstromdichten  $\vec{J}_F$  derart einstellen, dass die Grenzflächenbedingungen erfüllt sind. Insbesondere müssen gemäß (1.67) die Tangentialkomponenten der elektrischen Feldstärke  $\vec{E}$  verschwinden. Wie man zum Beispiel durch Überlagern der elektromagnetischen Felder idealer elektrischer Dipole leicht feststellt, sind die Grenzflächenbedingungen am Ort des idealen elektrischen Leiters auch dann erfüllt, wenn statt der elektrischen Flächenstromdichten  $\vec{J}_F$  gespiegelte Quellen gemäß Abbildung 4.7 vorhanden sind. Die elektromagnetischen Felder im rechten Halbraum sind in beiden Fällen wegen des Eindeutigkeitstheorems identisch, da die Tangentialkomponenten der elektrischen Feldstärken am Ort der Oberfläche des idealen elektrischen Leiters in beiden Fällen gleich Null sind und die Quellen im rechten Halbraum gleich sind, siehe Abschnitt 4.6.

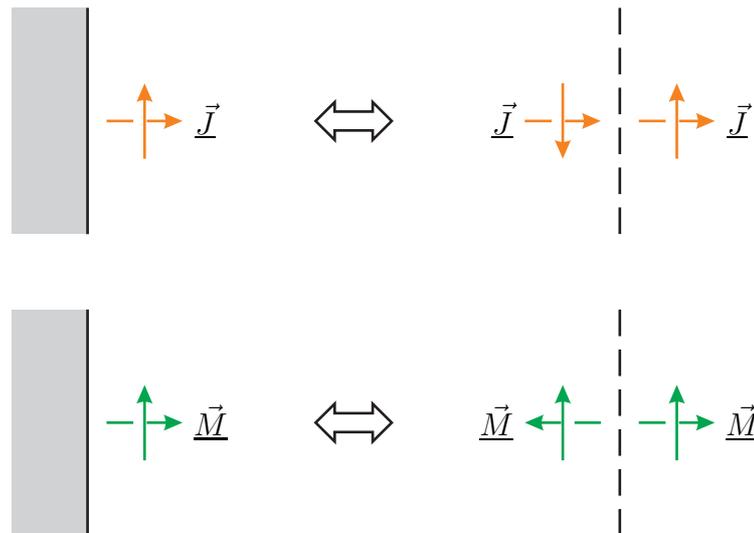


Abbildung 4.7.: Spiegelung elektrischer Stromdichten  $\vec{J}$  und magnetischer Stromdichten  $\vec{M}$  an einer unendlich ausgedehnten ideal elektrisch leitenden Ebene

---

$\iiint_{V_2} \frac{1}{2} \varepsilon \|\vec{E}\|^2 dV$ , die es beispielsweise in idealen verlustfreien Hohlraumresonatoren gibt, siehe Aufgabe 7.4.

### 4.7.2. Spiegelung am idealen magnetischen Leiter

Dual zum Fall der unendlich ausgedehnten ideal elektrisch leitenden Ebene, siehe Abschnitt 4.7.1, kann man auch die Grenzflächenbedingungen an der unendlich ausgedehnten ideal magnetisch leitenden Ebene durch gespiegelte Quellen berücksichtigen, siehe Abbildung 4.8.

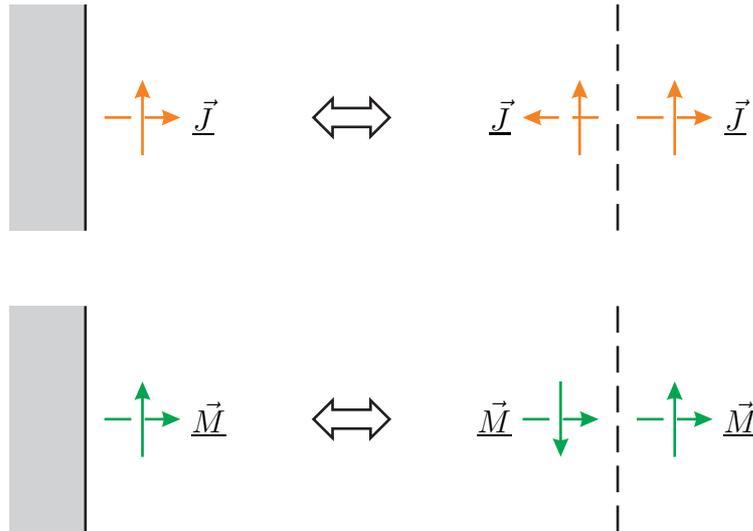


Abbildung 4.8.: Spiegelung elektrischer Stromdichten  $\vec{J}$  und magnetischer Stromdichten  $\vec{M}$  an einer unendlich ausgedehnten ideal magnetisch leitenden Ebene

## 4.8. Huygens'sches Prinzip

Anschaulich kann nach dem Huygens'schen Prinzip jeder Punkt einer Wellenfront als Ausgangspunkt einer sekundären Kugelwelle betrachtet werden und man kann die Wellenfront wieder als Einhüllende dieser sekundären Wellenfronten rekonstruieren. Das Huygens'sche Prinzip ist bei vielen Berechnungen zur Wellenausbreitung hilfreich. Beispielsweise kann ein auf einer beliebigen Hülle um die eigentliche Antenne vorhandenes elektromagnetisches Feld wieder als Ausgangspunkt der elektromagnetischen Welle betrachtet werden, das heißt die Hülle wirkt als virtuelle Antenne. Im Folgenden soll das Huygens'sche Prinzip mathematisch präzise formuliert werden.<sup>4</sup>

<sup>4</sup>Eine formaler Herleitung gelingt mit dem Kirchhoff-Helmholtz-Integral.

Eine Hülle teilt den Raum in ein Gebiet  $V_1$  mit den ein elektromagnetisches Feld erzeugenden Quellen  $\vec{J}$  und  $\vec{M}$  und ein quellenfreies Gebiet  $V_2$ , siehe Abbildung 4.9.  $\vec{E}$  und  $\vec{H}$  sind die Feldstärken des von den Quellen  $\vec{J}$  und  $\vec{M}$  erzeugten, den gesamten aus den Gebieten  $V_1$  und  $V_2$  bestehenden Raum erfüllenden elektromagnetischen Feldes.

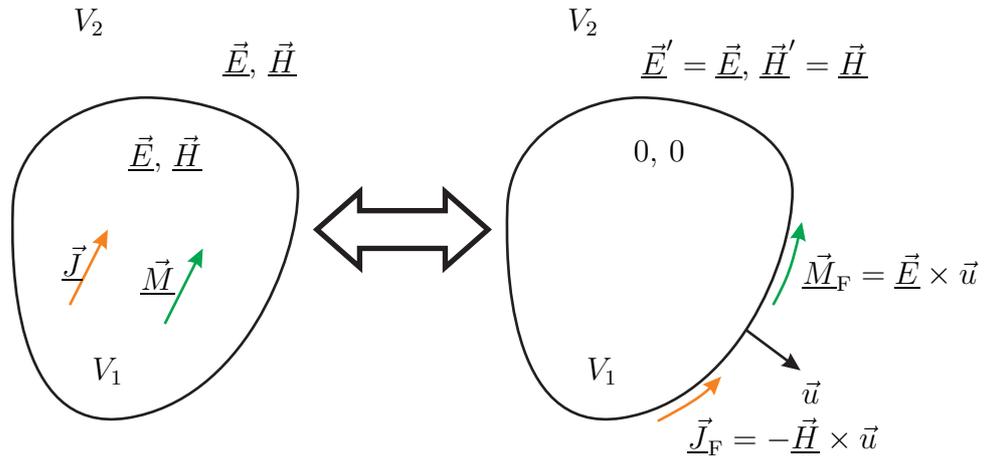


Abbildung 4.9.: Huygens'sches Prinzip

Das elektromagnetische Feld

$$\vec{E}' = \begin{cases} 0 & \text{in } V_1 \\ \vec{E} & \text{in } V_2 \end{cases}$$

und

$$\vec{H}' = \begin{cases} 0 & \text{in } V_1 \\ \vec{H} & \text{in } V_2 \end{cases}.$$

erfüllt zusammen mit den virtuellen Quellen

$$\vec{J}_F = -\vec{H} \times \vec{u} \quad (4.61)$$

und

$$\vec{M}_F = \vec{E} \times \vec{u} \quad (4.62)$$

auf der Hülle des nun quellenfreien und feldfreien Gebiets  $V_1$  die (1.60) und (1.62) entsprechenden Grenzflächenbedingungen auf der Hülle des Gebiets  $V_1$ , ist also bei Abwesenheit der Quellen  $\vec{J}$  und  $\vec{M}$  eine Lösung der Maxwellschen Gleichungen. Aufgrund des Eindeutigkeitstheorems entspricht dieses durch die Flächenstromdichten  $\vec{J}_F$  und  $\vec{M}_F$  bei Abwesenheit der Quellen  $\vec{J}$  und  $\vec{M}$  erzeugte elektromagnetische Feld im Gebiet  $V_2$  dem von den Quellen  $\vec{J}$  und  $\vec{M}$  bei Abwesenheit der

Flächenstromdichten  $\underline{\vec{J}}_F$  und  $\underline{\vec{M}}_F$  erzeugten elektromagnetischen Feld im Gebiet  $V_2$ , siehe Abschnitt 4.6 [Lov01; Sch36].

In der Antennenmesstechnik ist es aufgrund der begrenzten räumlichen Abmessungen von Antennenmessplätzen insbesondere bei niedrigeren Kreisfrequenzen  $\omega$  oft nicht möglich, das eigentlich interessierende Fernfeld direkt messtechnisch zu untersuchen. Stattdessen misst man die Tangentialkomponenten der Feldstärken im Nahfeld auf einer Hülle um die Antenne. Gemäß dem Huygens'schen Prinzip ist es möglich, daraus mit einer sogenannten Nahfeld-Fernfeld-Transformation das Fernfeld zu berechnen.

Das von einer ideal elektrisch leitenden und damit im Inneren feldfreien Antenne abgestrahlte elektromagnetische Feld entspricht dem von der elektrischen Flächenstromdichte  $\underline{\vec{J}}_F$  auf der Antenne bei Nichtvorhandensein der ideal elektrisch leitenden Strukturen abgestrahlten elektromagnetischen Feld. Dieser als Huygens-Äquivalent der Antenne bezeichnete Ansatz rechtfertigt rückwirkend die Annahme, dass die Antenne ihr elektromagnetisches Feld in ein homogenes Dielektrikum abstrahlt, obwohl das Innere der Antenne in der Realität nicht mit dem umgebenden Dielektrikum gefüllt ist.

## 4.9. Momentenmethode

### 4.9.1. Lösungsansatz der Momentenmethode

Normalerweise ist die Strombelegung auf einer Antenne nicht von vornherein bekannt, sondern ergibt sich aus dem Wechselspiel zwischen Strombelegung und abgestrahltem elektromagnetischem Feld. Ziel der folgenden Betrachtungen ist es, unter Berücksichtigen dieser Wechselwirkungen die Strombelegung auf der Antenne zu bestimmen. Es wird der Fall betrachtet, dass die Quelle des elektromagnetischen Feldes ausschließlich die elektrische Flächenstromdichte  $\underline{\vec{J}}_F(\vec{r}')$  ist. Eine Erweiterung auf den Fall, dass auch eine magnetische Flächenstromdichte  $\underline{\vec{M}}_F(\vec{r}')$  vorhanden ist, ist aufgrund der Dualität der Gleichungen leicht möglich.

Für das durch die elektrische Flächenstromdichte  $\underline{\vec{J}}_F(\vec{r}')$  erzeugte magnetische Vektorpotential gilt

$$\underline{\vec{A}}(\vec{r}) = \iint_{A'} \mu \underline{\vec{J}}_F(\vec{r}') \underline{\psi}(\vec{r} - \vec{r}') dA',$$

siehe (4.39). Es wird davon ausgegangen, dass die elektrische Flächenstromdichte  $\underline{\vec{J}}_F(\vec{r}')$  in den homogenen Raum abstrahlt.

Aus (4.7) folgt mit (4.2) und (4.50) für die elektrische Feldstärke

$$\underline{\vec{E}} = -j \frac{Z_F}{\mu} \left( \frac{1}{\beta} \text{grad}(\text{div}(\underline{\vec{A}})) + \beta \omega \underline{\vec{A}} \right). \quad (4.63)$$

Einsetzen des Vektorpotentials  $\underline{\vec{A}}(\vec{r})$  ergibt

$$\begin{aligned} \underline{\vec{E}}(\vec{r}) &= -j Z_F \left( \text{grad} \left( \text{div} \left( \iint_{A'} \frac{\underline{\vec{J}}_F(\vec{r}')}{\beta} \underline{\psi}(\vec{r} - \vec{r}') \, dA' \right) \right) \right. \\ &\quad \left. + \iint_{A'} \beta \underline{\vec{J}}_F(\vec{r}') \underline{\psi}(\vec{r} - \vec{r}') \, dA' \right) \\ &= \mathcal{L}(\underline{\vec{J}}_F(\vec{r}')), \end{aligned}$$

das heißt die elektrische Feldstärke  $\underline{\vec{E}}(\vec{r})$  ergibt sich durch Anwenden eines linearen Operators  $\mathcal{L}(\cdot)$  auf die durch die elektrische Flächenstromdichte  $\underline{\vec{J}}_F(\vec{r}')$  gegebene Strombelegung.

Die elektrische Feldstärke  $\underline{\vec{E}}(\vec{r})$  in der ideal elektrisch leitenden Antenne ist bekannt. Sie ist außer an den Orten, an denen sich speisende Stromquellen befinden, Null. Obige Gleichung ist also eine Integro-Differentialgleichung zum Bestimmen der elektrischen Flächenstromdichte  $\underline{\vec{J}}_F(\vec{r}')$ .

Die Momentenmethode ist ein numerisches Verfahren zum Bestimmen der Lösungen von Integro-Differentialgleichungen [Dav11; Jin15; RBI13]. Sie basiert darauf, dass man die zu bestimmende Funktion, hier die elektrische Flächenstromdichte  $\underline{\vec{J}}_F(\vec{r}')$ , durch eine endliche Summe gewichteter Basisfunktionen approximiert. Mit den  $N$  Basisfunktionen  $\vec{f}_n(\vec{r}')$ ,  $n = 1 \dots N$ , und den  $N$  komplexen Gewichten  $\underline{J}_{Fn}$ ,  $n = 1 \dots N$ , gilt näherungsweise

$$\underline{\vec{J}}_F(\vec{r}') = \sum_{n=1}^N \vec{f}_n(\vec{r}') \underline{J}_{Fn}. \quad (4.64)$$

Anwenden des linearen Operators ergibt mit dem Proportionalitätsprinzip und dem Superpositionsprinzip

$$\underline{\vec{E}}(\vec{r}) = \mathcal{L} \left( \sum_{n=1}^N \vec{f}_n(\vec{r}') \underline{J}_{Fn} \right) = \sum_{n=1}^N \mathcal{L}(\vec{f}_n(\vec{r}')) \underline{J}_{Fn}.$$

Für einzelne Komponenten der elektrischen Feldstärke gilt

$$E_{xyz}(\vec{r}) = \sum_{n=1}^N \mathcal{L}_{xyz}(\vec{f}_n(\vec{r}')) \underline{J}_{Fn},$$

wobei xyz für eine der drei Koordinaten  $x$ ,  $y$  oder  $z$  steht. Für eine so am Ort  $\vec{r}_m$  berechnete elektrische Feldstärkekomponente gilt

$$\underline{E}_m = \underline{E}_{xyz}(\vec{r}_m) = \sum_{n=1}^N \underline{Z}_{m,n} \underline{J}_{Fn}.$$

Die hier auftretenden Gewichtungsfaktoren

$$\underline{Z}_{m,n} = \mathcal{L}_{xyz}(\vec{f}_n(\vec{r}')), \quad n = 1 \dots N, \quad (4.65)$$

haben die Einheit einer Impedanz und können selbst bei komplizierten Antennen-geometrien numerisch leicht durch Anwenden des linearen Operators  $\mathcal{L}_{xyz}(\cdot)$  auf die Basisfunktionen  $\vec{f}_n(\vec{r}')$  berechnet werden. Man erhält das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \underline{E}_1 \\ \vdots \\ \underline{E}_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{Z}_{1,1} & \dots & \underline{Z}_{1,N} \\ \vdots & & \vdots \\ \underline{Z}_{M,1} & \dots & \underline{Z}_{M,N} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{J}_{F1} \\ \vdots \\ \underline{J}_{FN} \end{pmatrix} \quad (4.66)$$

für die  $N$  komplexen Gewichte  $\underline{J}_{Fn}$ ,  $n = 1 \dots N$ , das im Fall  $M = N$  eine eindeutige Lösung hat.

Das von der Antenne am Ort  $\vec{r}$  erzeugte magnetische Vektorpotential  $\vec{A}(\vec{r})$  kann man aus der nun bekannten elektrischen Flächenstromdichte  $\vec{J}_F(\vec{r}')$  mit den bereits vorgestellten Verfahren berechnen. Aus dem so erhaltenen magnetischen Vektorpotential  $\vec{A}(\vec{r})$  kann man die Feldstärken berechnen.

In der Praxis findet man viele Variationen des hier vorgestellten Grundprinzips der Momentenmethode. Ein wichtiges Ziel ist hierbei das Maximieren der Genauigkeit des Ergebnisses bei möglichst kleinem Rechenaufwand. Insbesondere die Art und die Anzahl  $N$  der Basisfunktionen ist geschickt zu wählen. Kommerzielle Programme zur Antennenanalyse mit der Momentenmethode sind verfügbar. Bekannte Beispiele sind FEKO (FEldberechnung für Körper mit beliebiger Oberfläche) und das mittlerweile in vielen Varianten verfügbare Programm NEC (Numerical Electromagnetics Code) [BP81].

## 4.9.2. Analyse einer Dipolantenne

Die in Abschnitt 4.9.1 eingeführten Grundprinzipien werden nun auf eine Dipolantenne angewendet. Die Dipolantenne besteht aus einer speisenden Stromquelle und zwei gleich langen, kreiszylindrischen, ideal elektrisch leitenden Drahtstücken, siehe Abbildung 4.10. Die Länge der Dipolantenne sei  $l$  und der Radius sei  $\rho$ .

Aus Symmetriegründen kann man davon ausgehen, dass die elektrische Flächenstromdichte  $\vec{J}_F$  auf dem Antennenumfang konstant ist und nur eine  $z$ -Komponente

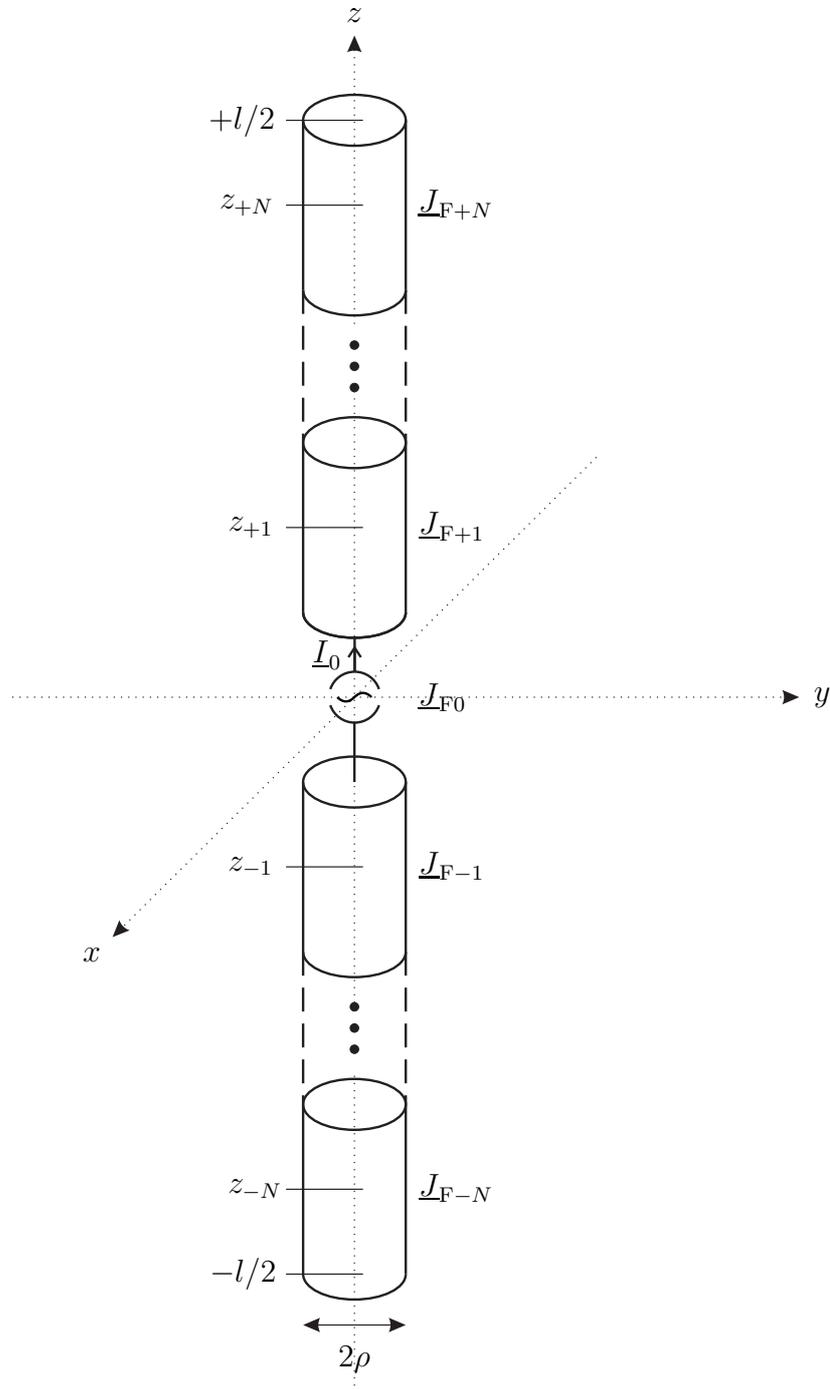


Abbildung 4.10.: Anwenden der Momentenmethode auf eine Dipolantenne

hat. Es gilt also

$$\vec{J}_F(z') = \underline{J}_{Fz}(z') \vec{u}_z.$$

Da die elektrische Flächenstromdichte nur eine  $z$ -Komponente  $\underline{J}_{Fz}(z')$  hat, hat auch das magnetische Vektorpotential  $\vec{A}$  nur eine  $z$ -Komponente  $\underline{A}_z$ . Die  $z$ -Komponente des magnetischen Vektorpotentials für Punkte auf der  $z$ -Achse ergibt sich mit dem Abstand  $\sqrt{\rho^2 + (z - z')^2}$  eines Punktes auf der kreiszylindrischen Antennenoberfläche bei  $z'$  und einem Punkt auf der  $z$ -Achse bei  $z$  zu

$$\underline{A}_z(z) = \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \underbrace{\mu 2\pi\rho \underline{J}_F(z')}_{\underline{I}(z')} \underbrace{\frac{e^{-j\beta\sqrt{\rho^2+(z-z')^2}}}{4\pi\sqrt{\rho^2+(z-z')^2}}}_{\underline{\psi}(z-z')} dz',$$

siehe (4.39) und (4.37). Es wird nur die  $z$ -Komponente der elektrischen Feldstärke  $\vec{E}$  auf der  $z$ -Achse benötigt, die sich mit (4.63), (1.32) und (2.1) zu

$$\underline{E}_z(z) = -j \frac{Z_F}{\mu} \left( \frac{1}{\beta} \frac{\partial^2 \underline{A}_z(z)}{\partial z^2} + \beta \underline{A}_z(z) \right)$$

berechnet. Einsetzen des magnetischen Vektorpotentials  $\underline{A}_z(z)$  und vertauschen der Reihenfolge von Integration und Differentiation ergibt  $z$ -Komponente

$$\underline{E}_z(z) = -j Z_F \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \left( \frac{1}{\beta} \frac{\partial^2 \underline{\psi}(z-z')}{\partial z^2} + \beta \underline{\psi}(z-z') \right) 2\pi\rho \underline{J}_{Fz}(z') dz'$$

der elektrischen Feldstärke  $\vec{E}(z)$  am Ort  $z$  auf der  $z$ -Achse.

Die Dipolantenne wird in  $2N + 1$  als Elementardipole bezeichnete Segmente der Länge

$$\Delta z = \frac{l}{2N + 1}$$

unterteilt. Der Mittelpunkt des  $n$ -ten Elementardipols liegt bei

$$z_n = n\Delta z = \frac{nl}{2N + 1}.$$

Die elektrische Flächenstromdichte wird durch eine gewichtete Summe von Basisfunktionen approximiert:

$$\underline{J}_{Fz}(z') = \sum_{n=-N}^{+N} f_n(z') \underline{J}_{Fn}.$$

Man kann beispielsweise jeweils auf einem Elementardipol konstante und sonst verschwindende Basisfunktionen

$$f_n(z') = \begin{cases} 1 & z_n - \frac{\Delta z}{2} \leq z' \leq z_n + \frac{\Delta z}{2}, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \quad n = -N \dots + N,$$

verwenden. Einsetzen der approximierten elektrischen Flächenstromdichte  $\underline{J}_{Fz}(z')$  in die Gleichung zum Berechnen der  $z$ -Komponente  $\underline{E}_z(z)$  der elektrischen Feldstärke  $\vec{E}(z)$  auf der  $z$ -Achse ergibt für den Abtastpunkt  $z = z_m$

$$\underline{E}_m = \underline{E}_z(z_m) = \sum_{n=-N}^{+N} \underline{Z}_{m,n} \underline{J}_{Fn}.$$

Die Impedanzen

$$\underline{Z}_{m,n} = -jZ_F \int_{-\frac{\Delta z}{2}}^{+\frac{\Delta z}{2}} \left( \frac{1}{\beta} \frac{\partial^2 \underline{\psi}(z-z')}{\partial z'^2} + \beta \underline{\psi}(z-z') \right) 2\pi \rho f_n(z') dz', \quad (4.67)$$

$m, n = -N \dots + N,$

sind im Allgemeinen nur numerisch und nicht analytisch berechenbar.

Die Dipolantenne wurde in eine große Anzahl  $2N + 1$  an Elementardipolen der Länge  $\Delta z$  zerlegt. Die die Strombelegung beschreibenden Gewichte  $\underline{J}_{Fn}$ ,  $n = -N \dots + N$ , sind unter Berücksichtigen der Verkopplungen zwischen den Elementardipolen so zu bestimmen, dass insbesondere die  $z$ -Komponenten  $\underline{E}_m$ ,  $m = -N \dots -1, +1 \dots + N$ , der elektrischen Feldstärken  $\vec{E}(z_m)$  auf der  $z$ -Achse in den Elementardipolen mit Ausnahme des mittleren 0-ten Elementardipols mit der speisenden Stromquelle Null sind. Im mittleren 0-ten Elementardipol mit der speisenden Stromquelle muss für die  $z$ -Komponente der elektrischen Feldstärke

$$\underline{E}_z(0) = \underline{E}_0$$

gelten. Man kann nun das eindeutig lösbare lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \underline{E}_{-N} \\ \vdots \\ \underline{E}_0 \\ \vdots \\ \underline{E}_{+N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \underline{E}_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{Z}_{-N,-N} & \cdots & \underline{Z}_{-N,+N} \\ \vdots & & \vdots \\ \underline{Z}_{+N,-N} & \cdots & \underline{Z}_{+N,+N} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{J}_{F-N} \\ \vdots \\ \underline{J}_{F+N} \end{pmatrix}$$

gemäß (4.66) für die  $2N + 1$  komplexen Gewichte  $\underline{J}_{Fn}$ ,  $n = -N \dots + N$ , aufstellen.

Abbildung 4.11 zeigt die mit Hilfe der Momentenmethode ermittelte Strombelegung einer schlanken Dipolantenne der Länge  $2l = 3\lambda/2$ . Der Durchmesser der Dipolantenne ist  $2\rho = 0,005\lambda$ . Es wurden  $2N + 1 = 201$  Segmente und stückweise sinusförmige Basisfunktionen nach Aufgabe 4.4 verwendet. Zum Vergleich ist durchgezogen eine sinusförmige Strombelegung eingezeichnet.

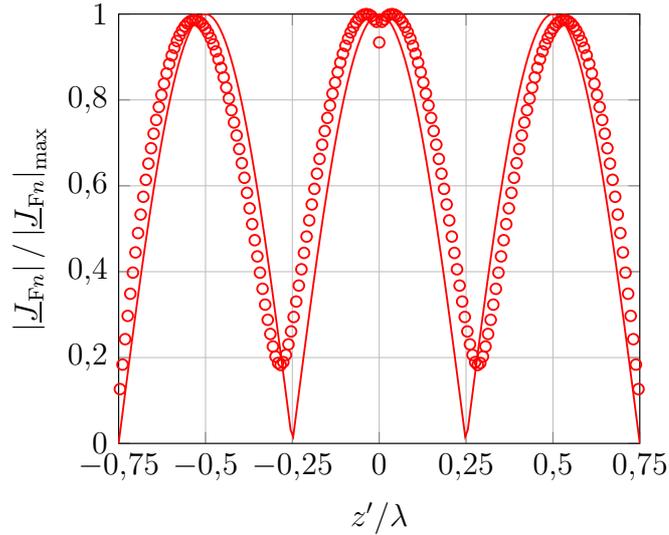


Abbildung 4.11.: Mit der Momentenmethode ermittelte Strombelegung einer Dipolantenne. Durchgezogen sinusförmiger Verlauf

**Aufgabe 4.3** Berechnen Sie die erste und die zweite Ableitung der Greenschen Funktion

$$\underline{\psi}(z) = \frac{e^{-j\beta\sqrt{\rho^2+z^2}}}{4\pi\sqrt{\rho^2+z^2}}$$

nach  $z$ ! Zeigen Sie, dass im Falle stückweise konstanter Basisfunktionen

$$f_n(z') = \begin{cases} 1 & z_n - \frac{\Delta z}{2} \leq z' \leq z_n + \frac{\Delta z}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

mit der Abkürzung

$$r_m = \sqrt{\rho^2 + (z_m - z')^2}$$

für die in (4.67) eingeführten Impedanzen

$$\underline{Z}_{m,n} = -jZ_F \int_{z_n - \frac{\Delta z}{2}}^{z_n + \frac{\Delta z}{2}} \frac{e^{-j\beta R_m}}{2\beta R_m^5} \left( (1 + j\beta R_m) (2R_m^2 - 3\rho^2) + \beta^2 \rho^2 R_m^2 \right) \rho dz'$$

*gilt!*

**Aufgabe 4.4** Zeigen Sie zunächst, dass für beliebige Basisfunktionen  $f_n(z')$

$$\begin{aligned} & \int_{z_k}^{z_l} \left( \frac{\partial^2 \underline{\psi}(z - z')}{\partial z'^2} + \beta^2 \underline{\psi}(z - z') \right) f_n(z') dz' \\ &= - \left[ \frac{\partial \underline{\psi}(z - z')}{\partial z} f_n(z') + \underline{\psi}(z - z') \frac{\partial f_n(z')}{\partial z'} \right]_{z'=z_k}^{z_l} \\ &+ \int_{z_k}^{z_l} \left( \frac{\partial^2 f_n(z')}{\partial z'^2} + \beta^2 f_n(z') \right) \underline{\psi}(z - z') dz' \end{aligned}$$

*gilt! Nutzen Sie hierzu aus, dass für die Ableitungen der Greenschen Funktion*

$$\frac{\partial \underline{\psi}(z - z')}{\partial z} = - \frac{\partial \underline{\psi}(z - z')}{\partial z'}$$

und

$$\frac{\partial^2 \underline{\psi}(z - z')}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \underline{\psi}(z - z')}{\partial z'^2}$$

*gilt.*

*Speziell für stückweise sinusförmige Basisfunktionen*

$$f_n(z') = \begin{cases} \frac{\sin(\beta(z' - z_{n-1}))}{\sin(\beta\Delta z)} & z_{n-1} \leq z' \leq z_n \\ \frac{\sin(\beta(z_{n+1} - z'))}{\sin(\beta\Delta z)} & z_n \leq z' \leq z_{n+1} \end{cases},$$

siehe Abbildung 4.12, kann man die in (4.67) eingeführten Impedanzen  $\underline{Z}_{m,n}$  analytisch berechnen. Zeigen Sie, dass sich die Impedanzen mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} R_{m,n-1} &= \sqrt{\rho^2 + (z_m - z_{n-1})^2}, \\ R_{m,n} &= \sqrt{\rho^2 + (z_m - z_n)^2}, \\ R_{m,n+1} &= \sqrt{\rho^2 + (z_m - z_{n+1})^2} \end{aligned}$$

zu

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{m,n} &= -j \frac{1}{2} Z_F \rho \left( \frac{e^{-j\beta R_{m,n-1}}}{R_{m,n-1} \sin(\beta\Delta z)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{e^{-j\beta R_{m,n}} \sin(2\beta\Delta z)}{R_{m,n} \sin^2(\beta\Delta z)} + \frac{e^{-j\beta R_{m,n+1}}}{R_{m,n+1} \sin(\beta\Delta z)} \right) \end{aligned}$$

ergeben!

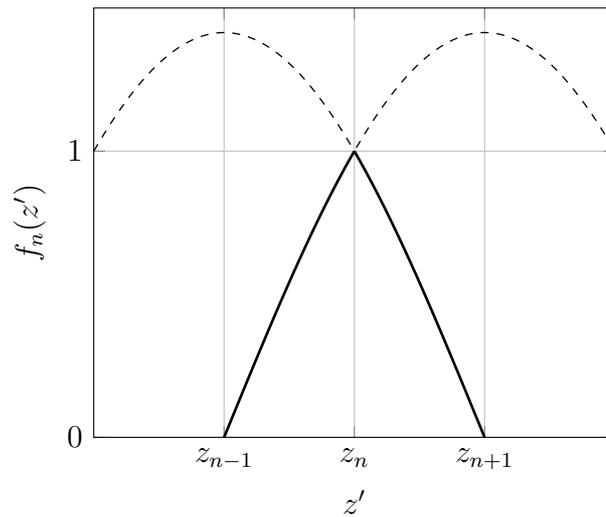


Abbildung 4.12.: Stückweise sinusförmige Basisfunktion  $f_n(z')$  für  $\Delta z = \lambda/8$

**Aufgabe 4.5** Implementieren Sie die Momentenmethode zum Berechnen der Strombelegung einer Dipolantenne in Matlab! Verwenden Sie die stückweise sinusförmigen Basisfunktionen aus Aufgabe 4.4.



# Kapitel 5.

## Antennenbauformen

### 5.1. Kenngrößen von Antennen

#### 5.1.1. Richtfaktor und Gewinn

Im Folgenden wird nur das Fernfeld betrachtet. Reale Antennen haben immer eine mehr oder weniger ausgeprägte Richtwirkung, das heißt die von einer Sendeantenne erzeugte Intensität  $S$  ist außer von der Entfernung  $r$  des Beobachtungspunktes von der Sendeantenne auch noch von der Richtung, unter welcher der Beobachtungspunkt von der Sendeantenne aus gesehen erscheint, abhängig. In Funkkommunikationssystemen wird man die Sendeantenne bevorzugt so ausrichten, dass die Hauptstrahlrichtung in Richtung des Empfängers zeigt. Man interessiert sich also für die von der Sendeantenne in der Hauptstrahlrichtung erzeugte maximale Intensität  $S_{\max}$ . Um die Richtwirkung der Sendeantenne beurteilen zu können, vergleicht man diese maximale Intensität  $S_{\max}$  mit der von einer fiktiven omnidirektionalen Sendeantenne bei gleicher abgestrahlter Leistung  $P$  in der gleichen großen Entfernung  $r$  im Fernfeld erzeugten Intensität

$$S_0 = \frac{P}{4\pi r^2}, \quad (5.1)$$

siehe (4.54). Man definiert den Richtfaktor

$$D = \frac{S_{\max}}{S_0} = \frac{S_{\max}}{P} 4\pi r^2. \quad (5.2)$$

Der Richtfaktor  $D$  ist für das Fernfeld definiert und ist dort entfernungsunabhängig, da die maximale Intensität  $S_{\max}$  mit  $1/r^2$  abnimmt.

Wenn man die von der Sendeantenne in Hauptstrahlrichtung erzeugte maximale Intensität  $S_{\max}$  ins Verhältnis zu der von einer fiktiven omnidirektionalen Sendeantenne erzeugten Intensität bei gleicher zugeführter Sendeleistung setzt, erhält man den Gewinn  $G$ . Mit dem Wirkungsgrad  $\eta$  der Sendeantenne gilt

$$G = \eta D. \quad (5.3)$$

Bei den hier primär betrachteten verlustfreien Sendeantennen ist der Richtfaktor  $D$  gleich dem Gewinn  $G$ .

Als Beispiel wird der ideale elektrische Dipol betrachtet. Mit (4.54) berechnet man aus der Intensität  $S$  des idealen elektrischen Dipols im Fernfeld gemäß (4.60) die abgestrahlte Leistung<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2} Z_F \left( \frac{\beta |\underline{I}_0| l}{4\pi} \right)^2 \int_{\vartheta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \sin^3(\vartheta) d\varphi d\vartheta = \frac{1}{2} Z_F \left( \frac{\beta |\underline{I}_0| l}{4\pi} \right)^2 2\pi \int_0^{\pi} \sin^3(\vartheta) d\vartheta \\ &= \frac{4}{3} Z_F \pi \left( \frac{\beta |\underline{I}_0| l}{4\pi} \right)^2. \end{aligned}$$

Die Hauptstrahlrichtung des idealen elektrischen Dipols ist  $\vartheta = \pi/2$ . Die in dieser Hauptstrahlrichtung erzeugte maximale Intensität ist

$$S_{\max} = \frac{1}{2} Z_F \left( \frac{\beta |\underline{I}_0| l}{4\pi r} \right)^2,$$

siehe (4.60). Schließlich erhält man mit (5.2) den Richtfaktor

$$D = \frac{S_{\max}}{P} 4\pi r^2 = \frac{3}{2} = 1,5 \quad (5.4)$$

des idealen elektrischen Dipols.

### 5.1.2. Richtcharakteristik

Der Richtfaktor  $D$  liefert nur eine integrale Beschreibung der Richtwirkung einer Antenne. Zum detaillierten Beschreiben der Richtungsabhängigkeit der von einer Sendeantenne im Fernfeld erzeugten Feldstärken und Intensität  $S(\vartheta, \varphi)$  verwendet man die als Richtcharakteristik bezeichnete, auf die maximale Feldstärke normierte Feldstärke bei einer bestimmten großen Entfernung  $r$  im Fernfeld:

$$C(\vartheta, \varphi) = \frac{\|\vec{E}(\vartheta, \varphi)\|}{\|\vec{E}\|_{\max}} = \frac{\|\vec{H}(\vartheta, \varphi)\|}{\|\vec{H}\|_{\max}} = \frac{\sqrt{|\underline{E}_{\vartheta}(\vartheta, \varphi)|^2 + |\underline{E}_{\varphi}(\vartheta, \varphi)|^2}}{\sqrt{|\underline{E}_{\vartheta}|^2 + |\underline{E}_{\varphi}|^2}_{\max}}. \quad (5.5)$$

Die Umformungen folgen aus (4.45) und (4.48). Mit (4.53) folgt weiterhin

$$C(\vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{S(\vartheta, \varphi)}{S_{\max}}}. \quad (5.6)$$

---

<sup>1</sup>Es gilt  $\int \sin^3(x) dx = -\cos(x) + \frac{1}{3} \cos^3(x)$ .

Zur graphischen Darstellung der Richtcharakteristik  $C(\vartheta, \varphi)$  verwendet man überwiegend die folgenden beiden zweidimensionalen Richtdiagrammtypen:

**Horizontaldiagramm:** Für  $\vartheta = \pi/2$  trägt man in Polarkoordinaten  $C(\pi/2, \varphi)$  auf.

**Vertikaldiagramm:** Für  $\varphi = 0$  trägt man in Polarkoordinaten  $C(\vartheta, 0)$  auf.

Als Beispiel wird der ideale elektrische Dipol betrachtet. Die vom idealen elektrischen Dipol im Fernfeld erzeugte elektrische Feldstärke ist

$$\|\vec{E}(\vartheta, \varphi)\| = \frac{\beta Z_F |\underline{I}_0| l}{4\pi r} |\sin(\vartheta)|,$$

siehe (4.58). Der Maximalwert der elektrischen Feldstärke in der Hauptstrahlrichtung  $\vartheta = \pi/2$  ist

$$\|\vec{E}\|_{\max} = \frac{\beta Z_F |\underline{I}_0| l}{4\pi r}.$$

Mit (5.5) erhält man die Richtcharakteristik

$$C(\vartheta, \varphi) = |\sin(\vartheta)| \quad (5.7)$$

des idealen elektrischen Dipols. Diese Richtcharakteristik  $C(\vartheta, \varphi)$  hängt nicht vom Azimutwinkel  $\varphi$  ab, das heißt sie ist wie erwartet rotationssymmetrisch bezüglich der  $z$ -Achse. Abbildung 5.1 zeigt das dreidimensionale Richtdiagramm des idealen elektrischen Dipols. Das in Abbildung 5.2 dargestellte Vertikaldiagramm ergibt sich als vertikaler Schnitt durch das dreidimensionale Richtdiagramm.

Die in einer beliebigen Richtung im Fernfeld erzeugte Intensität ergibt sich mit (5.6) und (5.2) zu

$$S(\vartheta, \varphi) = DS_0 C^2(\vartheta, \varphi). \quad (5.8)$$

Den Richtfaktor  $D$  der Antenne kann man nun aus der Richtcharakteristik  $C(\vartheta, \varphi)$  berechnen. Die abgestrahlte Leistung ergibt sich mit (4.54) zu

$$P = DS_0 \int_{\vartheta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} C^2(\vartheta, \varphi) r^2 \sin(\vartheta) d\varphi d\vartheta.$$

Daraus folgt mit (5.1) der Richtfaktor

$$D = \frac{P}{S_0 \int_{\vartheta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} C^2(\vartheta, \varphi) r^2 \sin(\vartheta) d\varphi d\vartheta} = \frac{4\pi}{\int_{\vartheta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} C^2(\vartheta, \varphi) \sin(\vartheta) d\varphi d\vartheta}. \quad (5.9)$$

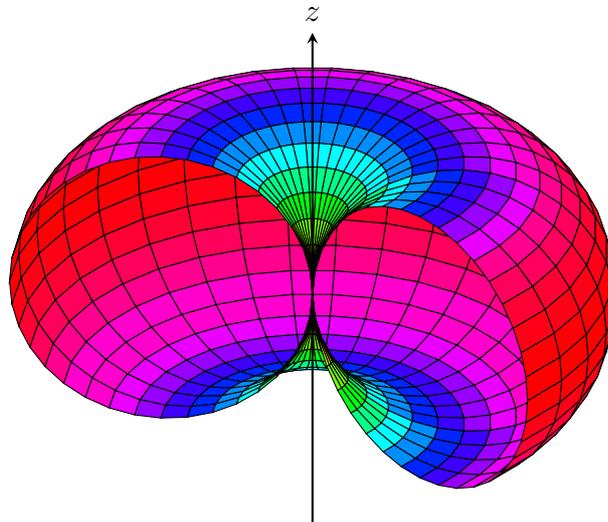


Abbildung 5.1.: Dreidimensionales Richtdiagramm des idealen elektrischen Dipols

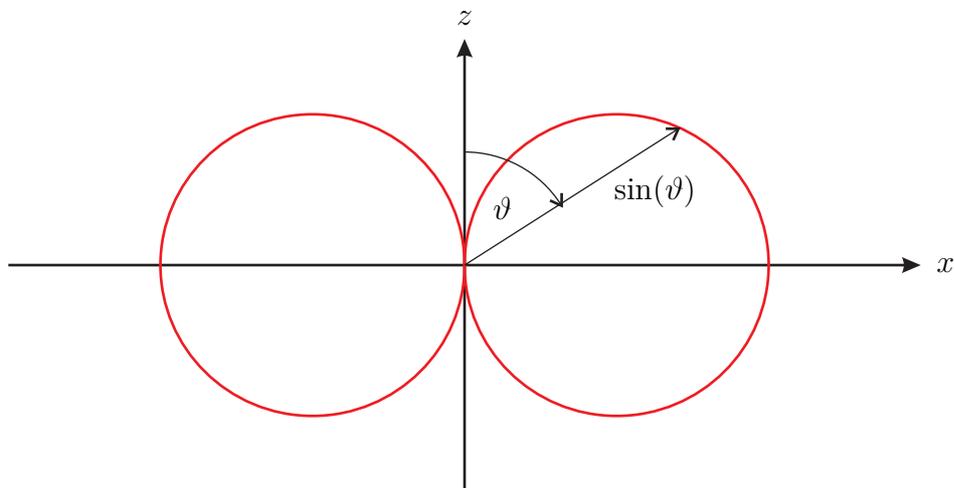


Abbildung 5.2.: Vertikaldiagramm des idealen elektrischen Dipols

Manchmal interessiert man sich nicht nur für die Beträge der von einer Sendeanenne erzeugten Feldstärken, sondern auch für die durch die zeitabhängige räumliche Ausrichtung des elektrischen Feldstärkevektors  $\vec{E}$  beschriebene Polarisation und die Nullphase. Diese Informationen sind in der vektoriellen komplexen Richtcharakteristik

$$\underline{\mathbf{C}}(\vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} \underline{C}_\vartheta(\vartheta, \varphi) \\ \underline{C}_\varphi(\vartheta, \varphi) \end{pmatrix} \quad (5.10)$$

mit den sich aus den entsprechenden Komponenten des elektrischen Feldstärkevektors im Fernfeld ergebenden Komponenten

$$\underline{C}_{\vartheta\varphi}(\vartheta, \varphi) = \frac{\underline{E}_{\vartheta\varphi}(\vartheta, \varphi) e^{j\beta r}}{\|\vec{E}\|_{\max}} = \frac{-j\underline{E}_{\vartheta\varphi}(\vartheta, \varphi)}{\sqrt{|\underline{E}_\vartheta|^2 + |\underline{E}_\varphi|^2}_{\max}} \quad (5.11)$$

enthalten, siehe auch (4.48).  $\vartheta\varphi$  steht hierbei für eine der zwei Koordinaten  $\vartheta$  oder  $\varphi$ . Die Definition ist nur in Kombination mit der Festlegung einer Referenzphase eindeutig. Man legt sie beispielsweise durch die Nullphase des Speisestroms  $\underline{I}_0$  fest. Die vektorielle Richtcharakteristik  $\underline{\mathbf{C}}(\vartheta, \varphi)$  ist für das Fernfeld definiert und ist dort wegen der Normierung auf den maximal auftretenden Feldstärkebetrag und der Kompensation der entfernungsbedingten Phasendrehung durch die Multiplikation mit  $e^{j\beta r}$  entfernungsunabhängig. Die Richtcharakteristik (5.5) berechnet sich aus der vektoriellen komplexen Richtcharakteristik zu

$$C(\vartheta, \varphi) = \|\underline{\mathbf{C}}(\vartheta, \varphi)\|. \quad (5.12)$$

## 5.2. Lineare Antennen

### 5.2.1. Allgemeine Betrachtungen zu linearen Antennen

Lineare Antennen bestehen aus einem geraden, sehr dünnen, idealen elektrischen Leiter. Das Koordinatensystem wird vereinfachend so gewählt, dass die Längsachse des Leiters der  $z$ -Achse entspricht. Abbildung 5.3 zeigt eine schlanke Dipolantenne mit Radius  $\rho \ll \lambda$  und Länge  $l$  als Beispiel einer linearen Antenne.

Der Strom  $\underline{I}(z')$  fließt ausschließlich in  $z$ -Richtung, so dass der hier aufgrund der Antennensymmetrie nur vom Poldistanzwinkel  $\vartheta$  abhängende vektorielle Richtungsfaktor  $\underline{\vec{F}}$  gemäß (4.42) in kartesischen Koordinaten nur eine  $z$ -Komponente

$$\underline{F}_z(\vartheta) = \int_l \underline{I}(z') e^{j\beta z' \cos(\vartheta)} dz' \quad (5.13)$$

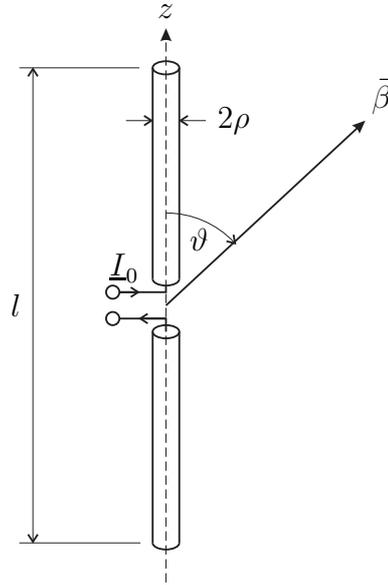


Abbildung 5.3.: Schlanke Dipolantenne

hat. In Kugelkoordinaten verschwindet die  $\varphi$ -Komponente  $\underline{E}_\varphi(\vartheta) = 0$  und die  $\vartheta$ -Komponente ist

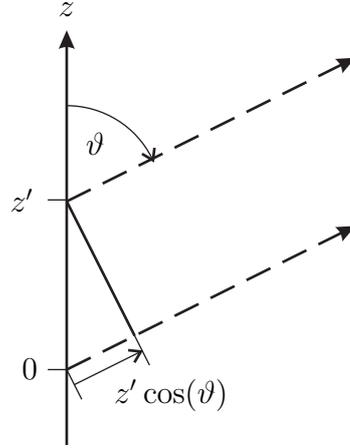
$$\underline{E}_\vartheta(\vartheta) = \underbrace{-\sin(\vartheta)}_{\underline{E}_E(\vartheta)} \underbrace{\int_l \underline{I}(z') e^{j\beta z' \cos(\vartheta)} dz'}_{\underline{E}_G(\vartheta)}, \quad (5.14)$$

siehe (4.15). Die ebenfalls von Null verschiedene  $r$ -Komponente  $\underline{E}_r(\vartheta)$  interessiert hier nicht weiter. Der Richtungsfaktor  $\underline{E}_\vartheta(\vartheta)$  einer aus gleichartigen und gleich ausgerichteten Elementarantennen, hier idealen elektrischen Dipolen, zusammengesetzten Antenne entspricht stets dem Produkt aus Elementrichtungsfaktor  $\underline{E}_E(\vartheta)$  und Gruppenrichtungsfaktor  $\underline{E}_G(\vartheta)$ . Diesen allgemeingültigen Zusammenhang bezeichnet man als multiplikatives Gesetz. Der Gruppenrichtungsfaktor

$$\underline{E}_G(\vartheta) = \int_l \underline{I}(z') e^{j\beta z' \cos(\vartheta)} dz' \quad (5.15)$$

beschreibt das Zusammenwirken der infinitesimalen, die Strombelegung  $\underline{I}(z')$  approximierenden, idealen elektrischen Dipole. Der im Integral auftretende Faktor  $e^{j\beta z' \cos(\vartheta)}$  berücksichtigt die sich aus den geometriebedingten Pfadlängenverkürzungen  $z' \cos(\vartheta)$  ergebenden Phasenverschiebungen, siehe Abbildung 5.4.

Die Richtcharakteristik (5.5) ergibt sich entsprechend dem multiplikativen Ge-


 Abbildung 5.4.: Geometriebedingte Pfadlängenverkürzung  $z' \cos(\vartheta)$ 

setz zu

$$C(\vartheta) = \frac{|\underline{E}_\vartheta(\vartheta)|}{|\underline{E}_\vartheta|_{\max}} = \frac{|\underline{E}_E(\vartheta) \underline{E}_G(\vartheta)|}{|\underline{E}_E \underline{E}_G|_{\max}} \sim \underbrace{|\sin(\vartheta)|}_{C_E(\vartheta)} \underbrace{\frac{|\underline{E}_G(\vartheta)|}{|\underline{E}_G|_{\max}}}_{C_G(\vartheta)}. \quad (5.16)$$

Die Richtcharakteristik  $C(\vartheta)$  ist proportional zum Produkt aus Elementrichtcharakteristik  $C_E(\vartheta)$  und Gruppenrichtcharakteristik  $C_G(\vartheta)$ . Es gilt Gleichheit, falls die Hauptstrahlrichtungen der Elementrichtcharakteristik  $C_E(\vartheta)$  und der Gruppenrichtcharakteristik  $C_G(\vartheta)$  zusammenfallen. Den Richtfaktor kann man wegen der Rotationssymmetrie um die  $z$ -Achse gemäß

$$D = \frac{2}{\int_0^\pi C^2(\vartheta) \sin(\vartheta) d\vartheta} \quad (5.17)$$

aus der Richtcharakteristik  $C(\vartheta)$  berechnen, siehe (5.9).

Wenn man den Gruppenrichtungsfaktor  $\underline{E}_G(\vartheta)$  nicht als Funktion des Poldistanzwinkels  $\vartheta$  sondern als Funktion der  $z$ -Komponente

$$\beta_z = \beta \cos(\vartheta) \quad (5.18)$$

des in die betrachtete Ausbreitungsrichtung zeigenden Phasenvektors  $\vec{\beta}$  gemäß (2.13) betrachtet, erkennt man, dass der Gruppenrichtungsfaktor

$$\underline{E}_G(\beta_z) = \int_l \underline{I}(z') e^{j\beta_z z'} dz' \quad (5.19)$$

die Fourier-Transformierte der Strombelegung  $\underline{I}(z')$  ist. Man spricht von der Strombelegung  $\underline{I}(z')$  im Ortsbereich und dem Gruppenrichtungsfaktor  $\underline{F}_G(\beta_z)$  im Wellenzahlbereich. Die quadrierte Gruppenrichtcharakteristik ist proportional zum Betragsquadrat des Gruppenrichtungsfaktors

$$C_G^2(\beta_z) \sim |\underline{F}_G(\beta_z)|^2$$

und das Betragsquadrat des Gruppenrichtungsfaktors ergibt sich nach den Ergebnissen der Signaltheorie als Fourier-Transformierte der Autokorrelationsfunktion der Strombelegung  $\underline{I}(z')$ :

$$\begin{aligned} |\underline{F}_G(\beta_z)|^2 &= \underline{F}_G^*(\beta_z) \underline{F}_G(\beta_z) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \underline{I}^*(z'') e^{-j\beta_z z''} dz'' \int_{-\infty}^{\infty} \underline{I}(z') e^{j\beta_z z'} dz' \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \underline{I}^*(z'') \underline{I}(z') e^{j\beta_z(z'-z'')} dz'' dz' \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\underline{I}^*(z'') \underline{I}(z'' + z')}_{\text{Autokorrelationsfunktion}} dz'' e^{j\beta_z z'} dz' . \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{Fourier-Transformation}} \end{aligned}$$

Diese in Abbildung 5.5 dargestellten Zusammenhänge erweisen sich als außerordentlich nützlich, da sie es ermöglichen, aus der Signal- und Systemtheorie bekannte Verfahren auch zur Antennenanalyse und zur Antennensynthese einzusetzen.

### 5.2.2. Dipolantennen mit sinusförmiger Strombelegung

Mit numerischen Untersuchungen wie zum Beispiel mit der Momentenmethode und auch mit approximativen feldtheoretischen Betrachtungen findet man, dass die Strombelegung auf einer in der Mitte mit dem Strom  $\underline{I}_0$  gespeisten schlanken Dipolantenne mit Radius  $\rho \ll \lambda$  in guter Näherung sinusförmig ist:

$$\underline{I}(z') = \begin{cases} \underline{I}_0 \frac{\sin\left(\beta\left(\frac{l}{2} - |z'|\right)\right)}{\sin\left(\beta\frac{l}{2}\right)} & -l/2 \leq z' \leq l/2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} . \quad (5.20)$$

Mit der nun bekannten Strombelegung  $\underline{I}(z')$  ist die weitere Analyse der Dipolantenne einfach. Der Gruppenrichtungsfaktor ergibt sich gemäß (5.19) als Fourier-

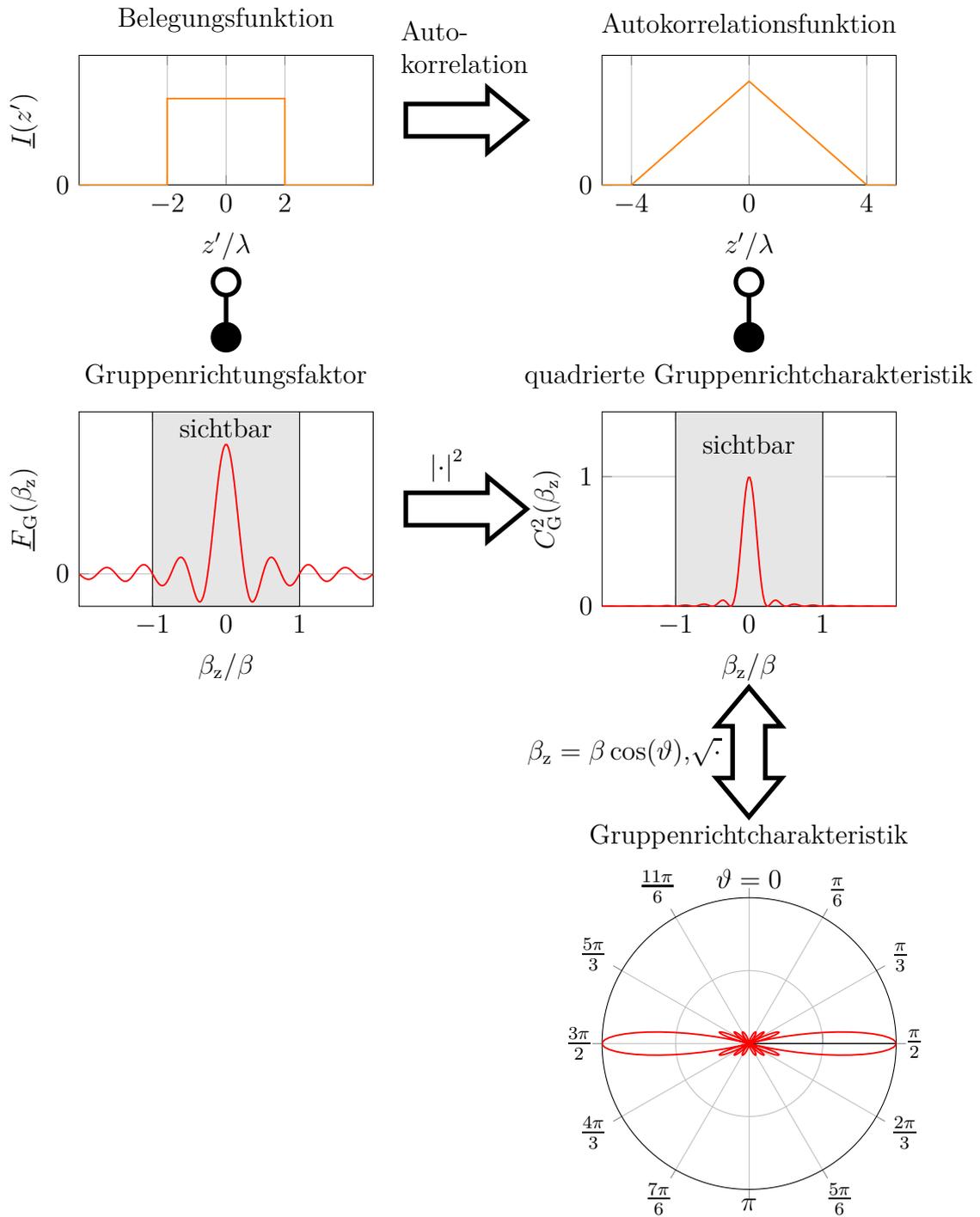


Abbildung 5.5.: Ortsbereich und Wellenzahlbereich

Transformierte der Strombelegung  $\underline{I}(z')$ :<sup>23</sup>

$$\begin{aligned}
 \underline{E}_G(\beta_z) &= \int_{-l/2}^{l/2} \underline{I}_0 \frac{\sin\left(\beta\left(\frac{l}{2} - |z'|\right)\right)}{\sin\left(\beta\frac{l}{2}\right)} e^{j\beta_z z'} dz' \\
 &= \int_0^{l/2} 2\underline{I}_0 \frac{\sin\left(\beta\left(\frac{l}{2} - z'\right)\right)}{\sin\left(\beta\frac{l}{2}\right)} \cos(\beta_z z') dz' \\
 &= \frac{\underline{I}_0}{\sin\left(\beta\frac{l}{2}\right)} \int_0^{l/2} \left( \sin\left(\beta\frac{l}{2} - (\beta_z + \beta) z'\right) + \sin\left(\beta\frac{l}{2} + (\beta_z - \beta) z'\right) \right) dz' \\
 &= \frac{\underline{I}_0}{\sin\left(\beta\frac{l}{2}\right)} \left[ \frac{\cos\left(\beta\frac{l}{2} - (\beta_z + \beta) z'\right)}{\beta_z + \beta} - \frac{\cos\left(\beta\frac{l}{2} + (\beta_z - \beta) z'\right)}{\beta_z - \beta} \right]_{z'=0}^{l/2} \\
 &= \frac{\underline{I}_0}{\sin\left(\beta\frac{l}{2}\right)} \left( \frac{\cos\left(\beta_z\frac{l}{2}\right) - \cos\left(\beta\frac{l}{2}\right)}{\beta_z + \beta} - \frac{\cos\left(\beta_z\frac{l}{2}\right) - \cos\left(\beta\frac{l}{2}\right)}{\beta_z - \beta} \right) \\
 &= \frac{2\beta\underline{I}_0}{\sin\left(\beta\frac{l}{2}\right)} \frac{\cos\left(\beta\frac{l}{2}\right) - \cos\left(\beta_z\frac{l}{2}\right)}{\beta_z^2 - \beta^2}.
 \end{aligned} \tag{5.21}$$

Die Richtcharakteristik  $C(\beta_z)$  entspricht gemäß (5.16) dem normierten Betrag des mit dem Elementrichtungsfaktor  $\underline{E}_E(\beta_z)$  multiplizierten Gruppenrichtungsfaktors  $\underline{E}_G(\beta_z)$ . Die in Abbildung 5.6 gezeigten Richtcharakteristiken  $C(\vartheta)$  sind als Funktionen des Poldistanzwinkels  $\vartheta$  dargestellt, siehe (5.18). Für große Längen  $l > \lambda$  der Antenne bilden sich zusätzlich zu den Hauptkeulen auch noch Nebenkeulen aus. Die Anzahl der Nebenkeulen nimmt mit wachsender Länge  $l$  der Antenne zu. Die zugehörigen Richtfaktoren  $D$  wurden mit (5.17) numerisch berechnet.

**Aufgabe 5.1** Berechnen Sie den Richtfaktor  $D$  einer schlanken Dipolantenne der Länge  $l = \lambda/2$  mit sinusförmiger Strombelegung  $\underline{I}(z')$ !

**Aufgabe 5.2** Berechnen Sie die Richtcharakteristik  $C(\vartheta)$  einer schlanken Dipolantenne der Länge  $l$  mit konstanter Strombelegung

$$\underline{I}(z') = \begin{cases} \underline{I}_0 & -l/2 \leq z' \leq l/2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Skizzieren Sie die Richtcharakteristik  $C(\vartheta)$  für  $l = \lambda/2$  und  $l = 4\lambda$ ! Vergleichen Sie das Ergebnis mit der Richtcharakteristik eines idealen elektrischen Dipols und einer Dipolantenne der Länge  $l = \lambda/2$  mit sinusförmiger Strombelegung!

<sup>2</sup>Es wird die Eulersche Formel  $e^{j\alpha} = \cos(\alpha) + j\sin(\alpha)$  verwendet.

<sup>3</sup>Es wird das Additionstheorem  $\sin(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}(\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta))$  verwendet.

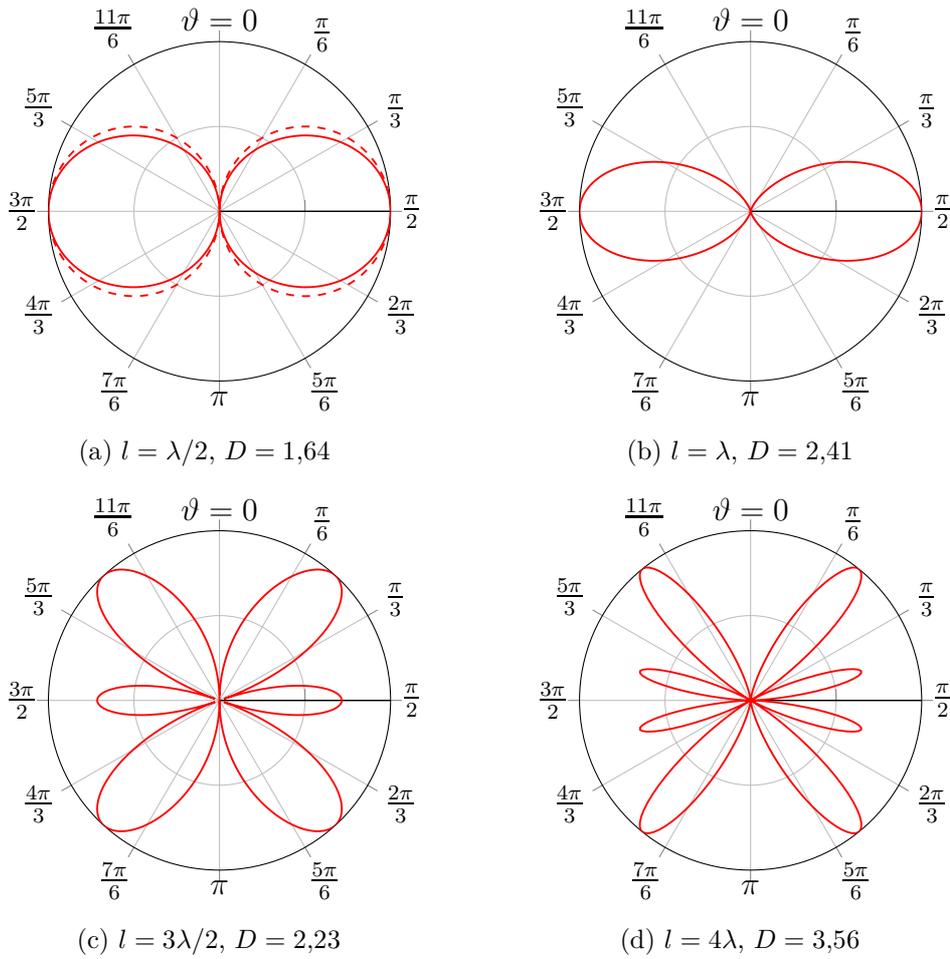


Abbildung 5.6.: Richtcharakteristiken  $C(\vartheta)$  von Dipolantennen mit sinusförmiger Strombelegung  $\underline{I}(z')$ . In Abbildung 5.6a gestrichelt zum Vergleich idealer elektrischer Dipol

## 5.3. Aperturantennen

### 5.3.1. Allgemeine Betrachtungen zu Aperturantennen

Abbildung 5.7 zeigt eine Hornantenne als Beispiel einer Aperturantenne. Die Feldverteilung in der Apertur, die der Hornöffnung entspricht, ist in guter Näherung die der anregenden Hohlleiterwelle, das heißt normalerweise einer  $TE_{1,0}$ -Welle. Nach dem Huygens'schen Prinzip kann man das abgestrahlte elektromagnetische Feld ausgehend von ersatzweise angenommenen Flächenstromdichten in der Apertur berechnen.



Abbildung 5.7.: Hornantenne für das X-Band (8,2 GHz – 12,4 GHz). Trichterförmig aufgeweiteter Hohlleiter WR 90. Weiterhin links sichtbar ein Übergang von Koaxialleitung auf Hohlleiter

Im Folgenden soll allgemein das Zustandekommen der Richtcharakteristik bei einer als bekannt vorausgesetzten zweidimensionalen Strombelegung in der Apertur betrachtet werden. Es werden folgende vereinfachende Einschränkungen gemacht:

- Die Apertur liege in der  $y$ - $z$ -Ebene. Letzteres lässt sich durch geeignete Wahl des Koordinatensystems erreichen.
- Es gebe nur eine elektrische Flächenstromdichte  $\vec{J}_F$ , das heißt die magnetische Flächenstromdichte  $\vec{M}_F$  sei Null. Sollte es auch eine magnetische Flächenstromdichte  $\vec{M}_F$  geben, so kann man separat in dualer Vorgehensweise das von ihr abgestrahlte elektromagnetische Feld berechnen. Anschließend

überlagert man die von elektrischer Flächenstromdichte  $\vec{J}_F$  und magnetischer Flächenstromdichte  $\vec{M}_F$  abgestrahlten elektromagnetischen Felder vektoriell.

- Die elektrische Flächenstromdichte  $\vec{J}_F$  habe nur eine  $z$ -Komponente. Sollte es auch eine  $y$ -Komponente geben, so kann man separat in dualer Vorgehensweise das von dieser  $y$ -Komponente abgestrahlte elektromagnetische Feld berechnen. Anschließend überlagert man die von den verschiedenen Komponenten der Flächenstromdichte  $\vec{J}_F$  abgestrahlten elektromagnetischen Felder vektoriell.

Abbildung 5.8 zeigt das beschriebene Szenario.

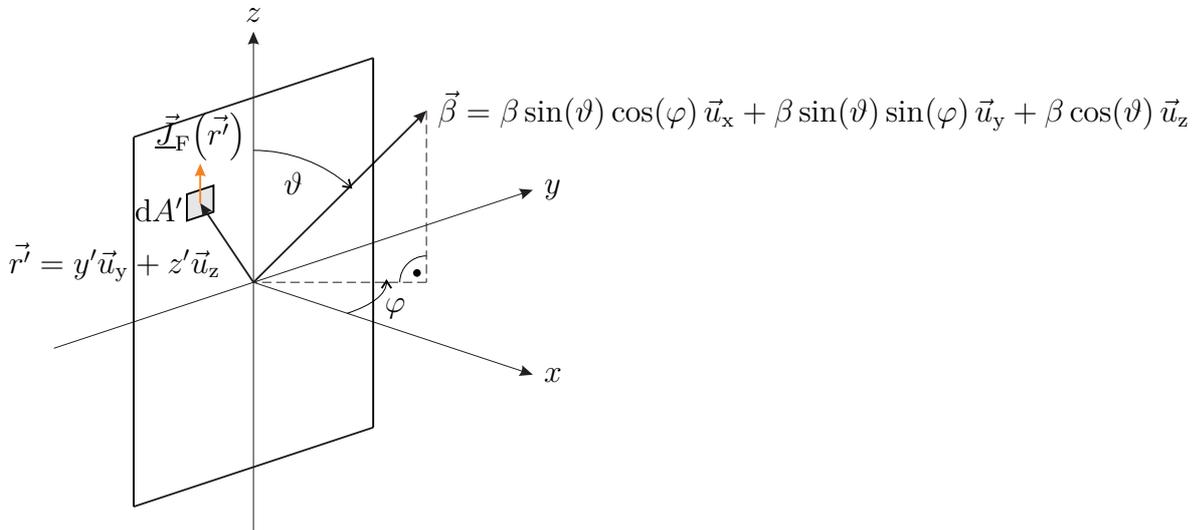


Abbildung 5.8.: Aperturantenne

Mit dem in die betrachtete Ausbreitungsrichtung zeigenden Phasenvektor  $\vec{\beta}$  gemäß (2.13) und dem Ortsvektor  $\vec{r}'$  des Flächenelements  $dA'$  folgt

$$\langle \vec{\beta}, \vec{r}' \rangle = \beta y' \sin(\varphi) \sin(\vartheta) + \beta z' \cos(\vartheta),$$

siehe Abbildung 5.8. Damit berechnet man den Gruppenrichtungsfaktor

$$\underline{E}_G(\vartheta, \varphi) = \iint_{A'} \underline{J}_{Fz}(y', z') e^{j\beta(y' \sin(\varphi) \sin(\vartheta) + z' \cos(\vartheta))} dy' dz', \quad (5.22)$$

vergleiche (4.42) und (5.15).

Der Richtungsfaktor ergibt sich gemäß dem multiplikativen Gesetz zu

$$\underline{F}_\vartheta(\vartheta, \varphi) = \underline{F}_E(\vartheta, \varphi) \underline{F}_G(\vartheta, \varphi) = -\sin(\vartheta) \underline{F}_G(\vartheta, \varphi), \quad (5.23)$$

vergleiche (5.14). Die Richtcharakteristik (5.5) ergibt sich entsprechend dem multiplikativen Gesetz zu

$$C(\vartheta, \varphi) = \frac{|\underline{F}_\vartheta(\vartheta, \varphi)|}{|\underline{F}_\vartheta|_{\max}} = \frac{|\underline{F}_E(\vartheta, \varphi) \underline{F}_G(\vartheta, \varphi)|}{|\underline{F}_E \underline{F}_G|_{\max}} \sim \underbrace{|\sin(\vartheta)|}_{C_E(\vartheta, \varphi)} \underbrace{\frac{|\underline{F}_G(\vartheta, \varphi)|}{|\underline{F}_G|_{\max}}}_{C_G(\vartheta, \varphi)}. \quad (5.24)$$

Die Richtcharakteristik  $C(\vartheta, \varphi)$  ist proportional zum Produkt aus Elementrichtcharakteristik  $C_E(\vartheta, \varphi)$  und Gruppenrichtcharakteristik  $C_G(\vartheta, \varphi)$ . Es gilt Gleichheit, falls die Hauptstrahlrichtungen der Elementrichtcharakteristik  $C_E(\vartheta, \varphi)$  und der Gruppenrichtcharakteristik  $C_G(\vartheta, \varphi)$  zusammenfallen.

Mit der  $y$ -Komponente

$$\beta_y = \beta \sin(\varphi) \sin(\vartheta) \quad (5.25)$$

und der  $z$ -Komponente

$$\beta_z = \beta \cos(\vartheta) \quad (5.26)$$

des Phasenvektors  $\vec{\beta}$  aus Abbildung 5.8 folgt für den Gruppenrichtungsfaktor

$$\underline{F}_G(\beta_y, \beta_z) = \iint_{A'} \underline{J}_{Fz}(y', z') e^{j(\beta_y y' + \beta_z z')} dy' dz', \quad (5.27)$$

das heißt der Gruppenrichtungsfaktor  $\underline{F}_G(\beta_y, \beta_z)$  ist die zweidimensionale Fourier-Transformierte der Strombelegung  $\underline{J}_{Fz}(y', z')$ .

Die Orte konstanten Poldistanzwinkels  $\vartheta$  entsprechen Orten konstanten  $\beta_z$  in der  $\beta_y$ - $\beta_z$ -Ebene, siehe Abbildung 5.9. Weiterhin gilt<sup>4</sup>

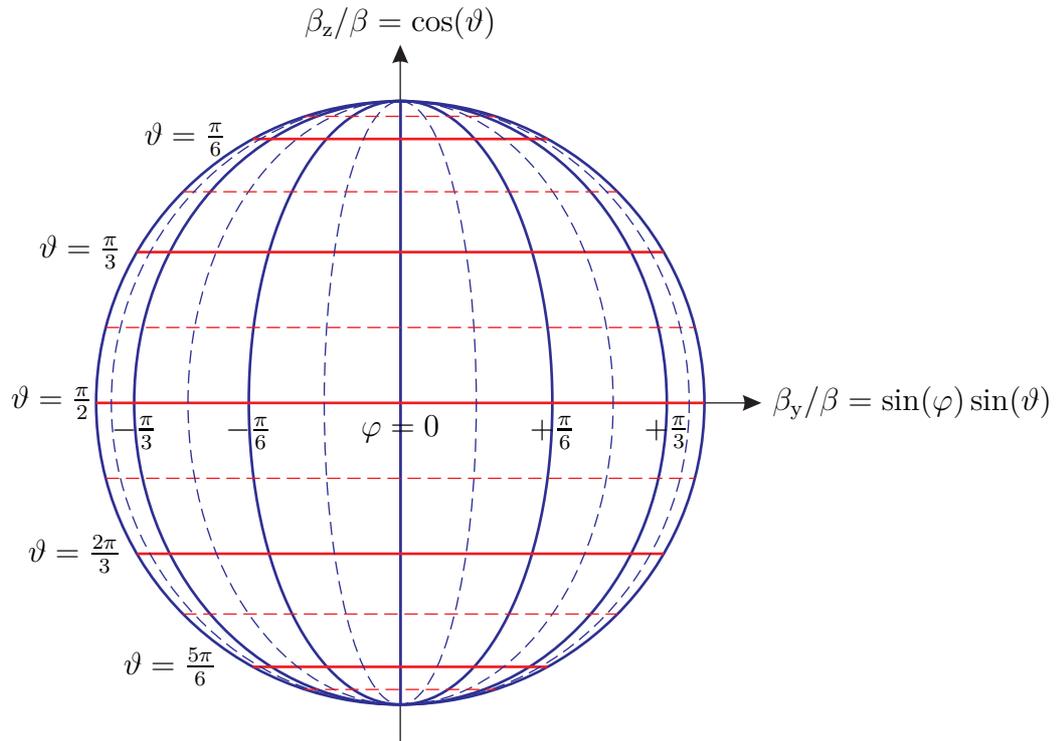
$$\left(\frac{\beta_y}{\beta}\right)^2 + \left(\frac{\beta_z}{\beta}\right)^2 \sin^2(\varphi) = \sin^2(\varphi),$$

das heißt die Orte konstanten Azimutwinkels  $\varphi$  entsprechen Ellipsen in der  $\beta_y$ - $\beta_z$ -Ebene, siehe Abbildung 5.9.

Häufig ist die Hauptstrahlrichtung senkrecht zur Apertur. Für einen kleinen Bereich um diese Hauptstrahlrichtung  $\vartheta = \pi/2$  und  $\varphi = 0$  beziehungsweise  $\beta_y = 0$

---

<sup>4</sup>Es gilt  $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$ .

Abbildung 5.9.: Abbildung der  $\vartheta$ - $\varphi$ -Ebene auf die  $\beta_y$ - $\beta_z$ -Ebene

und  $\beta_z = 0$  erhält man die folgenden linearen Approximationen:

$$\sin(\vartheta) \approx 1, \quad (5.28)$$

$$\cos(\vartheta) \approx \frac{\pi}{2} - \vartheta, \quad (5.29)$$

$$\sin(\varphi) \approx \varphi, \quad (5.30)$$

$$\beta_y \approx \beta \varphi, \quad (5.31)$$

$$\beta_z \approx \beta \left( \frac{\pi}{2} - \vartheta \right). \quad (5.32)$$

### 5.3.2. Aperturantennen mit konstanter Strombelegung

Es wird die in Abbildung 5.10 gezeigte rechteckförmige Apertur mit konstanter Strombelegung

$$\underline{J}_{Fz}(y', z') = \begin{cases} \underline{J}_{F0} & -\frac{a}{2} < y' < \frac{a}{2} \text{ und } -\frac{b}{2} < z' < \frac{b}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (5.33)$$

betrachtet.

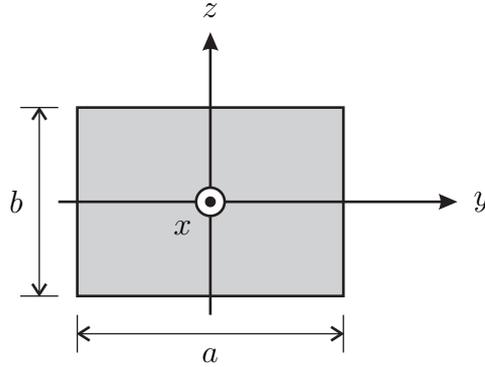


Abbildung 5.10.: Rechteckförmige Apertur

Der Gruppenrichtungsfaktor ergibt sich gemäß (5.27) als zweidimensionale Fourier-Transformation der Strombelegung  $\underline{J}_{Fz}(y', z')$ :<sup>5</sup>

$$\begin{aligned}
 \underline{E}_G(\beta_y, \beta_z) &= \int_{z'=-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{y'=-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \underline{J}_{F0} e^{j(\beta_y y' + \beta_z z')} dy' dz' \\
 &= \underline{J}_{F0} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \cos(\beta_y y') dy' \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \cos(\beta_z z') dz' \\
 &= \underline{J}_{F0} ab \frac{\sin\left(\frac{a}{2}\beta_y\right)}{\frac{a}{2}\beta_y} \frac{\sin\left(\frac{b}{2}\beta_z\right)}{\frac{b}{2}\beta_z} = \underline{J}_{F0} ab \operatorname{si}\left(\frac{a}{2}\beta_y\right) \operatorname{si}\left(\frac{b}{2}\beta_z\right).
 \end{aligned} \tag{5.34}$$

Die Fourier-Transformierte  $\operatorname{si}(\cdot)$  des Rechteckimpulses wird als Spaltfunktion bezeichnet. Abbildung 5.11 zeigt die sich aus dem Gruppenrichtungsfaktor mit (5.24) ergebende Gruppenrichtcharakteristik<sup>6</sup>

$$C_G(\beta_y, \beta_z) = \left| \operatorname{si}\left(\frac{a}{2}\beta_y\right) \right| \left| \operatorname{si}\left(\frac{b}{2}\beta_z\right) \right|. \tag{5.35}$$

Die Hauptstrahlrichtung der rechteckförmigen Aperturantenne mit konstanter Strombelegung ist  $\beta_y = 0$  und  $\beta_z = 0$ , das heißt senkrecht zur Apertur.<sup>7</sup> Den

<sup>5</sup>Es wird die Eulersche Formel  $e^{j\alpha} = \cos(\alpha) + j \sin(\alpha)$  verwendet.

<sup>6</sup>Es gilt  $\operatorname{si}(0) = 1$ .

<sup>7</sup>Aus Symmetriegründen strahlt die rechteckförmige Aperturantenne mit konstanter Strombelegung in positive wie in negative  $x$ -Richtung ab. Es handelt sich jedoch typischerweise um eine mit dem Huygens'schen Prinzip gefundene virtuelle Antenne. Da die reale Antenne nur in positive  $x$ -Richtung abstrahlt, ist auch nur dieser Teil des elektromagnetischen Feldes zu berücksichtigen.

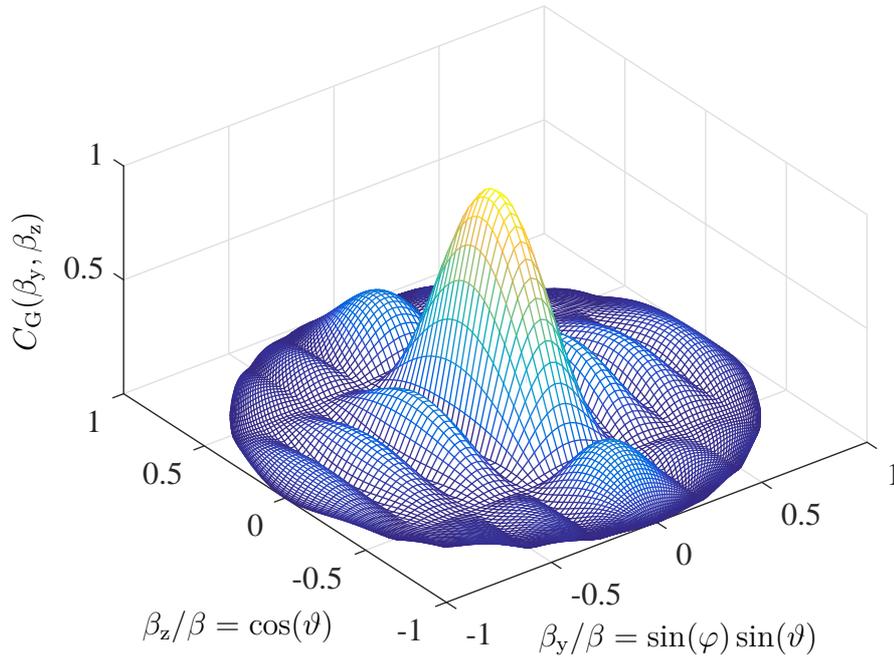


Abbildung 5.11.: Gruppenrichtcharakteristik  $C_G(\beta_y, \beta_z)$  einer rechteckförmigen Aperturantenne mit konstanter Strombelegung. Breite  $a = 4\lambda$  und Höhe  $b = 2\lambda$

Richtfaktor  $D$  kann man mit (5.9) berechnen. Das dabei zu berechnende Integral ist allerdings nur für den Sonderfall in Relation zur Wellenlänge  $\lambda$  großer Abmessungen  $a \gg \lambda$  und  $b \gg \lambda$  näherungsweise analytisch berechenbar. Dann ist die Strahlungsleistung in einer schmalen Hauptkeule um die Hauptstrahlrichtung konzentriert. Im Bereich signifikanter Werte der Richtcharakteristik (5.24) gilt dann wegen (5.28) näherungsweise

$$C^2(\beta_y, \beta_z) \approx C_G^2(\beta_y, \beta_z).$$

Für den Richtfaktor (5.9) folgt mit (5.31) und (5.32)

$$D \approx \frac{4\pi}{\int_{\vartheta=-\infty}^{\infty} \int_{\varphi=-\infty}^{\infty} C_G^2(\vartheta, \varphi) d\varphi d\vartheta} \approx \frac{4\pi\beta^2}{\int_{\beta_z=-\infty}^{\infty} \int_{\beta_y=-\infty}^{\infty} C_G^2(\beta_y, \beta_z) d\beta_y d\beta_z}. \quad (5.36)$$

Einsetzen der Gruppenrichtcharakteristik ergibt mit (4.43) der Richtfaktor<sup>8</sup>

$$D \approx \frac{4\pi\beta^2}{\int_{\beta_z=-\infty}^{\infty} \int_{\beta_y=-\infty}^{\infty} \text{si}^2\left(\frac{a}{2}\beta_y\right) \text{si}^2\left(\frac{b}{2}\beta_z\right) d\beta_y d\beta_z} = ab \frac{4\pi}{\lambda^2}. \quad (5.37)$$

**Aufgabe 5.3** Berechnen Sie die Gruppenrichtcharakteristik  $C_G(\beta_y, \beta_z)$  einer rechteckförmigen Aperturantenne mit kosinusförmiger Strombelegung

$$\underline{J}_{Fz}(y', z') = \begin{cases} \underline{J}_{F0} \cos\left(\frac{\pi y'}{a}\right) & -\frac{a}{2} \leq y' \leq \frac{a}{2} \text{ und } -\frac{b}{2} \leq z' \leq \frac{b}{2}, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

wie sie beispielsweise bei einer Hornantenne bei Anregung mit einer  $\text{TE}_{1,0}$ -Welle auftritt! Berechnen Sie für den Sonderfall in Relation zur Wellenlänge  $\lambda$  großer Abmessungen  $a \gg \lambda$  und  $b \gg \lambda$  den Richtfaktor  $D$  abhängig von Breite  $a$ , Höhe  $b$  und Wellenlänge  $\lambda$  näherungsweise aus der Gruppenrichtcharakteristik  $C_G(\beta_y, \beta_z)$ ! Berücksichtigen Sie wieder nur das in positive  $x$ -Richtung abgestrahlte elektromagnetische Feld.

## 5.4. Gruppenantennen

### 5.4.1. Allgemeine Betrachtungen zu Gruppenantennen

Gruppenantennen bestehen aus  $N$  Antennenelementen. Abbildung 5.12 zeigt als Beispiel eine zirkulare Gruppenantenne. Die Speiseströme  $\underline{I}_n$ ,  $n = 0 \dots N - 1$ , der Antennenelemente haben im Allgemeinen unterschiedliche Amplituden und Nullphasen. Die von den Antennenelementen abgestrahlten elektromagnetischen Felder überlagern sich vektoriell.

Im Folgenden sollen die Grundprinzipien der Gruppenantennen unter vereinfachenden, aber in praktischen Realisierungen häufig zumindest näherungsweise erfüllten Voraussetzungen erläutert werden:

- Die Gruppenantenne besteht aus identischen gleich orientierten Antennenelementen.
- Die Antennenelemente beeinflussen sich gegenseitig nicht. Diese Näherung ist nur bei hinreichend großen Antennenelementabständen zulässig.

Mit

---

<sup>8</sup>Es wird das bestimmte Integral  $\int_{-\infty}^{+\infty} \text{si}^2(ax) dx = \frac{\pi}{|a|}$  verwendet.



Abbildung 5.12.: Zirkulare Gruppenantenne eines Drehfunkfeuers

- dem von einem einzigen Antennenelement im Ursprung bei Speisung mit dem Strom  $\underline{I}_E$  erzeugten Richtungsfaktor  $\underline{\vec{F}}_E$ ,
- der Position  $\vec{r}'_n$  des  $n$ -ten Antennenelements und
- dem in die durch Poldistanzwinkel  $\vartheta$  und Azimutwinkel  $\varphi$  beschriebene betrachtete Ausbreitungsrichtung zeigenden Phasenvektor  $\vec{\beta}$  gemäß (2.13)

folgt für den von der Gruppenantenne erzeugten Richtungsfaktor

$$\underline{\vec{F}} = \frac{\underline{\vec{F}}_E}{\underline{I}_E} \underbrace{\sum_{n=0}^{N-1} \underline{I}_n e^{j\langle \vec{\beta}, \vec{r}'_n \rangle}}_{E_G}, \quad (5.38)$$

vergleiche (4.42) und (5.15). Der in der Summe auftretende Faktor  $e^{j\langle \vec{\beta}, \vec{r}'_n \rangle}$  berücksichtigt die sich aus den geometriebedingten Pfadlängenverkürzungen ergebenden Phasenverschiebungen. Das Zusammenwirken der Antennenelemente wird durch den Gruppenrichtungsfaktor

$$\underline{E}_G(\vartheta, \varphi) = \sum_{n=0}^{N-1} \underline{I}_n e^{j\langle \vec{\beta}, \vec{r}'_n \rangle} \quad (5.39)$$

beschrieben. Er ist von der Art der Antennenelemente unabhängig. Die Richtcharakteristik (5.5) ergibt sich entsprechend dem multiplikativen Gesetz zu

$$C(\vartheta, \varphi) = \frac{\|\vec{E}_E(\vartheta, \varphi) \underline{F}_G(\vartheta, \varphi)\|}{\|\vec{E}_E \underline{F}_G\|_{\max}} \sim \underbrace{\frac{\|\vec{E}_E(\vartheta, \varphi)\|}{\|\vec{E}_E\|_{\max}}}_{C_E(\vartheta, \varphi)} \underbrace{\frac{|F_G(\vartheta, \varphi)|}{|F_G|_{\max}}}_{C_G(\vartheta, \varphi)}. \quad (5.40)$$

Die Richtcharakteristik  $C(\vartheta, \varphi)$  ist proportional zum Produkt aus Elementrichtcharakteristik  $C_E(\vartheta, \varphi)$  und Gruppenrichtcharakteristik

$$C_G(\vartheta, \varphi) = \frac{|F_G(\vartheta, \varphi)|}{|F_G|_{\max}}. \quad (5.41)$$

Es gilt Gleichheit, falls die Hauptstrahlrichtungen der Elementrichtcharakteristik  $C_E(\vartheta, \varphi)$  und der Gruppenrichtcharakteristik  $C_G(\vartheta, \varphi)$  zusammenfallen.

Der Entwurfsraum der Gruppenantennen bietet viele zur Optimierung der Gruppenrichtcharakteristik  $C_G(\vartheta, \varphi)$  nutzbare Freiheitsgrade wie

- die räumliche Anordnung und Ausrichtung der Antennenelemente,
- die Ausrichtung der Gruppenantenne im Raum relativ zur gewünschten Hauptstrahlrichtung,
- die relativen Beträge der Speiseströme  $\underline{I}_n$ ,  $n = 0 \dots N - 1$ , und
- die Nullphasen der Speiseströme  $\underline{I}_n$ ,  $n = 0 \dots N - 1$ .

Die Möglichkeit, die Richtcharakteristik  $C(\vartheta, \varphi)$  einer Gruppenantenne auf elektronischem Wege insbesondere durch phasenverschobenes Ansteuern der Antennenelemente zu beeinflussen, wird in vielen Anwendungen in der Radartechnik (Phased Array Radar) und in der Funkkommunikationstechnik (MIMO-Systeme) genutzt.

## 5.4.2. Lineare Gruppenantennen

### 5.4.2.1. Allgemeine Betrachtungen zu linearen Gruppenantennen

Im Folgenden sollen exemplarisch lineare Gruppenantennen betrachtet werden. Die identischen gleich ausgerichteten Antennenelemente seien im gleichen gegenseitigen Abstand  $d$  auf der  $z$ -Achse angeordnet, siehe Abbildung 5.13. Die Position des  $n$ -ten Antennenelements sei

$$\vec{r}'_n = z_n \vec{u}_z = nd \vec{u}_z. \quad (5.42)$$

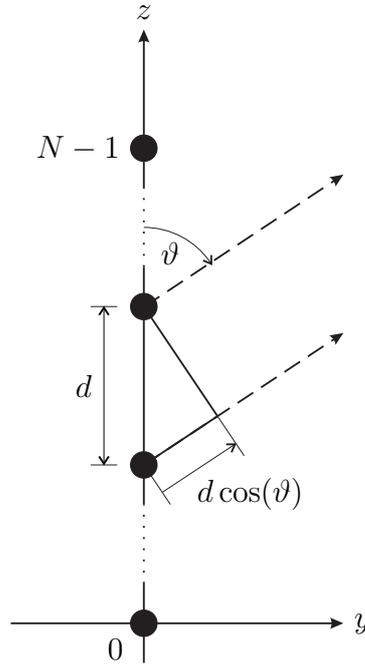


Abbildung 5.13.: Lineare Gruppenantenne

Die Anordnung ist rotationssymmetrisch bezüglich der  $z$ -Achse.

Mit dem in die betrachtete Ausbreitungsrichtung zeigenden Phasenvektor  $\vec{\beta}$  gemäß (2.13) folgt

$$\langle \vec{\beta}, \vec{r}_n \rangle = \beta n d \cos(\vartheta),$$

siehe Abbildung 5.13. Durch Einsetzen in (5.39) erhält man den wegen der Antennensymmetrie nur vom Poldistanzwinkel  $\vartheta$  abhängenden Gruppenrichtungsfaktor

$$\underline{F}_G(\vartheta) = \sum_{n=0}^{N-1} \underline{I}_n e^{j\beta n d \cos(\vartheta)}. \quad (5.43)$$

Mit der Substitution

$$\beta_d = \beta d \cos(\vartheta) \quad (5.44)$$

erkennt man, dass sich der Gruppenrichtungsfaktor

$$\underline{F}_G(\beta_d) = \sum_{n=0}^{N-1} \underline{I}_n e^{j\beta_d n} \quad (5.45)$$

als Fourier-Reihe mit den Koeffizienten  $\underline{I}_n$ ,  $n = 0 \dots N - 1$ , ergibt. Zur Analyse und Synthese von Gruppenantennen sind daher Methoden der digitalen Signalverarbeitung anwendbar [JD93; Tre02]. Insbesondere entspricht das Problem des

Entwurfs einer Strombelegung  $\underline{I}_n$ ,  $n = 0 \dots N - 1$ , zum bestmöglichen Approximieren eines gewünschten Gruppenrichtungsfaktors  $\underline{F}_G(\beta_d)$  mathematisch dem Problem des Entwurfs der Koeffizienten eines digitalen Filters zum bestmöglichen Approximieren einer gewünschten Übertragungsfunktion.

Die Koeffizienten  $\underline{I}_n$ ,  $n = 0 \dots N - 1$ , kann man auch als Abtastwerte einer kontinuierlichen Strombelegung ansehen. Der Gruppenrichtungsfaktor  $\underline{F}_G(\beta_d)$  ist infolge des Abtastens der Strombelegung im Ortsbereich eine periodische Funktion mit der Periode  $2\pi$ , vergleiche Anhang C.1.7. Im gesamten Winkelbereich gilt  $-1 \leq \cos(\vartheta) \leq 1$ . Zum Vermeiden sichtbarer periodischer Wiederholungen des Gruppenrichtungsfaktors  $\underline{F}_G(\beta_d)$  muss daher entsprechend dem Abtasttheorem für den Antennenelementabstand

$$2\pi \geq \beta d 2,$$

das heißt

$$d \leq \frac{\lambda}{2} \quad (5.46)$$

gelten, siehe Abbildung 5.14. Die endliche Ausdehnung der Gruppenantenne im Ortsbereich kann man als Ergebnis der Multiplikation mit einer Fensterfunktion auffassen, vergleiche Anhang C.1.4. Im Wellenzahlbereich ist der Gruppenrichtungsfaktor der zunächst unendlich ausgedehnten Strombelegung dann mit der Fourier-Transformierten der Fensterfunktion zu falten, um den Gruppenrichtungsfaktor  $\underline{F}_G(\beta_d)$  der endlich ausgedehnten Gruppenantenne zu erhalten. Dies führt im Allgemeinen zu einer Verbreiterung der Maxima und zu zusätzlichen Nebenmaxima der Gruppenrichtcharakteristik  $C_G(\vartheta, \varphi)$ .

#### 5.4.2.2. Lineare Gruppenantennen mit Strombelegung konstanten Phasendekrements

**Strombelegung konstanten Phasendekrements** Im Folgenden seien die Amplituden der Speiseströme  $\underline{I}_n$ ,  $n = 0 \dots N - 1$ , alle gleich:

$$|\underline{I}_n| = |\underline{I}_0|.$$

Weiterhin seien auch die relativen Phasenverschiebungen der Speiseströme benachbarter Antennenelemente gleich. Der  $n$ -te Speisestrom ergibt sich dann mit dem Phasendekrement  $\psi$  zu

$$\underline{I}_n = \underline{I}_0 e^{-jn\psi}. \quad (5.47)$$

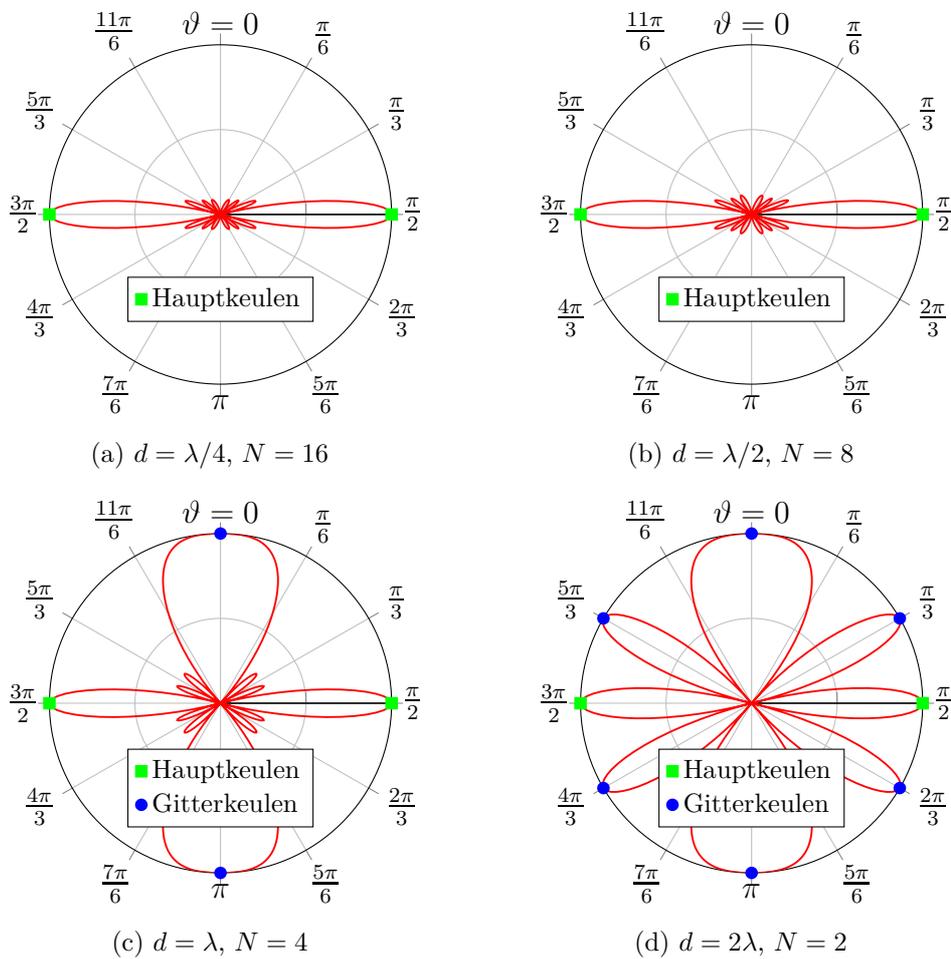


Abbildung 5.14.: Einfluss des Antennenelementabstands  $d$  auf die Gruppenrichtcharakteristik  $C_G(\vartheta)$  einer linearen Gruppenantenne mit konstanter Strombelegung  $I_n = I_0, n = 0 \dots N - 1$ . Die Größe der gesamten Apertur ist konstant  $Nd = 4\lambda$ . Bei kleinem Antennenelementabstand  $d$  konvergiert die Gruppenrichtcharakteristik  $C_G(\vartheta)$  gegen die sich bei einer kontinuierlichen Strombelegung ergebenden Richtcharakteristik, vergleiche Abbildung E.5b. Man beachte, dass die Richtcharakteristik in Abbildung E.5b zusätzlich mit der Elementrichtcharakteristik  $C_E(\vartheta) = |\sin(\vartheta)|$  gewichtet ist, was jedoch nur im Bereich der Nebenneulen (Side Lobes) sichtbar ist. Unterabtasten führt zu als Gitterneulen (Grating Lobes) bezeichneten periodischen Wiederholungen der Hauptneulen (Main Lobes)

**Gruppenrichtungsfaktor** Mit (5.45) erhält man den Gruppenrichtungsfaktor<sup>910</sup>

$$\begin{aligned}
 \underline{F}_G(\beta_d) &= \underline{I}_0 \frac{1 - e^{-jN\psi} e^{jN\beta_d}}{1 - e^{-j\psi} e^{j\beta_d}} \\
 &= \underline{I}_0 e^{j\frac{N-1}{2}(\beta_d - \psi)} \frac{e^{-j\frac{N}{2}(\beta_d - \psi)} - e^{j\frac{N}{2}(\beta_d - \psi)}}{e^{-j\frac{1}{2}(\beta_d - \psi)} - e^{j\frac{1}{2}(\beta_d - \psi)}} \\
 &= N \underline{I}_0 e^{j\frac{N-1}{2}(\beta_d - \psi)} \frac{\sin\left(\frac{N}{2}(\beta_d - \psi)\right)}{\underbrace{N \sin\left(\frac{1}{2}(\beta_d - \psi)\right)}_{\text{di}_N(\beta_d - \psi)}}.
 \end{aligned} \tag{5.48}$$

Die hier auftretende Funktion  $\text{di}_N(\cdot)$  wird als Dirichlet-Kern bezeichnet.

**Hauptstrahlrichtung** In der Hauptstrahlrichtung

$$\beta_{d,\max} = \psi \tag{5.49}$$

des Gruppenrichtungsfaktors  $\underline{F}_G(\beta_d)$  werden die geometriebedingten Phasenverschiebungen durch das Phasendekrement  $\psi$  kompensiert, siehe (5.48). Mit (5.44) findet man den zugehörigen Azimutwinkel

$$\vartheta_{\max} = \arccos\left(\frac{\psi}{\beta d}\right). \tag{5.50}$$

Der Maximalwert des Betrags des Gruppenrichtungsfaktors  $\underline{F}_G(\beta_d)$  ergibt sich aus (5.48) mit der de l'Hospital'schen Regel zu<sup>11</sup>

$$|\underline{F}_G|_{\max} = N |\underline{I}_0|. \tag{5.51}$$

Bei größeren Abständen  $d > \lambda/2$  der Antennenelemente kann es weitere, als Gitterkeulen bezeichnete, sichtbare periodische Wiederholungen der Hauptkeule geben. Die Hauptstrahlrichtung der Gruppenantenne weicht bei nicht omnidirektionalen Antennenelementen möglicherweise von der hier berechneten Hauptstrahlrichtung des Gruppenrichtungsfaktors  $\underline{F}_G(\beta_d)$  ab.

---

<sup>9</sup>Es wird die Summenformel  $\sum_{n=0}^{N-1} q^n = \frac{1-q^N}{1-q}$  der endlichen geometrischen Reihe verwendet.

<sup>10</sup>Es wird die Eulersche Formel  $e^{j\alpha} = \cos(\alpha) + j \sin(\alpha)$  verwendet.

<sup>11</sup>Es gilt  $\text{di}_N(0) = 1$ .

**Nullstellen** Nullstellen des Gruppenrichtungsfaktors  $\underline{E}_G(\beta_d)$  gemäß (5.48) ergeben sich, sofern keine Gitterkeulen auftreten, für

$$\sin\left(\frac{N}{2}(\beta_{d,0} - \psi)\right) = 0,$$

das heißt

$$\beta_{d,0} = \frac{2m\pi}{N} + \psi, \quad m = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (5.52)$$

Mit (5.44) findet man die zugehörigen Azimutwinkel

$$\vartheta_0 = \arccos\left(\frac{\frac{2m\pi}{N} + \psi}{\beta d}\right), \quad m = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (5.53)$$

**Richtfaktor** Es sei vorausgesetzt, dass die Hauptstrahlrichtungen der Elementtrichtcharakteristik  $C_E(\beta_d)$  und der Gruppenrichtcharakteristik  $C_G(\beta_d)$  zusammenfallen. In der Hauptstrahlrichtung überlagern sich die elektromagnetischen Felder der Antennenelemente konstruktiv, das heißt die von der Gruppenantenne abgestrahlten Feldstärken in Hauptstrahlrichtung sind  $N$ -mal so groß wie die von einem einzigen Antennenelement abgestrahlten Feldstärken. Die Intensität  $S$  ist folglich um den Faktor  $N^2$  erhöht. Wenn man noch berücksichtigt, dass die von der Gruppenantenne insgesamt abgestrahlte Leistung  $P$  das  $N$ -fache der von einem einzigen Antennenelement abgestrahlten Leistung ist, ergibt sich der Richtfaktor der Gruppenantenne zu

$$D = D_E N, \quad (5.54)$$

wobei  $D_E$  der Richtfaktor des Antennenelements ist.

**Gruppenrichtcharakteristik** Die Gruppenrichtcharakteristik erhält man gemäß (5.41) durch Normieren des Betrags des Gruppenrichtungsfaktors (5.48) auf seinen Maximalbetrag  $|\underline{L}_0| N$ :

$$C_G(\beta_d) = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} e^{jn(\beta_d - \psi)} \right| = |\text{di}_N(\beta_d - \psi)|. \quad (5.55)$$

In Abbildung 5.15 sind die Gruppenrichtcharakteristiken  $C_G(\vartheta)$  einiger exemplarischer linearer Gruppenantennen als Funktionen des Poldistanzwinkels  $\vartheta$  dargestellt, siehe (5.44). Zum Ermitteln der Richtcharakteristiken  $C(\vartheta)$  der Gruppenantennen wäre noch eine Wichtung mit der Elementtrichtcharakteristik  $C_E(\vartheta)$  erforderlich.

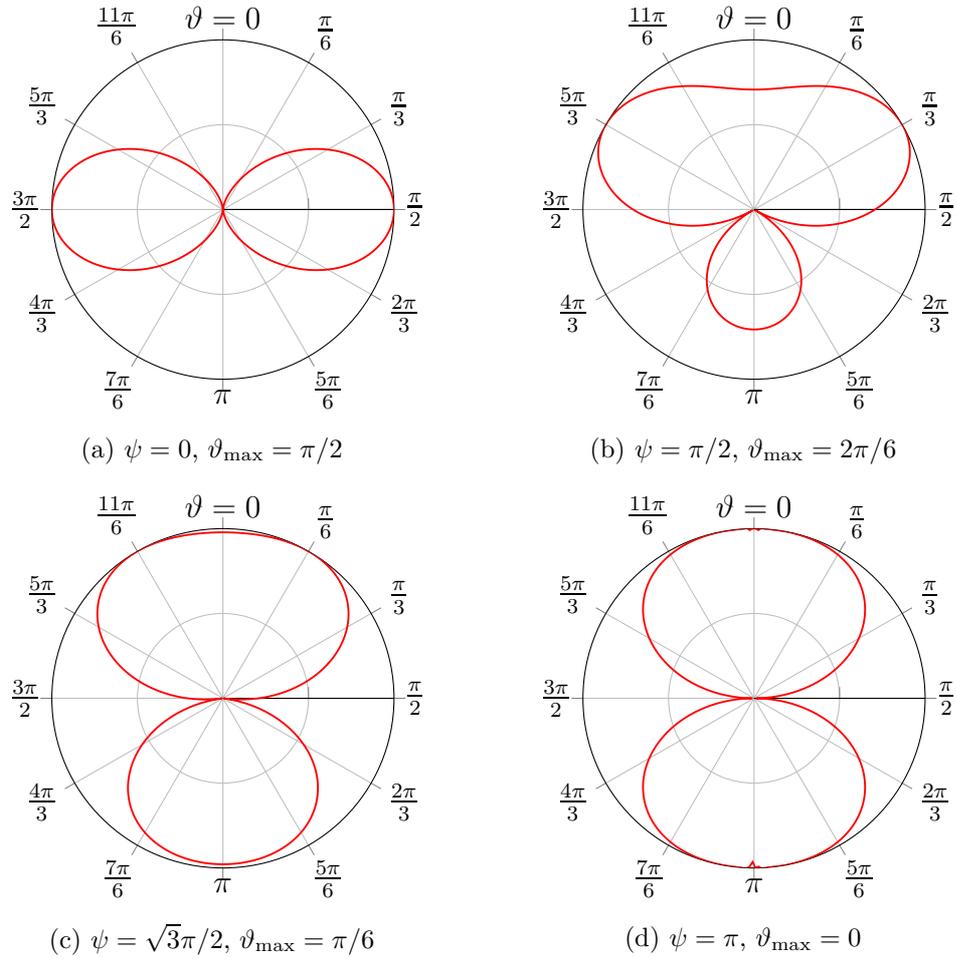


Abbildung 5.15.: Schwenken der Hauptstrahlrichtung der Gruppenrichtcharakteristik  $C_G(\vartheta)$  einer linearen Gruppenantenne aus zwei Antennenelementen durch Einstellen des Phasendekrements  $\psi$ . Antennenelementabstand  $d = \lambda/2$

**Aufgabe 5.4** Es wird eine lineare Gruppenantenne aus  $N$  omnidirektionalen Antennenelementen mit einer Strombelegung konstanten Phasendekrements  $\psi$  betrachtet. Berechnen Sie mit (5.9) den Richtfaktor  $D$  aus der Richtcharakteristik

$$C(\vartheta) = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} e^{jn(\beta d \cos(\vartheta) - \psi)} \right|$$

Wie erklären Sie sich die Abweichung zu dem in (5.54) angegebenen Wert  $D = N$ ?

**Aufgabe 5.5** Es wird eine lineare Gruppenantenne aus  $N$  Antennenelementen  $n = 0 \dots N - 1$  mit binomialer Strombelegung betrachtet. Die Antennenelemente sind entlang der  $z$ -Achse im Abstand  $d$  angeordnet. Mit dem Binomialkoeffizienten gilt für den Speisestrom des  $n$ -ten Antennenelements

$$I_n = I_0 \binom{N-1}{n} = I_0 \frac{(N-1)!}{n!(N-1-n)!}$$

Bei binomialer Strombelegung lässt sich die Gruppenantenne aus  $N + 1$  Antennenelementen als Kombination zweier um  $d$  gegeneinander verschobener Gruppenantennen mit jeweils  $N$  Antennenelementen darstellen, siehe Abbildung 5.16. Bestimmen Sie die Gruppenrichtcharakteristik einer Gruppenantenne aus  $N$  Antennenelementen mit binomialer Strombelegung! Berechnen Sie den Richtfaktor  $D$  einer Gruppenantenne aus  $N$  omnidirektionalen Antennenelementen mit binomialer Strombelegung für einen Antennenabstand von  $d = \lambda/2$ !

$$\begin{array}{c} I_0 \bullet \\ \hline I_0 \bullet \end{array} + \begin{array}{c} I_0 \bullet \\ \hline I_0 \bullet \end{array} = \begin{array}{c} I_0 \bullet \\ \hline I_0 \bullet \end{array}$$

$$\begin{array}{c} I_0 \bullet \\ \hline I_0 \bullet \end{array} + \begin{array}{c} I_0 \bullet \\ \hline I_0 \bullet \end{array} = \begin{array}{c} I_0 \bullet \\ \hline 2I_0 \bullet \\ \hline I_0 \bullet \end{array}$$

$$\begin{array}{c} I_0 \bullet \\ \hline 2I_0 \bullet \\ \hline I_0 \bullet \end{array} + \begin{array}{c} I_0 \bullet \\ \hline 2I_0 \bullet \\ \hline I_0 \bullet \end{array} = \begin{array}{c} I_0 \bullet \\ \hline 3I_0 \bullet \\ \hline 3I_0 \bullet \\ \hline I_0 \bullet \end{array}$$

Abbildung 5.16.: Rekursives Konstruieren einer binomialen Strombelegung



## Kapitel 6.

# Ausbreitung elektromagnetischer Wellen

## 6.1. Freiraumausbreitung

### 6.1.1. Wirkfläche

Eine als Empfangsantenne betriebene Antenne sei einer einfallenden ebenen homogenen Welle ausgesetzt. Die Antenne gibt dann an den Empfänger eine Empfangsleistung  $P_R$  ab, die proportional zur Intensität  $S$  der einfallenden ebenen homogenen Welle ist. Bei sowohl bezüglich der Raumrichtung optimaler Ausrichtung als auch bezüglich der Polarisierung optimaler Anpassung der Antenne und bei Leistungsanpassung gibt die Antenne die Empfangsleistung

$$P_R = SA_R \quad (6.1)$$

an den Empfänger ab. Der Proportionalitätsfaktor  $A_R$  hat die Einheit einer Fläche und wird als Wirkfläche der Antenne bezeichnet. Die Wirkfläche  $A_R$  entspricht im Allgemeinen nicht der geometrischen Querschnittsfläche der Antenne. Nur bei großen Aperturantennen entspricht die Wirkfläche  $A_R$  näherungsweise der geometrischen Querschnittsfläche der Antenne.

### 6.1.2. Empfangsleistung

Es wird die in Abbildung 6.1 gezeigte Funkübertragungsstrecke betrachtet. Der Abstand  $r$  zwischen Sender und Empfänger sei groß im Vergleich zur Wellenlänge  $\lambda$  und zu den Antennenabmessungen, das heißt der Empfänger befindet sich im Fernfeld des Senders.

Sowohl der Sender als auch der Empfänger seien leistungsangepasst. Die vom Sender an die Sendeantenne abgegebene Sendeleistung ist  $P_T$ . Mit dem Gewinn  $G_T$  der Sendeantenne ist die vom Sender am Ort des Empfängers erzeugte Intensität bei optimaler Ausrichtung der Sendeantenne

$$S = \frac{P_T}{4\pi r^2} G_T, \quad (6.2)$$

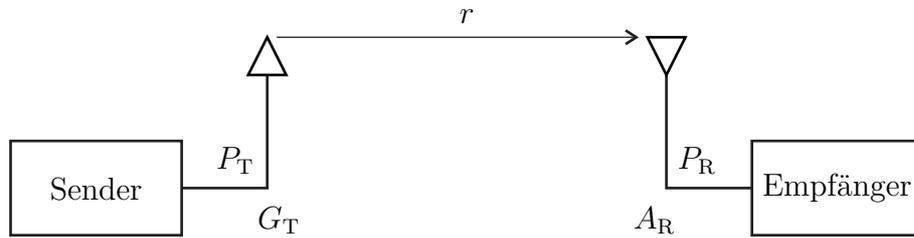


Abbildung 6.1.: Funkübertragungsstrecke

siehe (5.2) und (5.3). Die Empfangsleistung ergibt sich mit der Wirkfläche  $A_R$  der Empfangsantenne bei optimaler Ausrichtung der Empfangsantenne und bei Polarisationsanpassung zu

$$P_R = S A_R = \frac{P_T}{4\pi r^2} G_T A_R, \quad (6.3)$$

siehe (6.1). Die Empfangsleistung  $P_R$  nimmt mit  $1/r^2$  ab, das heißt der Dämpfungsexponent ist zwei. Das Verhältnis

$$\frac{P_R}{P_T} = \frac{1}{4\pi r^2} G_T A_R \quad (6.4)$$

aus Empfangsleistung und Sendeleistung wird als Übertragungsfaktor bezeichnet. Der Übertragungsfaktor entspricht aufgrund der hier angenommenen Leistungsanpassungen dem in Abschnitt 12.4.6 eingeführtem maximalen verfügbaren Leistungsgewinn  $G_{\text{MAG}}$  der als Zweiter betrachteten Funkübertragungsstrecke.

### 6.1.3. Zusammenhang zwischen Gewinn und Wirkfläche

Der Funkkanal ist reziprok, weil die Antennen und die Szenarien, in denen sich die elektromagnetischen Wellen ausbreiten, praktisch ausschließlich aus linearen und isotropen Materialien bestehen. Jede Sendeantenne ist auch als Empfangsantenne nutzbar und umgekehrt. Insbesondere hängt der Übertragungsfaktor (6.4) einer Funkübertragungsstrecke nicht davon ab, welche der beiden Antennen als Sendeantenne und welche als Empfangsantenne genutzt wird. Es sind folglich zwei Übertragungsrichtungen zu vergleichen:

1. Antenne 1 mit dem Gewinn  $G_1$  wird als Sendeantenne und Antenne 2 mit der Wirkfläche  $A_2$  wird als Empfangsantenne genutzt. Der Übertragungsfaktor ergibt sich zu

$$\frac{P_R}{P_T} = \frac{1}{4\pi r^2} G_1 A_2.$$

2. Antenne 2 mit dem Gewinn  $G_2$  wird als Sendeantenne und Antenne 1 mit der Wirkfläche  $A_1$  wird als Empfangsantenne genutzt. Der Übertragungsfaktor ergibt sich zu

$$\frac{P_R}{P_T} = \frac{1}{4\pi r^2} G_2 A_1.$$

Aus der Gleichheit der beiden Ausdrücke folgt

$$\frac{A_1}{G_1} = \frac{A_2}{G_2}.$$

Das Verhältnis aus Gewinn  $G$  und Wirkfläche  $A$  ist für alle Antennen gleich.

Die Wirkfläche einer großen rechteckförmigen verlustfreien Aperturantenne mit konstanter Strombelegung entspricht der geometrischen Querschnittsfläche

$$A = ab.$$

Einsetzen des in (5.37) berechneten Richtfaktors  $D$ , der wegen der hier angenommenen Verlustfreiheit  $\eta = 1$  dem Gewinn  $G$  entspricht, ergibt die für alle Antennen gültige Beziehung

$$\frac{A}{G} = \frac{\lambda^2}{4\pi} \quad (6.5)$$

zwischen Gewinn und Wirkfläche. Üblicherweise wird in Datenblättern nur der Gewinn  $G$  einer Antenne angegeben. Die Wirkfläche  $A$  lässt sich dann einfach berechnen.

Man kann nun die Wirkfläche  $A_R$  als Funktion des Gewinns  $G_R$  in (6.3) einsetzen und erhält die Friis-Übertragungsgleichung [Fri46]<sup>1</sup>

$$P_R = P_T \left( \frac{\lambda}{4\pi r} \right)^2 G_T G_R. \quad (6.6)$$

Die Empfangsleistung nimmt mit wachsender Kreisfrequenz  $\omega$ , das heißt sinkender Wellenlänge  $\lambda$  quadratisch ab.

**Aufgabe 6.1** *Im Fernfeld einer Sendeantenne im Abstand  $r = 1000$  m befindet sich eine Empfangsantenne. Die Sendeleistung sei  $P_T = 100$  W. Es werde angenommen, dass die Sendeantenne omnidirektional ist. Die Empfangsantenne sei auf die Sendeantenne optimal ausgerichtet, polarisationsangepasst und an den Empfängereingang leistungsangepasst. Die Wirkfläche der Empfangsantenne sei  $A_R = 1$  m<sup>2</sup>. Der Gewinn der Empfangsantenne sei  $G_R = 10$ . Bestimmen Sie die Wellenlänge  $\lambda$ , die Intensität  $S$  am Ort der Empfangsantenne und die Empfangsleistung  $P_R$ !*

<sup>1</sup>Wenn man Leistungsverhältnisse und Gewinne logarithmisch in der Pseudoeinheit dB angibt, wird aus der Multiplikation eine Addition  $10 \log\left(\frac{P_R}{P_T}\right) = 10 \log\left(\left(\frac{\lambda}{4\pi r}\right)^2 G_T G_R\right) = 20 \log\left(\frac{\lambda}{4\pi r}\right) + 10 \log(G_T) + 10 \log(G_R)$ .

### 6.1.4. Polarimetrische Analyse der Freiraumausbreitung

Nun werden beliebig ausgerichtete Antennen beliebiger Polarisations-eigenschaften betrachtet. Die senderseitigen und empfängerseitigen lokalen Koordinatensysteme seien im Raum parallel ausgerichtet, siehe Abbildung 6.2.

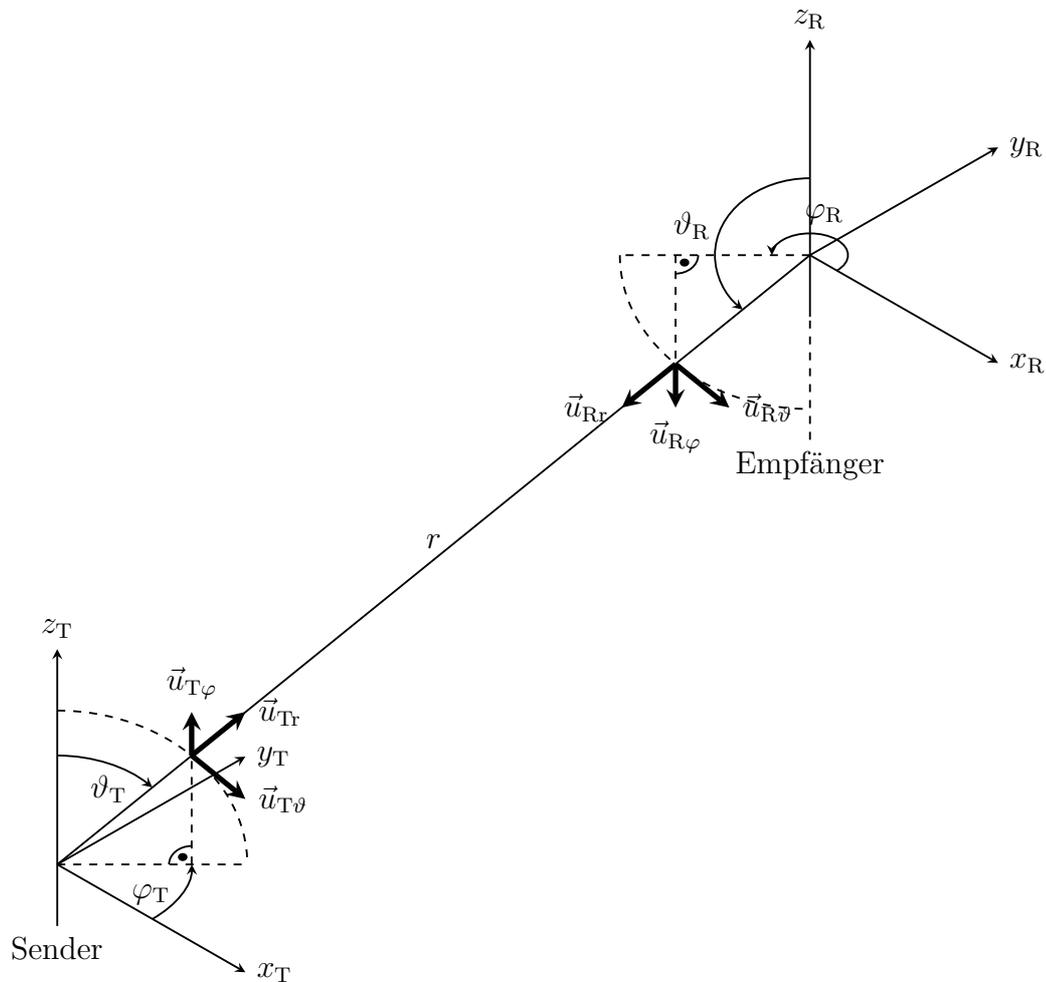


Abbildung 6.2.: Senderseitiges und empfängerseitiges lokales Koordinatensystem

Beim Berechnen der Empfangsleistung sind die vektoriellen komplexen Richtcharakteristiken der Sendeantenne  $\underline{\mathbf{C}}_T(\vartheta_T, \varphi_T)$  in Ausfallsrichtung  $\vartheta_T, \varphi_T$  und der Empfangsantenne  $\underline{\mathbf{C}}_R(\vartheta_R, \varphi_R)$  in Einfallrichtung  $\vartheta_R, \varphi_R$  zu berücksichtigen. Gemäß der Definition (5.11) der vektoriellen komplexen Richtcharakteristik der Sendeantenne ergibt sich die  $\vartheta$ - oder  $\varphi$ -Komponente der elektrischen Feldstärke

am im Fernfeld befindlichen Ort der Empfangsantenne zu

$$\underline{E}_{\vartheta\varphi} = \|\underline{\vec{E}}\|_{\max} \underline{C}_{T\vartheta\varphi}(\vartheta_T, \varphi_T) e^{-j\beta r}.$$

Der Beitrag der einzelnen Polarisationskomponenten zur Intensität am Empfangsort ergibt sich mit (4.52) und (6.2) zu

$$\begin{aligned} S_{\vartheta\varphi} &= \frac{1}{2} \frac{1}{Z_F} |\underline{E}_{\vartheta\varphi}|^2 \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{Z_F} \underbrace{\|\underline{\vec{E}}\|_{\max}^2}_{S_{\max}} |\underline{C}_{T\vartheta\varphi}(\vartheta_T, \varphi_T) e^{-j\beta r}|^2 \\ &= \frac{P_T G_T}{4\pi r^2} |\underline{C}_{T\vartheta\varphi}(\vartheta_T, \varphi_T) e^{-j\beta r}|^2. \end{aligned}$$

Die aus dem Empfang einer einzigen Polarisationskomponente resultierende Empfangsleistung ergibt sich mit (6.1) und (6.5) unter Berücksichtigen der Richtwirkung und der Polarisations Eigenschaften der Empfangsantenne gemäß (5.11) zu

$$\begin{aligned} P_{R\vartheta\varphi} &= S_{\vartheta\varphi} |\underline{C}_{R\vartheta\varphi}(\vartheta_R, \varphi_R)|^2 \underbrace{G_R \frac{\lambda^2}{4\pi}}_{A_R} \\ &= P_T \left( \frac{\lambda}{4\pi r} \right)^2 G_T G_R |\underline{C}_{R\vartheta\varphi}(\vartheta_R, \varphi_R) e^{-j\beta r} \underline{C}_{T\vartheta\varphi}(\vartheta_T, \varphi_T)|^2. \end{aligned}$$

Überlagern der Empfangssignale der beiden Polarisationskomponenten ergibt die gesamte Empfangsleistung

$$\begin{aligned} P_R &= P_{R\vartheta} + P_{R\varphi} \\ &= P_T \left( \frac{\lambda}{4\pi} \right)^2 G_T G_R \\ &\quad \left| \underline{C}_{T\vartheta}(\vartheta_T, \varphi_T) \frac{e^{-j\beta r}}{r} \underline{C}_{R\vartheta}(\vartheta_R, \varphi_R) - \underline{C}_{T\varphi}(\vartheta_T, \varphi_T) \frac{e^{-j\beta r}}{r} \underline{C}_{R\varphi}(\vartheta_R, \varphi_R) \right|^2 \quad (6.7) \\ &= P_T \left( \frac{\lambda}{4\pi} \right)^2 G_T G_R \left| \underline{C}_R^T(\vartheta_R, \varphi_R) \cdot \underbrace{\frac{e^{-j\beta r}}{r} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\underline{\mathbf{T}}} \cdot \underline{C}_T(\vartheta_T, \varphi_T) \right|^2. \end{aligned}$$

Man beachte, dass die senderseitigen und empfängerseitigen Einheitsvektoren in  $\varphi$ -Richtung entgegengesetzt gerichtet sind, siehe Abbildung 6.2. Die Transfermatrix  $\underline{\mathbf{T}}$  beschreibt die Amplitudenabnahmen und die Phasendrehungen der Polarisationskomponenten auf dem Ausbreitungspfad. Da der Polarisationszustand

einer elektromagnetischen Welle bei Freiraumausbreitung unverändert bleibt und die Koordinatensysteme parallel ausgerichtet sind, sind die Nichtdiagonalelemente der Transfermatrix  $\underline{\mathbf{T}}$  hier Null.

In (6.7) gilt mit der Schwarzschen Ungleichung

$$\left| \underline{\mathbf{C}}_{\mathbf{R}}^{\mathbf{T}}(\vartheta_{\mathbf{R}}, \varphi_{\mathbf{R}}) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \underline{\mathbf{C}}_{\mathbf{T}}(\vartheta_{\mathbf{T}}, \varphi_{\mathbf{T}}) \right| \leq \|\underline{\mathbf{C}}_{\mathbf{R}}(\vartheta_{\mathbf{R}}, \varphi_{\mathbf{R}})\| \|\underline{\mathbf{C}}_{\mathbf{T}}(\vartheta_{\mathbf{T}}, \varphi_{\mathbf{T}})\|. \quad (6.8)$$

Gleichheit gilt bei Polarisationsanpassung

$$\underline{\mathbf{C}}_{\mathbf{R}}(\vartheta_{\mathbf{R}}, \varphi_{\mathbf{R}}) \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \underline{\mathbf{C}}_{\mathbf{T}}(\vartheta_{\mathbf{T}}, \varphi_{\mathbf{T}})^*. \quad (6.9)$$

Wenn die Antennen weiterhin optimal ausgerichtet sind

$$\|\underline{\mathbf{C}}_{\mathbf{R}}(\vartheta_{\mathbf{R}}, \varphi_{\mathbf{R}})\| = \|\underline{\mathbf{C}}_{\mathbf{T}}(\vartheta_{\mathbf{T}}, \varphi_{\mathbf{T}})\| = 1,$$

gilt in (6.7)

$$\left| \underline{\mathbf{C}}_{\mathbf{R}}^{\mathbf{T}}(\vartheta_{\mathbf{R}}, \varphi_{\mathbf{R}}) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \underline{\mathbf{C}}_{\mathbf{T}}(\vartheta_{\mathbf{T}}, \varphi_{\mathbf{T}}) \right| = \|\underline{\mathbf{C}}_{\mathbf{R}}(\vartheta_{\mathbf{R}}, \varphi_{\mathbf{R}})\| \|\underline{\mathbf{C}}_{\mathbf{T}}(\vartheta_{\mathbf{T}}, \varphi_{\mathbf{T}})\| = 1 \quad (6.10)$$

und die polarimetrische Berechnungsformel (6.7) geht in die konventionelle skalare Berechnungsformel (6.6) über.

## 6.2. Reflexion und Transmission an Grenzflächen

### 6.2.1. Schräger Einfall einer ebenen homogenen Welle

Zunächst wird eine einzige, schräg auf eine ebene Grenzfläche zwischen zwei Dielektrika einfallende, ebene homogene Welle betrachtet. Das Koordinatensystem wird vereinfachend so gewählt, dass sich die Grenzfläche bei  $z = 0$  befindet und die Einfallsebene der  $x$ - $z$ -Ebene entspricht, siehe Abbildung 6.3.

Der in die Ausbreitungsrichtung in der  $x$ - $z$ -Ebene zeigende Phasenvektor gemäß (2.13) hat die  $x$ -Komponente

$$\beta_x = \beta \sin(\vartheta) \quad (6.11)$$

und die  $z$ -Komponente

$$\beta_z = \beta \cos(\vartheta).$$

Mit (2.14) und (2.15) folgt für die Feldstärken

$$\vec{\underline{H}} = \vec{\underline{H}}_0 e^{-j\langle \vec{\beta}, \vec{r} \rangle} = \vec{\underline{H}}_0 e^{-j\beta_x x} e^{-j\beta_z z} \quad (6.12)$$

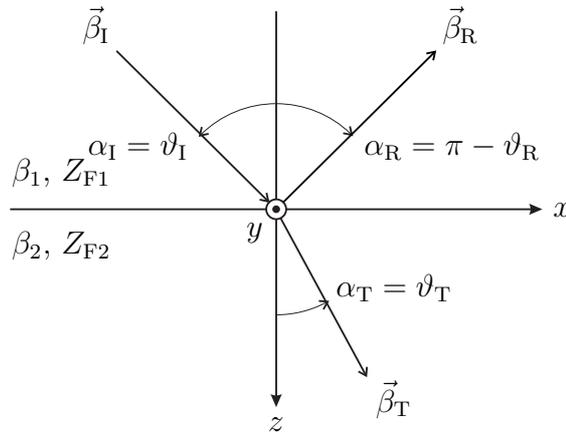


Abbildung 6.3.: Einfallende, reflektierte und transmittierte elektromagnetische Welle

und

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-j\langle \vec{\beta}, \vec{r} \rangle} = \vec{E}_0 e^{-j\beta_x x} e^{-j\beta_z z}. \quad (6.13)$$

Das Erfüllen der Grenzflächenbedingungen erfordert neben der einfallenden ebenen homogenen Welle im Allgemeinen auch die Existenz einer reflektierten und einer transmittierten ebenen homogenen Welle.

Die Grenzflächenbedingungen können nur dann gleichzeitig in allen Punkten  $z = 0$  der Grenzfläche erfüllt sein, wenn die  $x$ -Komponenten der Phasenvektoren, das heißt die Komponenten in Richtung der Grenzfläche, für alle drei ebenen homogenen Wellen gleich sind. Beim Betrachten von elektromagnetischen Wellen an Grenzflächen ist es weiterhin üblich, den Einfallswinkel  $\alpha_I$ , den Reflexionswinkel  $\alpha_R$  und den Brechungswinkel  $\alpha_T$  bezüglich der Grenzflächennormalen zu messen, siehe Abbildung 6.3. Mit (6.11) folgt

$$\beta_1 \sin(\alpha_I) = \beta_1 \sin(\alpha_R) = \beta_2 \sin(\alpha_T).$$

Das heißt der Einfallswinkel  $\alpha_I$  ist gleich dem Reflexionswinkel  $\alpha_R$  und für den Brechungswinkel gilt das Snellius'sche Brechungsgesetz

$$\frac{\sin(\alpha_I)}{\sin(\alpha_T)} = \sqrt{\frac{\beta_2}{\beta_1}}. \quad (6.14)$$

Es folgt

$$\sin(\alpha_T) = \sin(\alpha_I) \sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_2}}.$$

Für

$$\sin(\alpha_I) \sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_2}} > 1,$$

das heißt

$$\alpha_I > \alpha_G = \arcsin\left(\sqrt{\frac{\beta_2}{\beta_1}}\right), \quad (6.15)$$

hat diese Gleichung keine Lösung. Es tritt Totalreflexion auf. Den Einfallswinkel  $\alpha_G$  bezeichnet man als Grenzwinkel der Totalreflexion.

Mit dem Brechungsindex

$$n = \sqrt{\varepsilon_r \mu_r} = \frac{c_0}{c}, \quad (6.16)$$

siehe auch (2.44) und (2.45), und (2.24) folgt

$$\sin(\alpha_T) = \sin(\alpha_I) \frac{n_1}{n_2}.$$

Jede beliebig polarisierte ebene homogene Welle lässt sich in eine linear senkrecht zur Einfallsebene und eine linear parallel zur Einfallsebene polarisierte ebene homogene Welle zerlegen. Im Folgenden werden die beiden genannten linearen Polarisationszustände getrennt betrachtet, siehe Abbildung 6.4 und Abbildung 6.5.

## 6.2.2. Fresnelsche Formeln

### 6.2.2.1. Senkrechte Polarisation

Die Fresnelschen Formeln dienen dem Berechnen der Reflexionsfaktoren und der Transmissionsfaktoren. Im Folgenden sei der Fall der Totalreflexion ausgeschlossen. Die Tangentialkomponenten der elektrischen Feldstärken entsprechen im hier betrachteten Fall der zur Einfallsebene senkrechten Polarisation den  $y$ -Komponenten, die auch die einzigen vorhandenen Komponenten der elektrischen Feldstärken sind. Die Tangentialkomponenten der magnetischen Feldstärken entsprechen den  $x$ -Komponenten. Die magnetischen Feldstärken kann man mit den Feldwellenwiderständen aus den elektrischen Feldstärken berechnen, siehe (2.28). Durch Projektion erhält man die  $x$ -Komponenten der magnetischen Feldstärken:

$$\begin{aligned} \underline{H}_{I0x} &= -\underline{E}_{I0y} \frac{\cos(\alpha_I)}{Z_{F1}}, \\ \underline{H}_{R0x} &= \underline{E}_{R0y} \frac{\cos(\alpha_I)}{Z_{F1}}, \\ \underline{H}_{T0x} &= -\underline{E}_{T0y} \frac{\cos(\alpha_T)}{Z_{F2}}. \end{aligned}$$

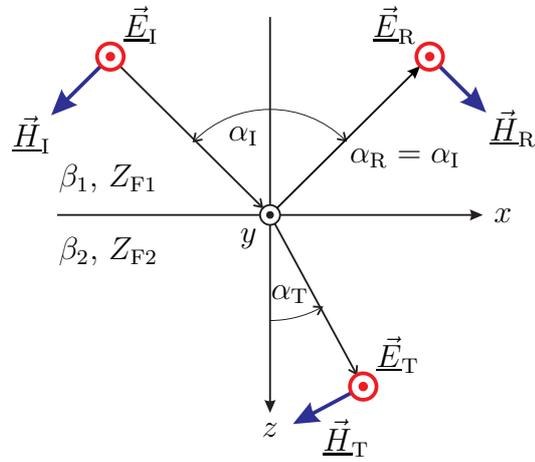


Abbildung 6.4.: Elektrische Feldstärken senkrecht zur Einfallsebene

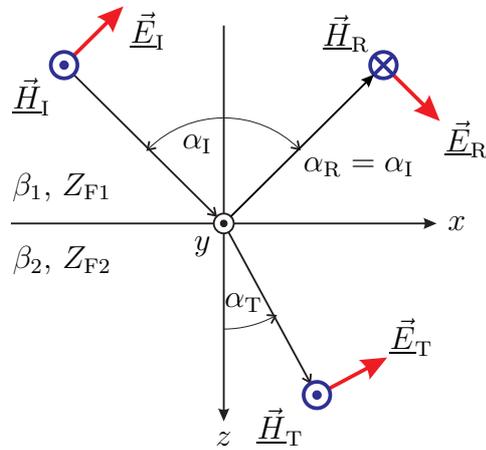


Abbildung 6.5.: Elektrische Feldstärken parallel zur Einfallsebene

Das Verhältnis der Tangentialkomponenten, das heißt der zur  $z$ -Richtung senkrechten Komponenten, von zueinander gehörenden elektrischen Feldstärken und magnetischen Feldstärken wird durch die Feldwellenwiderstände in  $z$ -Richtung

$$Z_{F1z} = \frac{Z_{F1}}{\cos(\alpha_1)} = -\frac{\underline{E}_{I0y}}{\underline{H}_{I0x}} = \frac{\underline{E}_{R0y}}{\underline{H}_{R0x}} \quad (6.17)$$

und

$$Z_{F2z} = \frac{Z_{F2}}{\cos(\alpha_T)} = -\frac{\underline{E}_{T0y}}{\underline{H}_{T0x}} \quad (6.18)$$

beschrieben.

Der Reflexionsfaktor für senkrechte Polarisation wird als

$$\Gamma_{\perp} = \frac{\underline{E}_{R0y}}{\underline{E}_{I0y}} = -\frac{\underline{H}_{R0x}}{\underline{H}_{I0x}}$$

definiert. An der Grenzfläche müssen die resultierenden Tangentialkomponenten der Feldstärken gemäß (1.64) und (1.66) stetig sein. Daraus folgt, dass auch die Feldimpedanzen

$$\underline{Z}_1 = -\frac{\underline{E}_{I0y} + \underline{E}_{R0y}}{\underline{H}_{I0x} + \underline{H}_{R0x}} = -\frac{\underline{E}_{I0y}(1 + \Gamma_{\perp})}{\underline{H}_{I0x}(1 - \Gamma_{\perp})} = Z_{F1z} \frac{1 + \Gamma_{\perp}}{1 - \Gamma_{\perp}}$$

und

$$\underline{Z}_2 = -\frac{\underline{E}_{T0y}}{\underline{H}_{T0x}} = Z_{F2z}.$$

an der Grenzfläche stetig sein müssen. Gleichsetzen der Feldimpedanzen ergibt

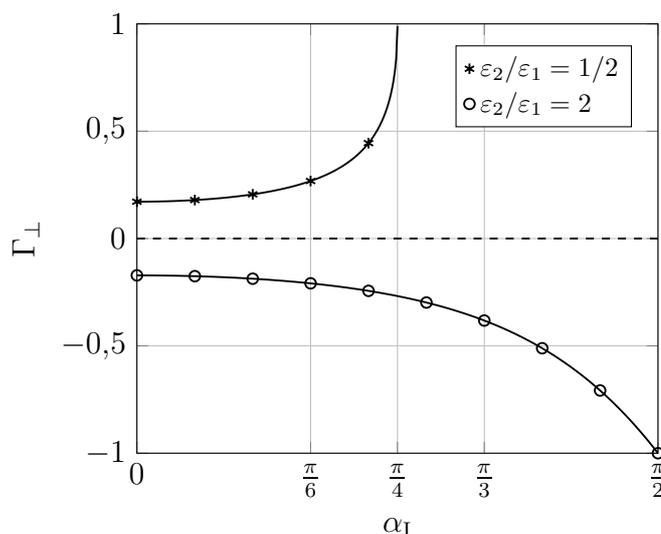
$$Z_{F2z} = Z_{F1z} \frac{1 + \Gamma_{\perp}}{1 - \Gamma_{\perp}}$$

und schließlich erhält man den Reflexionsfaktor

$$\Gamma_{\perp} = \frac{Z_{F2z} - Z_{F1z}}{Z_{F2z} + Z_{F1z}} \quad (6.19)$$

$$= \frac{Z_{F2} \cos(\alpha_1) - Z_{F1} \cos(\alpha_T)}{Z_{F2} \cos(\alpha_1) + Z_{F1} \cos(\alpha_T)} \quad (6.20)$$

für senkrechte Polarisation. Der in die Gleichung einzusetzende Brechungswinkel  $\alpha_T$  ergibt sich aus dem Snellius'schen Brechungsgesetz (6.14). Abbildung 6.6 zeigt den Reflexionsfaktor  $\Gamma_{\perp}$  für senkrechte Polarisation als Funktion des Einfallswinkels  $\alpha_1$  für einige exemplarische Grenzflächen. Für  $\varepsilon_2/\varepsilon_1 = 1/2$  tritt ab einem Einfallswinkel von  $\alpha_G = \pi/4$  Totalreflexion auf, siehe (6.15).

Abbildung 6.6.: Reflexionsfaktor  $\Gamma_{\perp}$  für senkrechte Polarisation.  $\mu_1 = \mu_2$ 

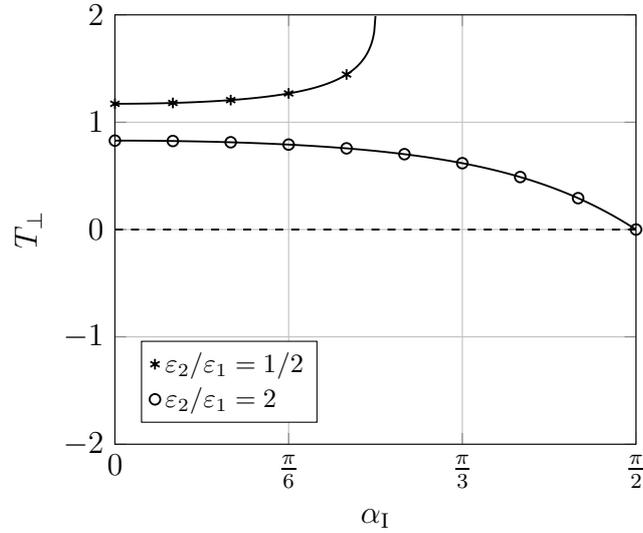
Mit (1.64) folgt aus (6.20) der Transmissionsfaktor

$$\begin{aligned}
 T_{\perp} &= \frac{E_{T0y}}{E_{I0y}} = \frac{E_{I0y} + E_{R0y}}{E_{I0y}} \\
 &= 1 + \Gamma_{\perp} = \frac{2Z_{F2z}}{Z_{F2z} + Z_{F1z}} \\
 &= \frac{2Z_{F2} \cos(\alpha_I)}{Z_{F2} \cos(\alpha_I) + Z_{F1} \cos(\alpha_T)} \quad (6.21)
 \end{aligned}$$

für senkrechte Polarisation. Abbildung 6.7 zeigt den Transmissionsfaktor  $T_{\perp}$  für senkrechte Polarisation als Funktion des Einfallswinkels  $\alpha_I$  für einige exemplarische Grenzflächen.

Man beachte, dass Reflexionsfaktoren und Transmissionsfaktoren stets bezüglich der elektrischen Feldstärken definiert sind. Der Transmissionsfaktor  $T_{\perp}$  für senkrechte Polarisation kann daher auch einen Betrag größer als eins annehmen, ohne dass dies im Widerspruch zur Energieerhaltung stünde. Relevant ist die durch die Grenzfläche fließende Energie, das heißt es sind die Normalkomponenten der komplexen Poynting-Vektoren zu vergleichen.

**Aufgabe 6.2** *Eine ebene homogene Welle falle schräg auf eine ebene Grenzfläche zwischen zwei Dielektrika ein, so dass eine transmittierte und eine reflektierte ebene homogene Welle entstehen. Die ebenen homogenen Wellen seien senkrecht polarisiert. Zeigen Sie, dass die Normalkomponenten der komplexen Poynting-Vektoren auf beiden Seiten der Grenzfläche gleich sind!*


 Abbildung 6.7.: Transmissionsfaktor  $T_{\perp}$  für senkrechte Polarisation.  $\mu_1 = \mu_2$ 

### 6.2.2.2. Parallele Polarisation

Die Tangentialkomponenten der magnetischen Feldstärken entsprechen im hier betrachteten Fall der zur Einfallsebene parallelen Polarisation den  $y$ -Komponenten, die auch die einzigen vorhandenen Komponenten der magnetischen Feldstärken sind. Die Tangentialkomponenten der elektrischen Feldstärken entsprechen den  $x$ -Komponenten. Die elektrischen Feldstärken kann man mit den Feldwellenwiderständen aus den magnetischen Feldstärken berechnen, siehe (2.27). Durch Projektion erhält man die  $x$ -Komponenten der elektrischen Feldstärken:

$$\begin{aligned}\underline{E}_{I0x} &= \underline{H}_{I0y} Z_{F1} \cos(\alpha_I), \\ \underline{E}_{R0x} &= -\underline{H}_{R0y} Z_{F1} \cos(\alpha_I), \\ \underline{E}_{T0x} &= \underline{H}_{T0y} Z_{F2} \cos(\alpha_T).\end{aligned}$$

Das Verhältnis der Tangentialkomponenten, das heißt der zur  $z$ -Richtung senkrechten Komponenten, von zueinander gehörenden elektrischen Feldstärken und magnetischen Feldstärken wird durch die Feldwellenwiderstände in  $z$ -Richtung

$$Z_{F1z} = Z_{F1} \cos(\alpha_I) = \frac{\underline{E}_{I0x}}{\underline{H}_{I0y}} = -\frac{\underline{E}_{R0x}}{\underline{H}_{R0y}} \quad (6.22)$$

und

$$Z_{F2z} = Z_{F2} \cos(\alpha_T) = \frac{\underline{E}_{T0x}}{\underline{H}_{T0y}} \quad (6.23)$$

beschrieben. Man beachte, dass sich die Feldwellenwiderstände in  $z$ -Richtung für den Fall senkrechter und paralleler Polarisation unterscheiden, vergleiche (6.17) und (6.18).

Der Reflexionsfaktor für parallele Polarisation wird als

$$\Gamma_{\parallel} = \frac{\underline{E}_{R0x}}{\underline{E}_{I0x}} = -\frac{\underline{H}_{R0y}}{\underline{H}_{I0y}}$$

definiert. An der Grenzfläche müssen die Tangentialkomponenten der Feldstärken gemäß (1.64) und (1.66) stetig sein. Daraus folgt, dass auch die Feldimpedanzen

$$\underline{Z}_1 = \frac{\underline{E}_{I0x} + \underline{E}_{R0x}}{\underline{H}_{I0y} + \underline{H}_{R0y}} = \frac{\underline{E}_{I0x} (1 + \Gamma_{\parallel})}{\underline{H}_{I0y} (1 - \Gamma_{\parallel})} = Z_{F1z} \frac{1 + \Gamma_{\parallel}}{1 - \Gamma_{\parallel}}$$

und

$$\underline{Z}_2 = \frac{\underline{E}_{T0x}}{\underline{H}_{T0y}} = Z_{F2z}.$$

an der Grenzfläche stetig sein müssen. Durch Gleichsetzen der Feldimpedanzen  $\underline{Z}_1$  und  $\underline{Z}_2$  erhält man den Reflexionsfaktor

$$\Gamma_{\parallel} = \frac{Z_{F2z} - Z_{F1z}}{Z_{F2z} + Z_{F1z}} \quad (6.24)$$

$$= \frac{Z_{F2} \cos(\alpha_T) - Z_{F1} \cos(\alpha_I)}{Z_{F2} \cos(\alpha_T) + Z_{F1} \cos(\alpha_I)} \quad (6.25)$$

für parallele Polarisation. Man beachte, dass sich als Funktionen der Feldwellenwiderstände in  $z$ -Richtung formal gleiche Ergebnisse für beide Polarisationszustände ergeben, vergleiche (6.19) und (6.24). Abbildung 6.8 zeigt den Reflexionsfaktor  $\Gamma_{\parallel}$  für parallele Polarisation als Funktion des Einfallswinkels  $\alpha_I$  für einige exemplarische Grenzflächen. Den Einfallswinkel  $\alpha_I$ , bei dem der Reflexionsfaktor Null wird, bezeichnet man als Brewster-Winkel  $\alpha_B$ .

Mit (1.66) folgt aus (6.25) der Transmissionsfaktor

$$\begin{aligned} T_{\parallel} &= \frac{\underline{E}_{T0y}}{\underline{E}_{I0y}} = \frac{Z_{F2} \underline{H}_{T0y}}{Z_{F1} \underline{H}_{I0y}} = \frac{Z_{F2}}{Z_{F1}} \left( \frac{\underline{H}_{I0y} + \underline{H}_{R0y}}{\underline{H}_{I0y}} \right) = \frac{Z_{F2}}{Z_{F1}} (1 - \Gamma_{\parallel}) \\ &= \frac{2Z_{F2} \cos(\alpha_I)}{Z_{F2} \cos(\alpha_T) + Z_{F1} \cos(\alpha_I)} \end{aligned} \quad (6.26)$$

für parallele Polarisation. Abbildung 6.9 zeigt den Transmissionsfaktor  $T_{\parallel}$  für parallele Polarisation als Funktion des Einfallswinkels  $\alpha_I$  für einige exemplarische Grenzflächen.

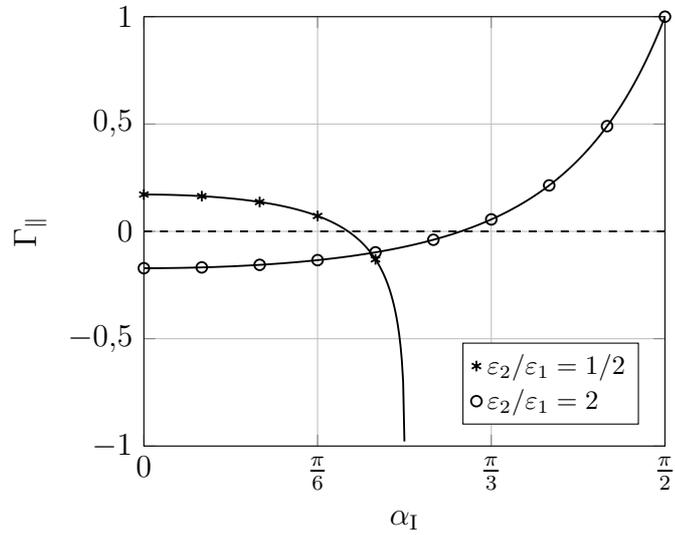


Abbildung 6.8.: Reflexionsfaktor  $\Gamma_{||}$  für parallele Polarisation.  $\mu_1 = \mu_2$

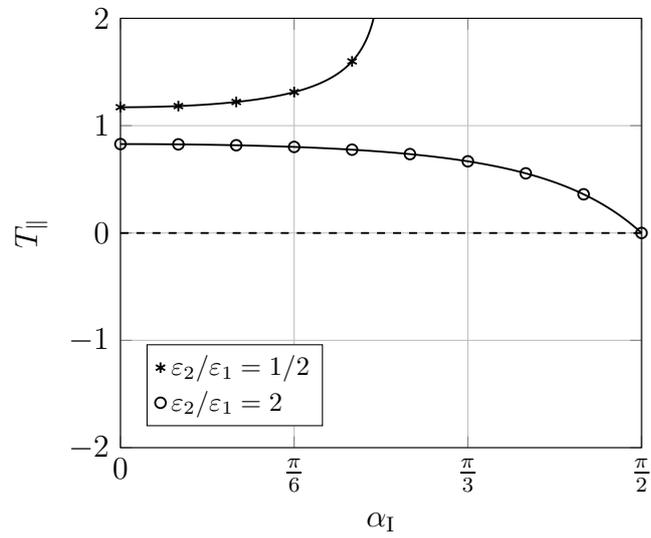


Abbildung 6.9.: Transmissionsfaktor  $T_{||}$  für parallele Polarisation.  $\mu_1 = \mu_2$

**Aufgabe 6.3** Berechnen Sie den Brewster-Winkel  $\alpha_B$  abhängig von den Permittivitäten und Permeabilitäten der Dielektrika! Unterscheiden Sie hierbei die Fälle senkrechter und paralleler Polarisierung. Betrachten Sie auch die Spezialfälle  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$  bei senkrechter Polarisierung und  $\mu_1 = \mu_2$  bei paralleler Polarisierung.

### 6.2.3. Reflexion am idealen elektrischen Leiter

Da im idealen elektrischen Leiter kein elektromagnetisches Feld existieren kann, existiert neben der einfallenden ebenen homogenen Welle nur die reflektierte ebene homogene Welle. Der Transmissionsfaktor ist unabhängig von der Polarisierung der einfallenden ebenen homogenen Welle

$$T = 0. \quad (6.27)$$

An der Grenzfläche muss die Tangentialkomponente der elektrischen Feldstärke verschwinden, das heißt an der Grenzfläche müssen sich die Tangentialkomponenten der elektrischen Feldstärken der einfallenden und der reflektierten ebenen homogenen Welle gegenseitig aufheben. Der Reflexionsfaktor an der Oberfläche eines idealen elektrischen Leiters ergibt sich somit unabhängig von der Polarisierung der einfallenden ebenen homogenen Welle zu

$$\Gamma = -1. \quad (6.28)$$

### 6.2.4. Reflexion am idealen magnetischen Leiter

Da im idealen magnetischen Leiter ebenfalls kein elektromagnetisches Feld existieren kann, existiert auch hier neben der einfallenden ebenen homogenen Welle nur die reflektierte ebene homogene Welle. Der Transmissionsfaktor ist unabhängig von der Polarisierung der einfallenden ebenen homogenen Welle

$$T = 0. \quad (6.29)$$

An der Grenzfläche muss die Tangentialkomponente der magnetischen Feldstärke verschwinden, das heißt an der Grenzfläche müssen sich die Tangentialkomponenten der magnetischen Feldstärken der einfallenden und der reflektierten ebenen homogenen Welle gegenseitig aufheben. Der bezüglich der elektrischen Feldstärken definierte Reflexionsfaktor an der Oberfläche eines idealen magnetischen Leiters ergibt sich somit unabhängig von der Polarisierung der einfallenden ebenen homogenen Welle zu

$$\Gamma = 1. \quad (6.30)$$

## 6.3. Ionosphäre

### 6.3.1. Plasmakreisfrequenz

Die Ionosphäre ist eine der oberen Schichten der Atmosphäre. In ihr entsteht durch Absorption ionisierender Strahlung ein aus positiven Ionen und freien Elektronen bestehendes Plasma. Es kommt zu signifikanten Wechselwirkungen zwischen hochfrequenten elektromagnetischen Feldern und den freien Elektronen. Die positiven Ionen sind aufgrund ihrer großen Masse für eine Wechselwirkung zu träge. Im Folgenden wird die Lorentz-Kraft infolge der magnetischen Feldstärke  $\vec{H}$  gegenüber der Coulomb-Kraft infolge der elektrischen Feldstärke  $\vec{E}$  vernachlässigt. Insbesondere wird auch die zu Anisotropien führende Wirkung des konstanten Erdmagnetfelds auf die bewegten Elektronen vernachlässigt.

Die freien Elektronen mit der Ladung<sup>2</sup>

$$-e = -1,6022 \cdot 10^{-19} \text{ C} \quad (6.31)$$

und der Masse

$$m_e = 9,1095\pi \cdot 10^{-31} \text{ kg} \quad (6.32)$$

werden infolge der Coulomb-Kraft beschleunigt. Mit dem Newtonschen Gesetz erhält man die vektorielle komplexe Amplitude der Beschleunigung

$$\vec{a} = -\frac{e\vec{E}}{m_e}.$$

Da die Differentiation im Zeitbereich gemäß (C.8) einer Multiplikation mit  $j\omega$  im Frequenzbereich entspricht, erhält man die komplexe vektorielle Amplitude der Geschwindigkeit zu

$$\vec{v} = \frac{\vec{a}}{j\omega} = j\frac{e\vec{E}}{\omega m_e}.$$

Die sich bewegenden Elektronen mit der Elektronendichte  $n$  verursachen eine elektrische Stromdichte

$$\vec{J} = -ne\vec{v} = -j\frac{ne^2\vec{E}}{\omega m_e}.$$

Einsetzen in das Durchflutungsgesetz (1.17) ergibt mit (1.48) und (1.49)

$$\text{rot}(\vec{H}) = -j\frac{ne\vec{E}}{\omega m_e} + j\omega\varepsilon_0\vec{E} = j\omega\varepsilon_0 \left(1 - \frac{ne^2}{\omega^2 m_e \varepsilon_0}\right) \vec{E}.$$

---

<sup>2</sup> $e$  wird als Elementarladung bezeichnet.

Man definiert die Plasmakreisfrequenz

$$\omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{m_e \varepsilon_0}}. \quad (6.33)$$

Mit ihr folgt

$$\operatorname{rot}(\vec{H}) = j\omega\varepsilon_0 \underbrace{\left(1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2\right)}_{\varepsilon_r} \vec{E}.$$

Die Ionosphäre verhält sich wie ein Dielektrikum mit der relativen Permittivität

$$\varepsilon_r = 1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2. \quad (6.34)$$

Bei sehr großen Kreisfrequenzen  $\omega$  wird der Einfluss der Ionosphäre sehr klein.

Bei Kreisfrequenzen unterhalb der Plasmakreisfrequenz  $\omega < \omega_p$  wird die relative Permittivität  $\varepsilon_r$  negativ. Eine Ausbreitung elektromagnetischer Wellen ist dann nicht mehr möglich. Die Ionosphäre reflektiert auf sie einfallende elektromagnetische Wellen, siehe (6.15). Dies wird im Kurzwellenrundfunk genutzt, wo sich elektromagnetische Wellen durch mehrfache Reflexion zwischen Erde und Ionosphäre über große Distanzen um die Erde herum ausbreiten können.

Mit (4.2), (1.49) und (1.53) ergibt sich die Phasenkonstante in der Ionosphäre zu

$$\beta = \sqrt{\omega^2 \varepsilon_0 \varepsilon_r \mu_0} = \sqrt{\omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 - \omega_p^2 \varepsilon_0 \mu_0}, \quad (6.35)$$

vergleiche (2.35). Man erhält damit analog zu (2.46) die Phasengeschwindigkeit

$$v_p = \frac{c_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}} \quad (6.36)$$

und analog zu (2.48) die Gruppengeschwindigkeit

$$v_g = c_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2} \quad (6.37)$$

in der Ionosphäre, siehe auch (2.45).

### 6.3.2. Ionosphärenfehlerkorrektur in der Satellitennavigation

In Satellitennavigationssystemen misst der Empfänger die Gruppenlaufzeit  $t_g$  der von den Satelliten ausgesendeten Signale.<sup>3</sup> Aus diesen Gruppenlaufzeiten  $t_g$  sollen

<sup>3</sup>Genauer genommen werden aufgrund der fehlenden absoluten Zeitreferenz nur Laufzeitdifferenzen gemessen, was aber für die hiesigen Betrachtungen irrelevant ist.

mit Hilfe der Gruppengeschwindigkeit  $v_g(z)$  die Entfernungen  $l$  berechnet werden, siehe (2.47). Eine wesentliche Fehlerquelle hierbei ist die unbekannte Elektronendichte  $n(z)$  in der Ionosphäre. Die vom Ort  $z$  abhängige Elektronendichte  $n(z)$  in der Ionosphäre verursacht eine Ortsabhängigkeit der Plasmakreisfrequenz  $\omega_p(z)$  und der Gruppengeschwindigkeit  $v_g(z)$ , siehe (6.33) und (6.37).

Mit (6.37) erhält man durch Integration über den gesamten Ausbreitungspfad die Gruppenlaufzeit

$$t_g = \int dt = \int \frac{dz}{v_g(z)} = \int \frac{dz}{c_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p(z)}{\omega}\right)^2}}.$$

Mit der Approximation

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p(z)}{\omega}\right)^2}} \approx 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\omega_p(z)}{\omega}\right)^2$$

folgt

$$t_g \approx \underbrace{\int \frac{dz}{c_0}}_{t_0} + \int \frac{\omega_p^2(z)}{2c_0\omega^2} dz.$$

Die um den Ionosphärenfehler bereinigte Gruppenlaufzeit ergibt sich mit (6.33) aus der gemessenen Gruppenlaufzeit  $t_g$  zu

$$t_0 \approx t_g - \frac{1}{2c_0\omega^2} \int \omega_p^2(z) dz = t_g - \underbrace{\frac{e^2}{2m_e\epsilon_0c_0} \int n(z) dz}_k \frac{1}{\omega^2}.$$

Insbesondere ist der Ionosphärenfehler proportional zu  $1/\omega^2$ . Zur Korrektur des Ionosphärenfehlers benötigt man die Kenntnis des Gesamtelektroneninhalts (Total Electron Content, TEC)

$$N = \int n(z) dz. \quad (6.38)$$

Ein eleganter, in modernen Satellitennavigationssystemen verwendeter Ansatz zur Ionosphärenfehlerkorrektur basiert auf dem Messen der Gruppenlaufzeiten bei zwei verschiedenen Kreisfrequenzen:

$$t_{g1} \approx t_0 - \frac{k}{\omega_1^2},$$

$$t_{g2} \approx t_0 - \frac{k}{\omega_2^2}.$$

Dieses aus zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten  $k$  und  $t_0$  bestehende Gleichungssystem ist lösbar. Man erhält die um den Ionosphärenfehler bereinigte Gruppenlaufzeit

$$t_0 \approx \frac{\omega_1^2 t_{g1} - \omega_2^2 t_{g2}}{\omega_1^2 - \omega_2^2}. \quad (6.39)$$

Weiterhin könnte man  $k$  und damit den Gesamtelektroneninhalt  $N$  bestimmen.

**Aufgabe 6.4** Zeigen Sie, dass man die um den Ionosphärenfehler bereinigte Phasenlaufzeit aus Messungen der Phasenlaufzeiten  $t_{p1}$  und  $t_{p2}$  bei zwei verschiedenen Kreisfrequenzen  $\omega_1$  und  $\omega_2$  mittels

$$t_0 \approx \frac{\omega_1^2 t_{p1} - \omega_2^2 t_{p2}}{\omega_1^2 - \omega_2^2}. \quad (6.40)$$

bestimmen kann!

## 6.4. Streuung

### 6.4.1. Streuquerschnitt

Wenn eine elektromagnetische Welle auf einen als Streuer bezeichneten Körper trifft, so wird die elektromagnetische Welle an diesem gestreut, siehe Abbildung 6.10. Der Streuer selbst strahlt wieder eine elektromagnetische Welle ab. Im Gegensatz zur Reflexion an unendlich ausgedehnten ebenen Grenzflächen breitet sich die gestreute elektromagnetische Welle in alle Richtungen aus. Der Streuer befinde sich im Fernfeld des Senders und der Empfänger befinde sich im Fernfeld des Streuers. Die Antennen seien bezüglich der Raumrichtung optimal auf den Streuer ausgerichtet und bezüglich der Polarisation optimal angepasst.

Mit der Sendeleistung  $P_T$  ist die auf den Streuer einfallende Intensität

$$S_I = \frac{P_T}{4\pi r_T^2} G_T,$$

siehe (6.2). Für den Empfänger erscheint der Streuer wie eine omnidirektionale Sendeantenne am Ort des Streuers mit der zur einfallenden Intensität proportionalen Sendeleistung

$$P_S = S_I \sigma = \frac{P_T}{4\pi r_T^2} \sigma G_T. \quad (6.41)$$

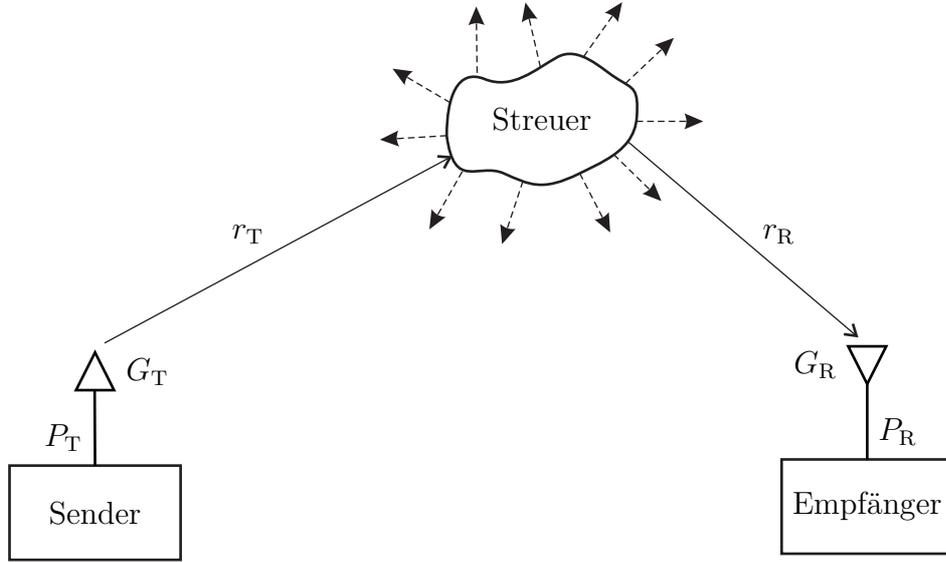


Abbildung 6.10.: Streuung

Der Proportionalitätsfaktor  $\sigma$  hat die Einheit einer Fläche und wird als Streuquerschnitt bezeichnet. Die so berechnete äquivalente Sendeleistung  $P_S$  einer omnidirektionalen Sendeantenne in (6.6) eingesetzt ergibt die Empfangsleistung

$$P_R = P_S \left( \frac{\lambda}{4\pi r_R} \right)^2 G_R = \frac{P_T \lambda^2}{(4\pi)^3 r_T^2 r_R^2} \sigma G_T G_R. \quad (6.42)$$

Der Streuquerschnitt  $\sigma$  hängt neben den Eigenschaften des Streuers von der Raumrichtung, aus der die elektromagnetische Welle einfällt, der Polarisation der einfallenden elektromagnetischen Welle und der betrachteten Ausfallsrichtung der gestreuten elektromagnetischen Welle ab. Im betrachteten Fernfeld ist der Streuquerschnitt  $\sigma$  jedoch von den Entfernungen  $r_T$  und  $r_R$  unabhängig. Mit der Intensität im Fernfeld gemäß (4.53), den Feldstärken  $\vec{E}_I$  und  $\vec{H}_I$  der einfallenden elektromagnetischen Welle und den Feldstärken  $\vec{E}_S$  und  $\vec{H}_S$  der gestreuten elektromagnetischen Welle in der Entfernung  $r_R$  erhält man die zu (6.41) äquivalente Definition

$$\sigma = 4\pi r_R^2 \frac{S_S}{S_I} = \lim_{r_R \rightarrow \infty} 4\pi r_R^2 \frac{\|\vec{E}_S\|^2}{\|\vec{E}_I\|^2} = \lim_{r_R \rightarrow \infty} 4\pi r_R^2 \frac{\|\vec{H}_S\|^2}{\|\vec{H}_I\|^2} \quad (6.43)$$

des Streuquerschnitts. Der Streuquerschnitt lässt sich nur für wenige einfache Streuer geschlossen berechnen.

Streuereffekte beeinflussen maßgeblich die Wellenausbreitung in terrestrischen Mobilfunksystemen, in denen in der Regel keine direkte Sichtverbindung zwischen Sender und Empfänger besteht. In der Radartechnik wird der oben eingeführte Streuquerschnitt  $\sigma$ , bei dem sich Sender und Empfänger im Allgemeinen an unterschiedlichen Orten befinden, auch als bistatischer Streuquerschnitt bezeichnet. Von besonderer Bedeutung ist in der Radartechnik jedoch der Spezialfall, dass sich Sender und Empfänger am selben Ort befinden und die selbe Antenne verwenden, siehe Abbildung 6.11. In diesem Fall spricht man vom monostatischen Streuquerschnitt. Im hier betrachteten Fall von Polarisationsanpassung und optimaler Ausrichtung der Antenne folgt aus (6.42) die Empfangsleistung

$$P_R = \frac{P_T \lambda^2}{(4\pi)^3 r^4} \sigma G^2. \quad (6.44)$$

Diese Gleichung ist auch unter dem Namen Radargleichung bekannt.

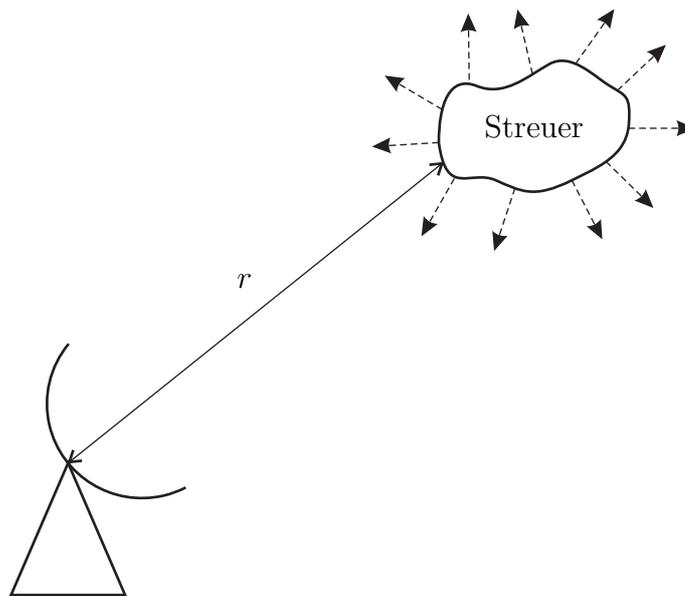


Abbildung 6.11.: Radar

### 6.4.2. Sinclair-Matrix

Im Allgemeinen sind die Antennen weder bezüglich der Raumrichtung optimal auf den Streuer ausgerichtet noch bezüglich der Polarisierung optimal angepasst. Zur Analyse dieses allgemeinen Szenarios müssen die Polarisationskomponenten der

einfallenden elektromagnetischen Welle und der gestreuten elektromagnetischen Welle zunächst getrennt betrachtet werden und auch die Phasenlagen müssen berücksichtigt werden. Die senderseitigen, streuerseitigen und empfängerseitigen Koordinatensysteme seien auch hier wieder im Raum parallel ausgerichtet, siehe Abbildung 6.12.<sup>4</sup>

Die Komponenten der elektrischen Feldstärke der einfallenden elektromagnetischen Welle am Ort des Streuers ergeben sich gemäß (5.11) zu

$$\underline{E}_{I\vartheta} = \left\| \underline{\vec{E}} \right\|_{\max} \underline{C}_{T\vartheta}(\vartheta_T, \varphi_T) e^{-j\beta r_T}$$

und

$$\underline{E}_{I\varphi} = - \left\| \underline{\vec{E}} \right\|_{\max} \underline{C}_{T\varphi}(\vartheta_T, \varphi_T) e^{-j\beta r_T}.$$

Man beachte die entgegengesetzt gerichteten Basisvektoren in  $\varphi$ -Richtung der lokalen Koordinatensysteme von Sender und Streuer. In Anlehnung an (6.43) definiert man zum vollständigen Charakterisieren der Streueigenschaften die komplexen polarimetrischen Streuparameter

$$\underline{S}_{p,q} = \lim_{r_R \rightarrow \infty} r_R \frac{\underline{E}_{Sp}}{\underline{E}_{Iq}} e^{j\beta r_R}, \quad (6.45)$$

wobei  $p$  und  $q$  jeweils für  $\vartheta$  oder  $\varphi$  stehen. Da die Feldstärken der gestreuten elektromagnetischen Welle im Fernfeld proportional zu  $e^{-j\beta r_R} / r_R$  sind, vergleiche (4.48), ergibt sich ein definierter Grenzwert. Damit ergeben sich die Beiträge zu den Komponenten der elektrischen Feldstärke der gestreuten elektromagnetischen Welle am Ort des Empfängers in dessen lokalem Koordinatensystem zu

$$\underline{E}_{S\vartheta} = \underline{S}_{\vartheta,q} \underline{E}_{Iq} \frac{e^{-j\beta r_R}}{r_R}$$

und

$$\underline{E}_{S\varphi} = -\underline{S}_{\varphi,q} \underline{E}_{Iq} \frac{e^{-j\beta r_R}}{r_R}.$$

Man beachte auch hier wieder die entgegengesetzt gerichteten Basisvektoren in  $\varphi$ -Richtung der lokalen Koordinatensysteme von Streuer und Empfänger. Der Beitrag der einfallenden Polarisationskomponente  $q$  zur Intensität der Polarisationskomponente  $p$  der gestreuten elektromagnetischen Welle am Empfangsort

---

<sup>4</sup>Diese Richtungsdefinitionen werden auch als Backward Scattering Alignment bezeichnet. Alternativ wird in der Literatur auch das Forward Scattering Alignment verwendet [GW98].

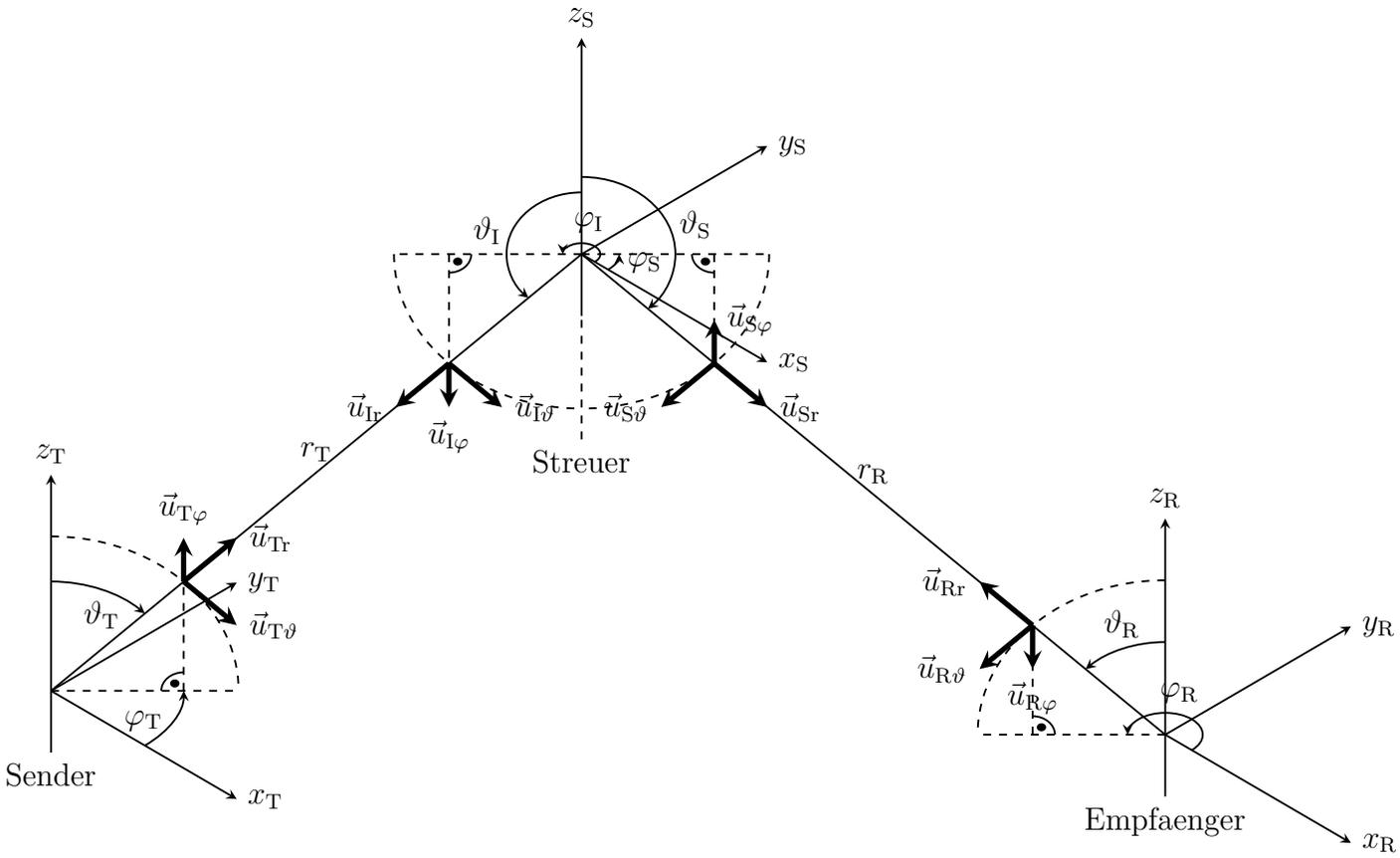


Abbildung 6.12.: Koordinatensysteme zum Beschreiben eines Streuers

ergibt sich mit (4.52) und (6.2) zu

$$\begin{aligned}
 S_{Sp,q} &= \frac{1}{2} \frac{1}{Z_F} |\underline{E}_{Sp}|^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{Z_F} |\underline{E}_{\lambda q}|^2 \left| \underline{S}_{p,q} \frac{e^{-j\beta r_R}}{r_R} \right|^2 \\
 &= \frac{1}{2} \frac{1}{Z_F} \underbrace{\|\underline{\vec{E}}\|_{\max}^2}_{S_{\max}} \left| \underline{S}_{p,q} \underline{C}_{Tq}(\vartheta_T, \varphi_T) e^{-j\beta r_T} \frac{e^{-j\beta r_R}}{r_R} \right|^2 \\
 &= \frac{P_T G_T}{4\pi} \left| \underline{S}_{p,q} \underline{C}_{Tq}(\vartheta_T, \varphi_T) \frac{e^{-j\beta r_T}}{r_T} \frac{e^{-j\beta r_R}}{r_R} \right|^2.
 \end{aligned}$$

Der Beitrag der einfallenden Polarisationskomponente  $q$  zur aus dem Empfang einer einzigen Polarisationskomponente  $p$  resultierenden Empfangsleistung ergibt sich mit (6.1) und (6.5) unter Berücksichtigen der Richtwirkung der Empfangsantenne gemäß (5.11) zu

$$\begin{aligned}
 P_{Rp,q} &= S_{Sp,q} \left| \underline{C}_{Rp}(\vartheta_R, \varphi_R) \right|^2 \underbrace{\frac{\lambda^2}{4\pi} G_R}_{A_R} \\
 &= P_T \left( \frac{\lambda}{4\pi} \right)^2 G_T G_R \left| \underline{S}_{p,q} \underline{C}_{Rp}(\vartheta_R, \varphi_R) \underline{C}_{Tq}(\vartheta_T, \varphi_T) \frac{e^{-j\beta r_T}}{r_T} \frac{e^{-j\beta r_R}}{r_R} \right|^2.
 \end{aligned}$$

Zum Darstellen der gesamten Empfangsleistung  $P_R$  definiert man die auch als Sinclair-Matrix bezeichnete komplexe polarimetrische Streumatrix

$$\underline{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} \underline{S}_{\vartheta,\vartheta} & \underline{S}_{\vartheta,\varphi} \\ \underline{S}_{\varphi,\vartheta} & \underline{S}_{\varphi,\varphi} \end{pmatrix}. \quad (6.46)$$

Mit den in Abbildung 6.12 eingeführten parallel ausgerichteten lokalen Koordinatensystemen ergibt sich die gesamte Empfangsleistung unter Berücksichtigen der jeweils entgegengesetzt gerichteten Basisvektoren in  $\varphi$ -Richtung zu

$$\begin{aligned}
 P_R &= P_T \left( \frac{\lambda}{4\pi} \right)^2 G_T G_R \\
 &\left| \underline{\mathbf{C}}_R^T(\vartheta_R, \varphi_R) \cdot \frac{e^{-j\beta r_R}}{r_R} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \underline{\mathbf{S}} \cdot \frac{e^{-j\beta r_T}}{r_T} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\underline{\mathbf{T}}} \cdot \underline{\mathbf{C}}_T(\vartheta_T, \varphi_T) \right|^2. \quad (6.47)
 \end{aligned}$$

Die Amplitudenabnahmen, Phasendrehungen und Kopplungen der Polarisationskomponenten auf dem Ausbreitungspfad können auch hier wieder mit einer Transfermatrix  $\underline{\mathbf{T}}$  beschrieben werden.

Für den Spezialfall des monostatischen Radars ist die komplexe polarimetrische Streumatrix wegen der Reziprozität gemäß (9.8) symmetrisch

$$\underline{S}_{\vartheta,\varphi} = \underline{S}_{\varphi,\vartheta}.$$

Für die Empfangsleistung eines monostatischen Radarsystems folgt

$$\begin{aligned} P_R &= P_T \left( \frac{\lambda}{4\pi r^2} \right)^2 G^2 \left| \underline{\mathbf{C}}^T(\vartheta, \varphi) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \underline{\mathbf{S}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \underline{\mathbf{C}}(\vartheta, \varphi) \right|^2 \\ &= P_T \left( \frac{\lambda}{4\pi r^2} \right)^2 G^2 \\ &\quad \left| \underline{\mathbf{C}}_{\vartheta}^2(\vartheta, \varphi) \underline{S}_{\vartheta,\vartheta} - 2\underline{\mathbf{C}}_{\vartheta}(\vartheta, \varphi) \underline{\mathbf{C}}_{\varphi}(\vartheta, \varphi) \underline{S}_{\vartheta,\varphi} + \underline{\mathbf{C}}_{\varphi}^2(\vartheta, \varphi) \underline{S}_{\varphi,\varphi} \right|^2, \end{aligned} \quad (6.48)$$

vergleiche (6.44).

## 6.5. Mehrwegeausbreitung

Insbesondere in terrestrischen Funkkommunikationssystemen befinden sich typischerweise viele Hindernisse in der Funkstrecke zwischen Sender und Empfänger. Die elektromagnetischen Wellen breiten sich dann auf  $P$  Pfaden mit Reflexionen, Streuungen und Beugungen an Hindernissen vom Sender zum Empfänger aus, was man als Mehrwegeausbreitung bezeichnet. Jeder einzelne Ausbreitungspfad kann durch die Parameter

**Ausfallsrichtung:**  $\vartheta_T^{(p)}$ ,  $\varphi_T^{(p)}$  am Sender,

**Transfermatrix:**  $\underline{\mathbf{T}}^{(p)}$  und

**Einfallsrichtung:**  $\vartheta_R^{(p)}$ ,  $\varphi_R^{(p)}$  am Empfänger

charakterisiert werden.

Das Empfangssignal ergibt sich durch lineares Überlagern der Empfangssignale aller  $P$  Pfade. Damit folgt für die Empfangsleistung

$$P_R = P_T \left( \frac{\lambda}{4\pi} \right)^2 G_T G_R \left| \sum_{p=1}^P \underline{\mathbf{C}}_R^T(\vartheta_R^{(p)}, \varphi_R^{(p)}) \cdot \underline{\mathbf{T}}^{(p)} \cdot \underline{\mathbf{C}}_T(\vartheta_T^{(p)}, \varphi_T^{(p)}) \right|^2, \quad (6.49)$$

vergleiche (6.47). Man beachte, dass diese Gleichung nur für ein schmalbandiges Signal der Wellenlänge  $\lambda$  gilt. Die entfernungsbedingten relativen Phasenverschiebungen auf den Ausbreitungspfaden sind jedoch aufgrund der typischerweise großen Pfadlängenunterschiede stark frequenzabhängig. Damit ist auch die

Amplitude des Empfangssignals nach Überlagerung der Pfade stark frequenzabhängig. Je nach relativer Phasenlage können sich Empfangssignale verschiedener Pfade eher destruktiv auslöschen oder auch konstruktiv verstärken. Das Studium der Eigenschaften derartiger frequenzselektiver Mehrwegefunkkanäle ist ein wichtiges Thema in der Mobilkommunikation [GW98; Pae12]. Umfangreiche Programmpakete zur Analyse der Ausbreitung elektromagnetischer Wellen in unterschiedlichsten Szenarien und zum Berechnen der zu erwartenden Empfangsleistung gemäß (6.49) sind verfügbar. Ein bekanntes Beispiel ist WinProp.

**Aufgabe 6.5** Ein Sender und ein Empfänger befinden sich über einer ideal elektrisch leitenden Ebene, siehe Abbildung 6.13. Die Funkwellen können sich dann über einen direkten Pfad und über einen an der ideal elektrisch leitenden Ebene reflektierten Pfad vom Sender zum Empfänger ausbreiten. Die Höhe des Senders über der ideal elektrisch leitenden Ebene sei  $h_T$  und die Höhe des Empfängers über der ideal elektrisch leitenden Ebene sei  $h_R$ . Der horizontale Abstand von Sender und Empfänger sei  $r$ . Man kann vereinfachend annehmen, dass der horizontale Abstand viel größer als die Höhen ist:

$$r \gg h_T, h_R.$$

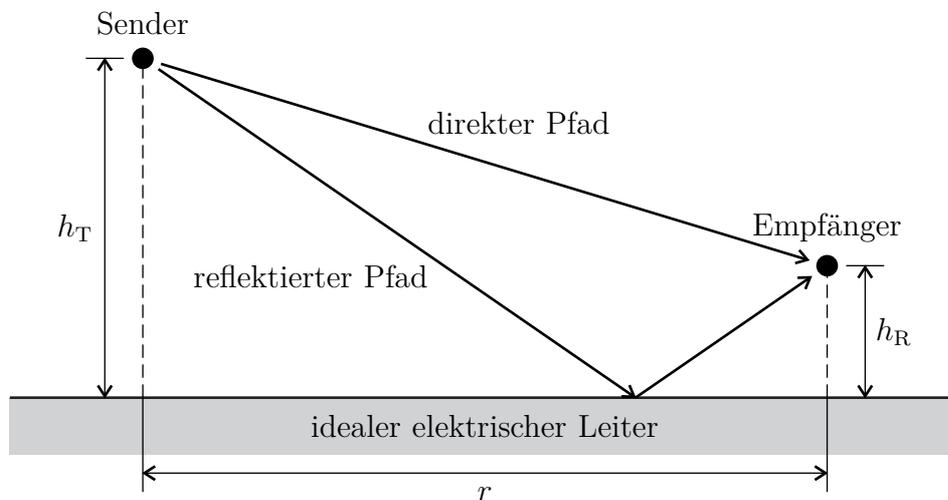


Abbildung 6.13.: Zweiwegeausbreitung

*Es werden die Fälle vertikaler und horizontaler Polarisation unterschieden. Wenn man weiterhin omnidirektionale Antennen*

$$G_T = G_R = 1$$

annimmt, entspricht dies den vektoriellen komplexen Richtcharakteristiken

$$\underline{\mathbf{C}}_{\text{T}} = \underline{\mathbf{C}}_{\text{R}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

im Fall vertikaler Polarisierung beziehungsweise

$$\underline{\mathbf{C}}_{\text{T}} = \underline{\mathbf{C}}_{\text{R}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

im Fall horizontaler Polarisierung. Berechnen Sie jeweils die Empfangsleistung  $P_{\text{R}}$  abhängig von Sendeleistung  $P_{\text{T}}$ , Wellenlänge  $\lambda$ , horizontalem Abstand  $r$  und den Höhen  $h_{\text{T}}$  und  $h_{\text{R}}$  der Antennen!



## **Teil II.**

# **Wellenbasierte Modellierung**



# Kapitel 7.

## Leitungstheorie

### 7.1. Komplexe Wellenamplitude

Bisher wurden Wellen je nach Typ durch die elektrische Feldstärke  $\vec{E}$ , die magnetische Feldstärke  $\vec{H}$ , die Spannung  $\underline{U}$  oder den Strom  $\underline{I}$  auf dem Wellenleiter beschrieben. Das Ziel der folgenden Betrachtungen ist es, Wellenphänomene unabhängig vom Typ des Wellenleiters zu untersuchen. Hierzu wird zunächst der auch in vielen technischen Anwendungen relevante Fall betrachtet, dass sich auf dem Wellenleiter nur ein einziger Mode ausbreiten kann. Dies ist beispielsweise der transversalelektromagnetische Mode auf Zweileitersystemen und der  $TE_{1,0}$ -Mode auf Rechteckhohlleitern bei Kreisfrequenzen  $\omega$  unterhalb der kritischen Kreisfrequenz  $\omega_c$  des jeweils nächsthöheren Modes. Es gibt dann im Allgemeinen neben einer sich in positive  $z$ -Richtung ausbreitenden Welle, die im Folgenden als hinlaufende Welle bezeichnet wird, eine sich in negative  $z$ -Richtung ausbreitende rücklaufende Welle. Die rücklaufende Welle kann beispielsweise durch Reflexion der hinlaufenden Welle an einem fehlangepassten Abschluss am Wellenleiterende entstehen.

Falls sich auf dem Wellenleiter nur ein einziger Mode ausbreiten kann, haben die elektromagnetischen Felder aller denkbaren hinlaufenden Wellen die gleiche Struktur. Die (vektorielle) komplexe Amplitude einer hinlaufenden Welle beschreibenden physikalischen Größe kann man in der Form

$$\underline{A}_H(x, y, z) = \underline{a}_0 \tilde{\underline{A}}_H(x, y, z)$$

darstellen. Hierbei sind

- $\underline{a}_0$  die komplexe Wellenamplitude der hinlaufenden Welle bei  $z = 0$ , welche die Amplitude und die Nullphase beschreibt, und
- $\tilde{\underline{A}}_H(x, y, z)$  die (vektorielle) komplexe Amplitude der hinlaufenden Bezugswelle, welche die prinzipielle Feldstruktur beschreibt.

Mit der bekannten Ortsabhängigkeit (2.7) und (2.8) von elektromagnetischen Feldern auf zylindrischen Wellenleitern gilt für die sich in positive  $z$ -Richtung ausbreitende hinlaufende Welle

$$\underline{A}_H(x, y, z) = \underbrace{\underline{a}_0 e^{-j\beta z}}_{\underline{a}(z)} \tilde{A}_0(x, y). \quad (7.1)$$

Die ortsabhängige komplexe Wellenamplitude der hinlaufenden Welle ergibt sich zu

$$\underline{a}(z) = \underline{a}_0 e^{-j\beta z}. \quad (7.2)$$

Die Bezugswelle wird so gewählt, dass der Betrag der von ihr transportierten Leistung  $1/2$  ist. Der Betrag der von der hinlaufenden Welle transportierten Leistung ergibt sich dann zu

$$|P_a| = \frac{1}{2} |\underline{a}(z)|^2 = \frac{1}{2} |\underline{a}_0|^2. \quad (7.3)$$

Die komplexe Wellenamplitude  $\underline{a}_0$  hat die Einheit  $\sqrt{W}$ .

Die durch  $\tilde{A}_0(x, y)$  beschriebene Feldstruktur der Bezugswelle in der Querschnittsebene  $z = 0$  ist unabhängig von der Ausbreitungsrichtung der Welle. Für eine sich in negative  $z$ -Richtung ausbreitende rücklaufende Welle gilt folglich

$$\underline{A}_R(x, y, z) = \pm \underbrace{\underline{b}_0 e^{+j\beta z}}_{\underline{b}(z)} \tilde{A}_0(x, y). \quad (7.4)$$

Die ortsabhängige komplexe Wellenamplitude der rücklaufenden Welle ergibt sich zu

$$\underline{b}(z) = \underline{b}_0 e^{+j\beta z}. \quad (7.5)$$

Der Betrag der von der rücklaufenden Welle transportierten Leistung ergibt sich zu

$$|P_b| = \frac{1}{2} |\underline{b}(z)|^2 = \frac{1}{2} |\underline{b}_0|^2. \quad (7.6)$$

## 7.2. Reflexionsfaktor

Der Reflexionsfaktor

$$\underline{\Gamma}(z) = \frac{\underline{b}(z)}{\underline{a}(z)} \quad (7.7)$$

ist als Verhältnis der komplexen Wellenamplitude  $\underline{a}(z)$  der hinlaufenden Welle und der komplexen Wellenamplitude  $\underline{b}(z)$  der rücklaufenden Welle definiert. Bei  $z = 0$  ist der Reflexionsfaktor

$$\underline{\Gamma}_0 = \frac{\underline{b}_0}{\underline{a}_0}. \quad (7.8)$$

Mit (7.2) und (7.5) folgt

$$\underline{\Gamma}(z) = \frac{\underline{b}_0 e^{+j\beta z}}{\underline{a}_0 e^{-j\beta z}} = \underline{\Gamma}_0 e^{+j2\beta z} \quad (7.9)$$

für den ortsabhängigen Reflexionsfaktor  $\underline{\Gamma}(z)$ . Der Wellenleiter transformiert den Reflexionsfaktor. Der Betrag des Reflexionsfaktors

$$|\underline{\Gamma}(z)| = |\underline{\Gamma}_0|$$

ist bei den hier betrachteten verlustfreien Wellenleitern ortsunabhängig. Falls die rücklaufende Welle durch Reflexion der hinlaufenden Welle an einem nicht verstärkendem Abschluss entsteht, ist der Betrag  $|P_b|$  der Leistung der rücklaufenden Welle nie größer als der Betrag  $|P_a|$  der Leistung der hinlaufenden Welle. Dann gilt

$$\frac{1}{2} |\underline{b}(z)|^2 \leq \frac{1}{2} |\underline{a}(z)|^2$$

und folglich

$$|\underline{\Gamma}(z)| \leq 1. \quad (7.10)$$

Bei perfekter Anpassung gilt  $|\underline{\Gamma}(z)| = 0$  und  $|\underline{\Gamma}(z)| = 1$  entspricht einer Totalreflexion.

### 7.3. Resultierende komplexe Wellenamplitude

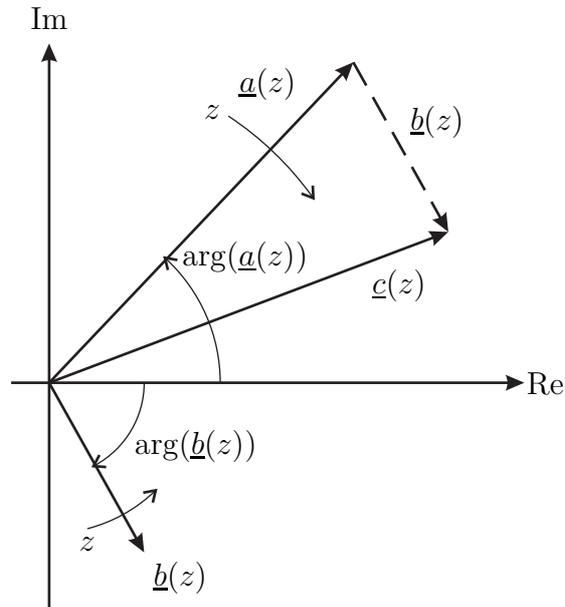
Die Zeiger  $\underline{a}(z)$  und  $\underline{b}(z)$  in der komplexen Ebene drehen sich gemäß (7.2) und (7.5) mit wachsendem  $z$  gegen den beziehungsweise im Uhrzeigersinn, siehe Abbildung 7.1. Die aus der Überlagerung resultierende komplexe Wellenamplitude ist<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} \underline{c}(z) &= \underline{a}(z) + \underline{b}(z) = \underline{a}(z) (1 + \underline{\Gamma}(z)) \\ &= \underline{a}_0 e^{-j\beta z} (1 + \underline{\Gamma}_0 e^{j2\beta z}) \\ &= (1 - \underline{\Gamma}_0) \underline{a}_0 e^{-j\beta z} + \underline{\Gamma}_0 \underline{a}_0 (e^{-j\beta z} + e^{j\beta z}) \quad (7.11) \\ &= \underbrace{(1 - \underline{\Gamma}_0) \underline{a}_0 e^{-j\beta z}}_{\text{hinlaufende Welle}} + \underbrace{2\underline{\Gamma}_0 \underline{a}_0 \cos(\beta z)}_{\text{stehende Welle}}. \end{aligned}$$

Der ortsabhängige Betrag der resultierenden komplexen Wellenamplitude  $\underline{c}(z)$  ergibt sich zu

$$|\underline{c}(z)| = |\underline{a}_0| |1 + \underline{\Gamma}_0 e^{j2\beta z}|,$$

<sup>1</sup>Es wird die Eulersche Formel  $e^{j\alpha} = \cos(\alpha) + j \sin(\alpha)$  verwendet.


 Abbildung 7.1.: Resultierende komplexe Wellenamplitude  $\underline{c}(z)$ 

siehe Abbildung 7.2. Es gibt Orte  $z$  minimalen und maximalen Betrags  $|\underline{c}(z)|$  der resultierenden komplexen Wellenamplitude, die sich abwechselnd im Abstand von

$$\Delta z = \frac{\pi}{2\beta} = \frac{\lambda}{4}$$

befinden, siehe auch (2.38). Die absolute Lage der Minima und Maxima hängt vom Argument des Reflexionsfaktors  $\underline{\Gamma}_0$  ab. Die Minimalwerte sind

$$|\underline{c}|_{\min} = |\underline{a}_0| (1 - |\underline{\Gamma}(z)|) \quad (7.12)$$

und die Maximalwerte sind

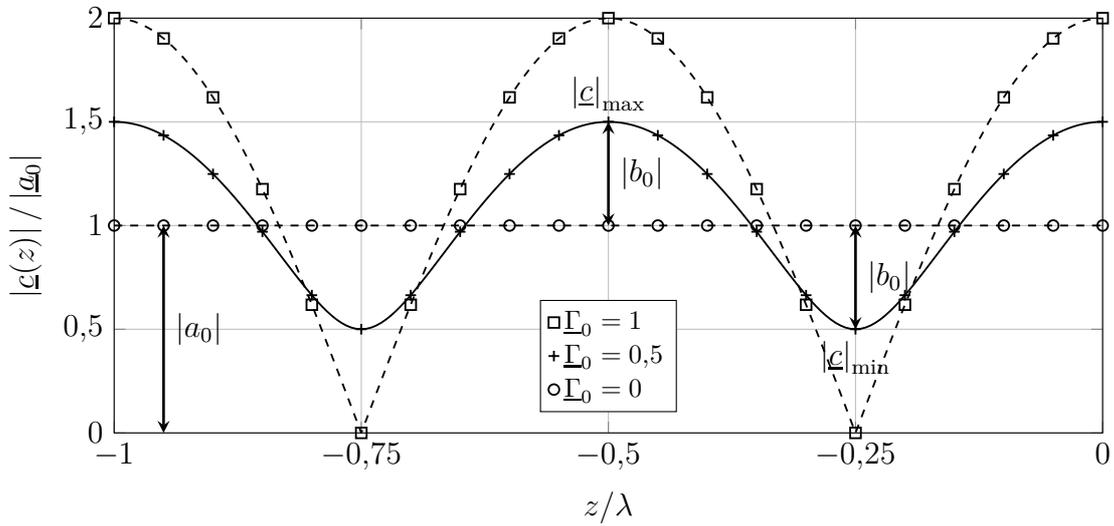
$$|\underline{c}|_{\max} = |\underline{a}_0| (1 + |\underline{\Gamma}(z)|). \quad (7.13)$$

Der Anpassungsfaktor

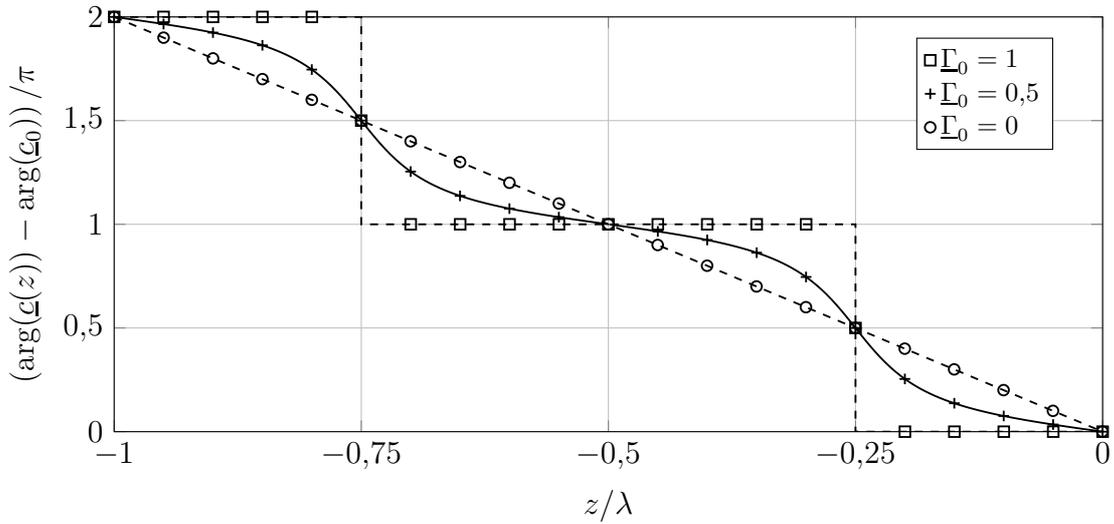
$$m = \frac{|\underline{c}|_{\min}}{|\underline{c}|_{\max}} = \frac{1 - |\underline{\Gamma}(z)|}{1 + |\underline{\Gamma}(z)|} \quad (7.14)$$

ist als Verhältnis von Minimalwert  $|\underline{c}|_{\min}$  und Maximalwert  $|\underline{c}|_{\max}$  des Betrags  $|\underline{c}(z)|$  der resultierenden komplexen Wellenamplitude  $\underline{c}(z)$  definiert. Für den Anpassungsfaktor gilt

$$0 \leq m \leq 1.$$



(a) Betragsverlauf



(b) Phasenverlauf

Abbildung 7.2.: Stehende Welle

$m = 1$  entspricht der perfekten Anpassung und  $m = 0$  einer Totalreflexion. Den Kehrwert  $1/m$  des Anpassungsfaktors  $m$  bezeichnet man als Stehwellenverhältnis (Standing Wave Ratio, SWR). Aus dem Anpassungsfaktor  $m$  kann man den Betrag

$$|\underline{\Gamma}(z)| = \frac{1 - m}{1 + m} \quad (7.15)$$

des Reflexionsfaktors  $\underline{\Gamma}(z)$  berechnen.

**Aufgabe 7.1** Berechnen Sie den auf sein Maximum  $|\underline{c}|_{\max}$  normierten Betrag  $|\underline{c}(z)|$  der resultierenden komplexen Wellenamplitude

$$|\underline{c}'(z)| = \frac{|\underline{c}(z)|}{|\underline{c}|_{\max}}$$

abhängig von Anpassungsfaktor  $m$ , Argument  $\arg(\underline{\Gamma}_0)$  des Reflexionsfaktors  $\underline{\Gamma}_0$  bei  $z = 0$ , Phasenkonstante  $\beta$  und  $z$ !

## 7.4. Spannung und Strom

Für eine transversalelektromagnetische Welle auf einem Zweileitersystem, das im Folgenden auch kurz als Leitung bezeichnet wird, lässt sich auf einfache allgemeingültige Art und Weise eine Beziehung zwischen der komplexen Wellenamplitude und der Spannung und dem Strom herstellen. Spannung  $\underline{U}_H(z)$  und Strom  $\underline{I}_H(z)$  einer sich in positive  $z$ -Richtung ausbreitenden hinlaufenden Welle sind über den Wellenwiderstand

$$Z_L = \frac{\underline{U}_H(z)}{\underline{I}_H(z)}$$

miteinander verknüpft, siehe (3.20). Der Betrag der von einer hinlaufenden Welle transportierten Leistung (7.3) berechnet sich mit dem Wellenwiderstand  $Z_L$  zu

$$|P_a| = \frac{1}{2} |\underline{a}(z)|^2 = \left| \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\underline{U}_H(z) \underline{I}_H^*(z)) \right| = \frac{|\underline{U}_H(z)|^2}{2Z_L} = \frac{1}{2} Z_L |\underline{I}_H(z)|^2,$$

siehe (3.30). Wenn man weiterhin wie allgemein üblich das Argument der komplexen Wellenamplitude  $\underline{a}(z)$  der hinlaufenden Welle gleich dem Argument der Spannung  $\underline{U}_H(z)$  der hinlaufenden Welle wählt, so folgt für die komplexe Wellenamplitude der hinlaufenden Welle

$$\underline{a}(z) = \frac{\underline{U}_H(z)}{\sqrt{Z_L}} = \sqrt{Z_L} \underline{I}_H(z). \quad (7.16)$$

Spannung  $\underline{U}_R(z)$  und Strom  $\underline{I}_R(z)$  einer sich in negative  $z$ -Richtung ausbreitenden rücklaufenden Welle sind ebenfalls über den Wellenwiderstand

$$Z_L = -\frac{\underline{U}_R(z)}{\underline{I}_R(z)}$$

miteinander verknüpft, siehe (3.20). Für die komplexe Wellenamplitude einer sich in negative  $z$ -Richtung ausbreitenden rücklaufenden Welle gilt folglich

$$\underline{b}(z) = \frac{\underline{U}_R(z)}{\sqrt{Z_L}} = -\sqrt{Z_L}\underline{I}_R(z). \quad (7.17)$$

Man beachte das Minuszeichen im letzten Term.

Die hinlaufende und die rücklaufende Welle überlagern sich. Man erhält die aus der Überlagerung resultierende Spannung

$$\underline{U}(z) = \underline{U}_H(z) + \underline{U}_R(z) = \sqrt{Z_L} \underbrace{(\underline{a}(z) + \underline{b}(z))}_{\underline{u}(z)} \quad (7.18)$$

und den aus der Überlagerung resultierenden Strom

$$\underline{I}(z) = \underline{I}_H(z) + \underline{I}_R(z) = \frac{1}{\sqrt{Z_L}} (\underline{a}(z) - \underline{b}(z)). \quad (7.19)$$

Aufgelöst nach den komplexen Wellenamplituden erhält man

$$\underline{a}(z) = \frac{1}{2} \left( \frac{\underline{U}(z)}{\sqrt{Z_L}} + \sqrt{Z_L}\underline{I}(z) \right) \quad (7.20)$$

und

$$\underline{b}(z) = \frac{1}{2} \left( \frac{\underline{U}(z)}{\sqrt{Z_L}} - \sqrt{Z_L}\underline{I}(z) \right). \quad (7.21)$$

Transversalelektromagnetische Wellen, das heißt Signale auf einem Zweileitersystem, kann man konventionell durch die resultierende Spannung  $\underline{U}(z)$  und den resultierenden Strom  $\underline{I}(z)$  oder äquivalent durch die komplexen Wellenamplituden  $\underline{a}(z)$  und  $\underline{b}(z)$  beschreiben. Letztere nicht auf transversalelektromagnetische Wellen auf Zweileitersystemen beschränkte Variante ist wegen der einfacheren Ortsabhängigkeiten (7.2) und (7.5) die in der Hochfrequenztechnik zu bevorzugende.

## 7.5. Impedanz

Die Impedanz

$$\underline{Z}(z) = \frac{\underline{U}(z)}{\underline{I}(z)} \quad (7.22)$$

ist als Verhältnis aus der resultierenden Spannung  $\underline{U}(z)$  und dem resultierendem Strom  $\underline{I}(z)$  definiert. Einsetzen von (7.18) und (7.19) ergibt mit (7.7) und (7.9)

$$\underline{Z}(z) = Z_L \frac{\underline{a}(z) + \underline{b}(z)}{\underline{a}(z) - \underline{b}(z)} = Z_L \frac{1 + \underline{\Gamma}(z)}{1 - \underline{\Gamma}(z)} = Z_L \frac{1 + \underline{\Gamma}_0 e^{+j2\beta z}}{1 - \underline{\Gamma}_0 e^{+j2\beta z}}. \quad (7.23)$$

Auflösen nach dem Reflexionsfaktor ergibt

$$\underline{\Gamma}(z) = \frac{\underline{Z}(z) - Z_L}{\underline{Z}(z) + Z_L}. \quad (7.24)$$

Diese Gleichung entspricht formal nicht nur zufällig den Gleichungen (6.19) und (6.24) zum Berechnen der Reflexionsfaktoren für auf eine ebene Grenzfläche einfallende ebene homogene Wellen.

Bei Kenntnis der Impedanz

$$\underline{Z}_0 = Z_L \frac{1 + \underline{\Gamma}_0}{1 - \underline{\Gamma}_0}$$

bei  $z = 0$  lässt sich der Reflexionsfaktor

$$\underline{\Gamma}_0 = \frac{\underline{Z}_0 - Z_L}{\underline{Z}_0 + Z_L}$$

aus (7.23) eliminieren:<sup>2</sup>

$$\begin{aligned} \underline{Z}(z) &= Z_L \frac{(\underline{Z}_0 + Z_L) + (\underline{Z}_0 - Z_L) e^{j2\beta z}}{(\underline{Z}_0 + Z_L) - (\underline{Z}_0 - Z_L) e^{j2\beta z}} \\ &= Z_L \frac{Z_0 (e^{-j\beta z} + e^{j\beta z}) + Z_L (e^{-j\beta z} - e^{j\beta z})}{Z_0 (e^{-j\beta z} - e^{j\beta z}) + Z_L (e^{-j\beta z} + e^{j\beta z})} \\ &= Z_L \frac{Z_0 \cos(\beta z) - jZ_L \sin(\beta z)}{-jZ_0 \sin(\beta z) + Z_L \cos(\beta z)} \\ &= Z_L \frac{Z_0 - jZ_L \tan(\beta z)}{Z_L - jZ_0 \tan(\beta z)}. \end{aligned} \quad (7.25)$$

---

<sup>2</sup>Es wird die Eulersche Formel  $e^{j\alpha} = \cos(\alpha) + j \sin(\alpha)$  verwendet.

Die Impedanz  $\underline{Z}_0$  bei  $z = 0$  wird durch die Leitung in die Impedanz  $\underline{Z}(z)$  am Ort  $z$  transformiert. Eine Leitung der Länge  $l$  transformiert die Abschlussimpedanz  $\underline{Z}_2$  in die Eingangsimpedanz

$$\underline{Z}_1 = \underline{Z}(z = -l) = Z_L \frac{\underline{Z}_2 + jZ_L \tan(\beta l)}{Z_L + j\underline{Z}_2 \tan(\beta l)}, \quad (7.26)$$

siehe Abbildung 7.3.

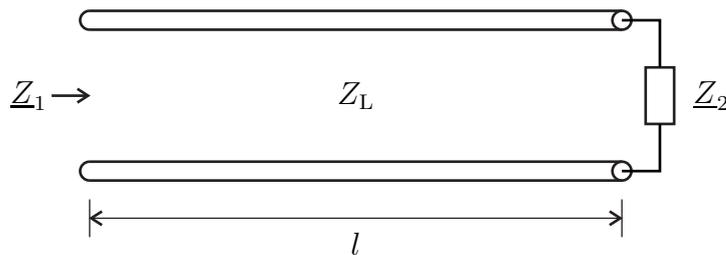


Abbildung 7.3.: Transformation der Abschlussimpedanz  $\underline{Z}_2$  in die Eingangsimpedanz  $\underline{Z}_1$

Falls der Reflexionsfaktor  $\underline{\Gamma}_0$  bei  $z = 0$  reell und negativ ist, gilt

$$\underline{\Gamma}_0 = -|\underline{\Gamma}_0| = \frac{m-1}{m+1},$$

siehe (7.15). Dies in (7.23) eingesetzt ergibt die Impedanz

$$\underline{Z}(z) = Z_L \frac{m - j \tan(\beta z)}{1 - jm \tan(\beta z)} \quad (7.27)$$

am Ort  $z$ , vergleiche auch (7.25).

Das einem Eintor entsprechende Zweileitersystem mit dem Abschluss am Wellenleiterende kann konventionell durch die Impedanz  $\underline{Z}(z)$  oder äquivalent durch den Reflexionsfaktor  $\underline{\Gamma}(z)$  beschrieben werden. Letztere nicht auf transversalelektrische Wellen auf Zweileitersystemen beschränkte Variante ist wegen der wesentlich einfacheren Transformationsgleichung, vergleiche (7.9) und (7.25), die in der Hochfrequenztechnik zu bevorzugende.

**Aufgabe 7.2** Es wird der im Abbildung 7.4 gezeigte Hohlleiter betrachtet. Der Hohlleiter ist im Bereich  $z < 0$  leer und im Bereich  $z > 0$  vollständig mit einem verlustfreien Dielektrikum mit der relativen Permittivität  $\varepsilon_r = 4$  und der relativen Permeabilität  $\mu_r$  ausgefüllt. Im Hohlleiter breitet sich eine transversalelektrische Welle in positive  $z$ -Richtung aus. Die Kreisfrequenz  $\omega$  sei doppelt so groß wie

die kritische Kreisfrequenz  $\omega_c$  des sich ausbreitenden Modes im leeren Hohlleiter. Wie muss die relative Permeabilität  $\mu_r$  des Dielektrikums gewählt werden, damit die Stoßstelle von gefülltem und leerem Hohlleiterbereich reflexionsfrei ist? Betrachten Sie hierzu die Grenzflächenbedingungen der Tangentialkomponenten der Feldstärken bei  $z = 0$ .

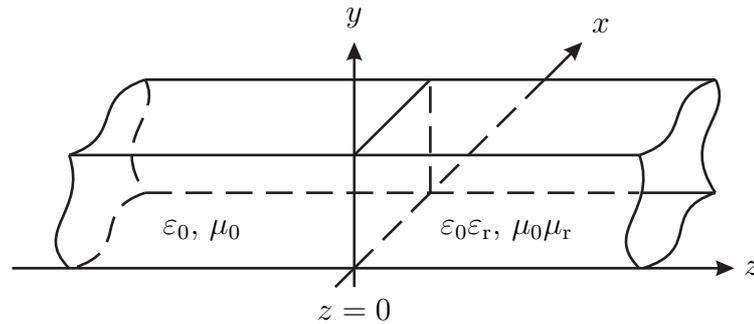


Abbildung 7.4.: Teilweise gefüllter Hohlleiter

**Aufgabe 7.3** Berechnen Sie für den Fall reeller Impedanzen  $\underline{Z} = R$  den Anpassungsfaktor  $m$  abhängig von Widerstand  $R$  und Wellenwiderstand  $Z_L$ !

## 7.6. Leistung

Für den Energietransport in Richtung der Längsachse des Wellenleiters, die der  $z$ -Richtung entspricht, ist nur die  $z$ -Komponente des komplexen Poynting-Vektors  $\underline{\vec{S}}$  gemäß (1.80) relevant, die man aus den Transversalkomponenten der Feldstärken der hinlaufenden und der rücklaufenden Welle wie folgt berechnet:

$$\begin{aligned} \underline{S}_z &= \frac{1}{2} (\underline{E}_x \underline{H}_y^* - \underline{E}_y \underline{H}_x^*) \\ &= \frac{1}{2} ((\underline{E}_{Hx} + \underline{E}_{Rx}) (\underline{H}_{Hy}^* + \underline{H}_{Ry}^*) - (\underline{E}_{Hy} + \underline{E}_{Ry}) (\underline{H}_{Hx}^* + \underline{H}_{Rx}^*)) \\ &= \frac{1}{2} (\underline{E}_{Hx} \underline{H}_{Hy}^* + \underline{E}_{Hx} \underline{H}_{Ry}^* + \underline{E}_{Rx} \underline{H}_{Hy}^* + \underline{E}_{Rx} \underline{H}_{Ry}^* \\ &\quad - \underline{E}_{Hy} \underline{H}_{Hx}^* - \underline{E}_{Hy} \underline{H}_{Rx}^* - \underline{E}_{Ry} \underline{H}_{Hx}^* - \underline{E}_{Ry} \underline{H}_{Rx}^*). \end{aligned}$$

Mit dem Feldwellenwiderstand  $Z_F$  folgt weiterhin<sup>3</sup>

$$\begin{aligned}\underline{S}_z &= \frac{Z_F}{2} \left( \underline{H}_{Hy} \underline{H}_{Hy}^* + \underline{H}_{Hy} \underline{H}_{Ry}^* - \underline{H}_{Ry} \underline{H}_{Hy}^* - \underline{H}_{Ry} \underline{H}_{Ry}^* \right. \\ &\quad \left. + \underline{H}_{Hx} \underline{H}_{Hx}^* + \underline{H}_{Hx} \underline{H}_{Rx}^* - \underline{H}_{Rx} \underline{H}_{Hx}^* - \underline{H}_{Rx} \underline{H}_{Rx}^* \right) \\ &= \frac{Z_F}{2} \left( |\underline{H}_{Hx}|^2 + |\underline{H}_{Hy}|^2 - |\underline{H}_{Rx}|^2 - |\underline{H}_{Ry}|^2 \right. \\ &\quad \left. + 2j \operatorname{Im}(\underline{H}_{Hx} \underline{H}_{Rx}^*) + 2j \operatorname{Im}(\underline{H}_{Hy} \underline{H}_{Ry}^*) \right),\end{aligned}$$

siehe (2.27), (2.28), (2.32) und (2.34). Die transportierte Leistung ergibt sich aus dem Realteil

$$\operatorname{Re}(\underline{S}_z) = \frac{Z_F}{2} \left( |\underline{H}_{Hx}|^2 + |\underline{H}_{Hy}|^2 \right) - \frac{Z_F}{2} \left( |\underline{H}_{Rx}|^2 + |\underline{H}_{Ry}|^2 \right)$$

der  $z$ -Komponente  $\underline{S}_z$  des komplexen Poynting-Vektors  $\vec{\underline{S}}$ . Die in positive  $z$ -Richtung transportierte Leistung ist folglich der Betrag  $|P_a|$  der von der hinlaufenden Welle transportierte Leistung weniger dem Betrag  $|P_b|$  der von der rücklaufenden Welle transportierten Leistung. Mit (7.3) und (7.6) erhält man die transportierte Leistung

$$P = |P_a| - |P_b| = \frac{1}{2} |\underline{a}(z)|^2 - \frac{1}{2} |\underline{b}(z)|^2. \quad (7.28)$$

## 7.7. Messen des Reflexionsfaktors mit einer Messleitung

Die in Abbildung 7.5 gezeigte Messleitung ist eine Einrichtung zum Messen der Feldverteilung auf einem Wellenleiter, der mit einem zu bestimmenden Reflexionsfaktor  $\underline{\Gamma}_0$  abgeschlossen ist. Sie besteht aus dem Wellenleiter und einer verschiebbaren Sonde mit Detektor. Die Sonde ragt in das Feld des Wellenleiters und am Detektor ergibt sich eine zum Betrag  $|\underline{c}(z)|$  der resultierenden komplexen Wellenamplitude  $\underline{c}(z)$  proportionale Gleichspannung.

Mit der Messleitung können die Orte  $z$  der scharfen Minima sehr genau bestimmt werden. Weiterhin können die minimalen und maximalen Beträge  $|\underline{c}(z)|$  der resultierenden komplexen Wellenamplitude  $\underline{c}(z)$ , bis auf einen unbekanntem gemeinsamen Proportionalitätsfaktor, genau gemessen werden. In Abbildung 7.6 sind typische Verläufe dargestellt.

<sup>3</sup>Der Imaginärteil einer komplexen Größe berechnet sich zu  $\operatorname{Im}(\underline{x}) = \frac{1}{2j} (\underline{x} - \underline{x}^*)$ .



Abbildung 7.5.: Universalmessleitung, Baujahr 1959

Zunächst erfolgt eine Kalibriermessung bei Abschluss des Wellenleiters mit einem Kurzschluss. Der Abstand zweier Minima entspricht  $\lambda/2$ , es kann also die Wellenlänge  $\lambda$  bestimmt werden. Weiterhin wird der Ort eines Minimums bestimmt. Dort liegt stets der gleiche Reflexionsfaktor wie am Wellenleiterende vor, da der Abstand vom Wellenleiterende ein ganzzahliges Vielfaches von  $\lambda/2$  ist, siehe (7.9) und (2.38).

Im nächsten Schritt werden bei Abschluss des Wellenleiters mit dem zu bestimmenden Reflexionsfaktor  $\underline{\Gamma}_0$  der Abstand  $\Delta z$  des Minimums in Richtung des Messobjekts vom zuvor bestimmten Ort des Minimums bei Abschluss mit einem Kurzschluss und durch Amplitudenmessung der Anpassungsfaktor  $m$  gemäß (7.14) gemessen. Für den Betrag des Reflexionsfaktors folgt mit (7.15)

$$|\underline{\Gamma}_0| = \frac{|\mathcal{C}|_{\max} - |\mathcal{C}|_{\min}}{|\mathcal{C}|_{\max} + |\mathcal{C}|_{\min}}. \quad (7.29)$$

Beim Fortsetzen der Amplitudenverläufe über das Wellenleiterende hinaus befände sich im Abstand  $\Delta z$  hinter dem Ende des Wellenleiters das nächste Minimum, das heißt hier wäre das Argument des Reflexionsfaktors  $\pi$ . Den Reflexionsfaktor  $\underline{\Gamma}_0$  am Ende des Wellenleiters erhält man durch Transformation des negativen reellen Reflexionsfaktors  $-|\underline{\Gamma}_0|$  im Abstand  $\Delta z$  hinter dem Ende des Wellenleiters mit einer Leitung der Länge  $\Delta z$ . Für das Argument des Reflexionsfaktors folgt

$$\arg(\underline{\Gamma}_0) = \pi - 2\beta\Delta z = \pi - 4\pi\frac{\Delta z}{\lambda}, \quad (7.30)$$

siehe (7.9) und (2.38).

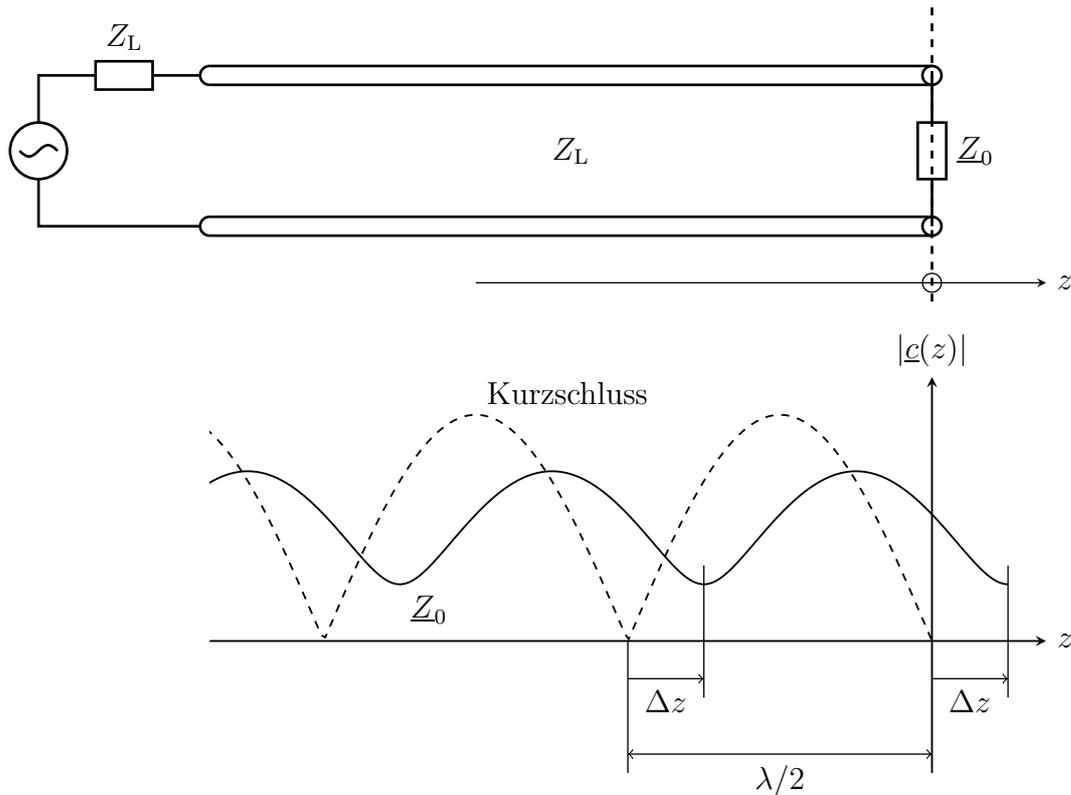


Abbildung 7.6.: Messleitung

Für Zweileitersysteme mit dem Wellenwiderstand  $Z_L$  berechnet man aus dem Reflexionsfaktor  $\underline{\Gamma}_0$  mit (7.23) die Impedanz

$$\underline{Z}_0 = Z_L \frac{1 + \underline{\Gamma}_0}{1 - \underline{\Gamma}_0}. \quad (7.31)$$

## 7.8. Leitungen als Bauelemente

### 7.8.1. Kurzgeschlossene Leitung

Die Eingangsimpedanz der kurzgeschlossenen Leitung aus Abbildung 7.7 ergibt sich mit (7.26) zu

$$\underline{Z}_1 = jZ_L \tan(\beta l), \quad (7.32)$$

siehe Abbildung 7.8.

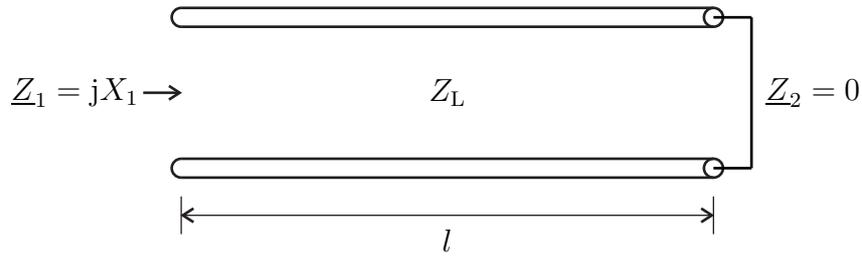


Abbildung 7.7.: Kurzgeschlossene Leitung

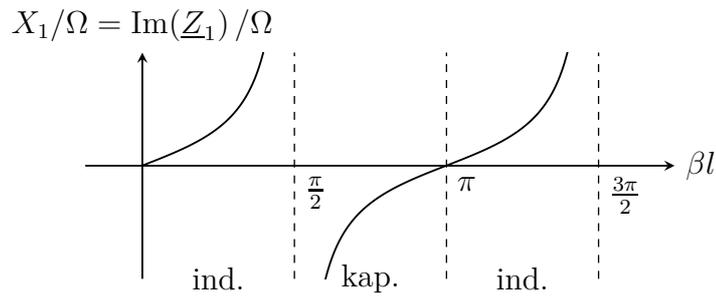


Abbildung 7.8.: Blindwiderstand der kurzgeschlossenen Leitung

### 7.8.2. Leerlaufende Leitung

Die Eingangsimpedanz der leerlaufenden Leitung aus Abbildung 7.9 ergibt sich mit (7.26) zu

$$\underline{Z}_1 = Z_L \frac{1}{j \tan(\beta l)} = -j Z_L \cot(\beta l), \quad (7.33)$$

siehe Abbildung 7.10.

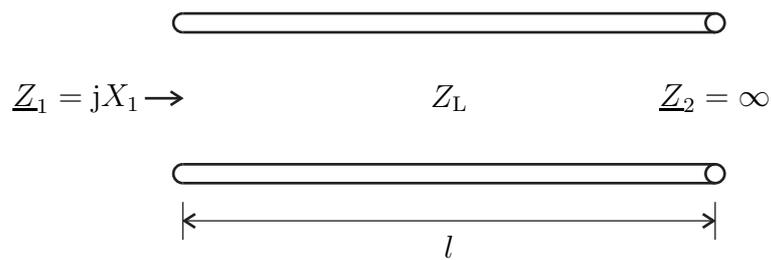


Abbildung 7.9.: Leerlaufende Leitung

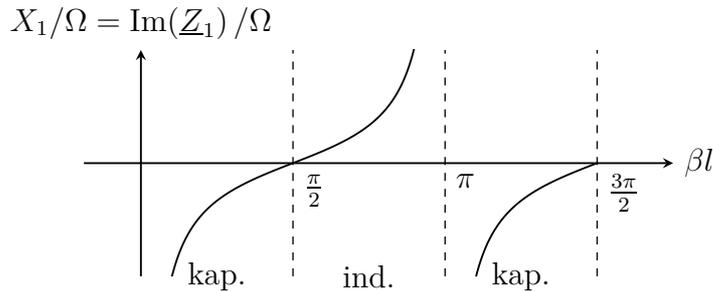


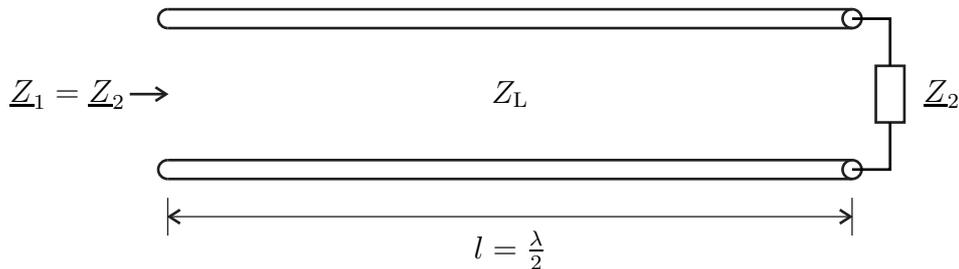
Abbildung 7.10.: Blindwiderstand der leerlaufenden Leitung

### 7.8.3. Autotransformation

Eine Leitung der Länge  $l = \lambda/2$  transformiert die Abschlussimpedanz  $\underline{Z}_2$  in die Eingangsimpedanz

$$\underline{Z}_1 = Z_L \frac{\underline{Z}_2 + jZ_L \tan(\pi)}{Z_L + j\underline{Z}_2 \tan(\pi)} = \underline{Z}_2, \quad (7.34)$$

siehe (7.26), (2.38) und Abbildung 7.11. Die Abschlussimpedanz  $\underline{Z}_2$  wird in sich selbst transformiert. Man bezeichnet dies als Autotransformation.

Abbildung 7.11.:  $\lambda/2$ -Transformator

**Aufgabe 7.4** Es wird der in Abbildung 7.12 gezeigte, aus einem an beiden Enden kurzgeschlossenen Hohlleiter der Breite  $a$ , der Höhe  $b$  und der Länge  $l$  bestehende Hohlraumresonator betrachtet. Bei welchen Kreisfrequenzen treten Resonanzen auf, das heißt bei welchen Kreisfrequenzen kann in dem Hohlraumresonator ein nichtverschwindendes elektromagnetisches Feld existieren?

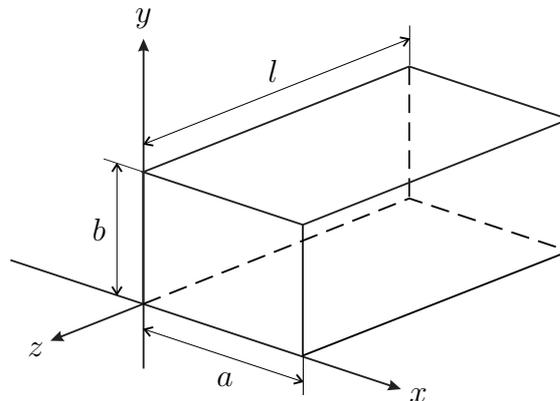


Abbildung 7.12.: Hohlraumresonator

### 7.8.4. Dualtransformation

Eine Leitung der Länge  $l = \lambda/4$  transformiert die Abschlussimpedanz  $\underline{Z}_2$  in die Eingangsimpedanz

$$\underline{Z}_1 = Z_L \frac{\underline{Z}_2 + jZ_L \tan\left(\frac{\pi}{2}\right)}{Z_L + j\underline{Z}_2 \tan\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{Z_L^2}{\underline{Z}_2} \quad (7.35)$$

siehe (7.26), (2.38) und Abbildung 7.13. Man bezeichnet diese Transformation als Dualtransformation. Insbesondere kann man jede reelle Abschlussimpedanz  $R_2$  in jede beliebige andere reelle Eingangsimpedanz  $R_1$  transformieren, man muss nur den Wellenwiderstand

$$Z_L = \sqrt{R_1 R_2} \quad (7.36)$$

der Leitung passend wählen.

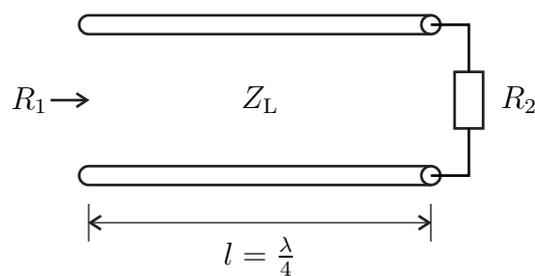


Abbildung 7.13.:  $\lambda/4$ -Transformator

## 7.9. Symmetrische Dreileitersysteme

Auf einem symmetrischen Dreileitersystem können sich zwei orthogonale transversalelektromagnetische Moden, der Gegentakmode und der Gleichtakmode ausbreiten. Man definiert komplexe Wellenamplituden  $\underline{a}^{(-)}(z)$  und  $\underline{b}^{(-)}(z)$  der hinlaufenden und der rücklaufenden Gegentakwelle sowie komplexe Wellenamplituden  $\underline{a}^{(+)}(z)$  und  $\underline{b}^{(+)}(z)$  der hinlaufenden und der rücklaufenden Gleichtakwelle analog zu Abschnitt 7.1. Die Bezugswellen sind wieder so gewählt, dass der Betrag der transportierten Leistungen  $1/2$  ist. Für die hinlaufenden Wellen erhält man unter Ausnutzen der Orthogonalität der Moden den Betrag der transportierten Leistung

$$\begin{aligned} |P_a| &= \left| \operatorname{Re} \left( \underline{U}_H^{(-)}(z) \underline{I}_H^{(-)*}(z) \right) + \operatorname{Re} \left( \underline{U}_H^{(+)}(z) \underline{I}_H^{(+)*}(z) \right) \right| \\ &= \frac{1}{2} \left| \underline{a}^{(-)}(z) \right|^2 + \frac{1}{2} \left| \underline{a}^{(+)}(z) \right|^2, \end{aligned}$$

siehe (3.70). Analog erhält man für die rücklaufenden Wellen den Betrag der transportierten Leistung

$$\begin{aligned} |P_b| &= \left| \operatorname{Re} \left( \underline{U}_R^{(-)}(z) \underline{I}_R^{(-)*}(z) \right) + \operatorname{Re} \left( \underline{U}_R^{(+)}(z) \underline{I}_R^{(+)*}(z) \right) \right| \\ &= \frac{1}{2} \left| \underline{b}^{(-)}(z) \right|^2 + \frac{1}{2} \left| \underline{b}^{(+)}(z) \right|^2. \end{aligned}$$

Analog zu (7.28) erhält man die transportierte Leistung

$$\begin{aligned} P &= |P_a| - |P_b| \\ &= \frac{1}{2} \left| \underline{a}^{(-)}(z) \right|^2 + \frac{1}{2} \left| \underline{a}^{(+)}(z) \right|^2 - \frac{1}{2} \left| \underline{b}^{(-)}(z) \right|^2 - \frac{1}{2} \left| \underline{b}^{(+)}(z) \right|^2. \end{aligned} \quad (7.37)$$

Unter Verwenden der Wellenwiderstände (3.60) und (3.61) von Gegentakmode und Gleichtakmode lassen sich die komplexen Wellenamplituden aus den zugehörigen Spannungen und Strömen analog zu (7.16) und (7.17) wie folgt berechnen:

$$\underline{a}^{(-)}(z) = \sqrt{\frac{2}{Z_L^{(-)}}} \underline{U}_H^{(-)}(z) = \sqrt{2Z_L^{(-)}} \underline{I}_H^{(-)}(z), \quad (7.38)$$

$$\underline{b}^{(-)}(z) = \sqrt{\frac{2}{Z_L^{(-)}}} \underline{U}_R^{(-)}(z) = -\sqrt{2Z_L^{(-)}} \underline{I}_R^{(-)}(z), \quad (7.39)$$

$$\underline{a}^{(+)}(z) = \sqrt{\frac{2}{Z_L^{(+)}}} \underline{U}_H^{(+)}(z) = \sqrt{2Z_L^{(+)}}} \underline{I}_H^{(+)}(z), \quad (7.40)$$

$$\underline{b}^{(+)}(z) = \sqrt{\frac{2}{Z_L^{(+)}}} \underline{U}_R^{(+)}(z) = -\sqrt{2Z_L^{(+)}}} \underline{I}_R^{(+)}(z). \quad (7.41)$$

Die Spannungen und Ströme der hinlaufenden und der rücklaufenden Wellen überlagern sich. Man erhält analog zu (7.18) und (7.19) die aus der Überlagerung resultierende Gegentaktspannung

$$\underline{U}^{(-)}(z) = \underline{U}_H^{(-)}(z) + \underline{U}_R^{(-)}(z) = \sqrt{\frac{Z_L^{(-)}}{2}} \left( \underline{a}^{(-)}(z) + \underline{b}^{(-)}(z) \right), \quad (7.42)$$

die aus der Überlagerung resultierende Gleichtaktspannung

$$\underline{U}^{(+)}(z) = \underline{U}_H^{(+)}(z) + \underline{U}_R^{(+)}(z) = \sqrt{\frac{Z_L^{(+)}}{2}} \left( \underline{a}^{(+)}(z) + \underline{b}^{(+)}(z) \right), \quad (7.43)$$

den aus der Überlagerung resultierenden Gegentaktstrom

$$\underline{I}^{(-)}(z) = \underline{I}_H^{(-)}(z) + \underline{I}_R^{(-)}(z) = \sqrt{\frac{1}{2Z_L^{(-)}}} \left( \underline{a}^{(-)}(z) - \underline{b}^{(-)}(z) \right), \quad (7.44)$$

und den aus der Überlagerung resultierenden Gleichtaktstrom

$$\underline{I}^{(+)}(z) = \underline{I}_H^{(+)}(z) + \underline{I}_R^{(+)}(z) = \sqrt{\frac{1}{2Z_L^{(+)}}} \left( \underline{a}^{(+)}(z) - \underline{b}^{(+)}(z) \right). \quad (7.45)$$

Die komplexen Wellenamplituden lassen sich aus den resultierenden Spannungen und resultierenden Strömen analog zu (7.20) und (7.21) wie folgt berechnen:

$$\underline{a}^{(-)}(z) = \sqrt{\frac{1}{2Z_L^{(-)}}} \underline{U}^{(-)}(z) + \sqrt{\frac{Z_L^{(-)}}{2}} \underline{I}^{(-)}(z), \quad (7.46)$$

$$\underline{b}^{(-)}(z) = \sqrt{\frac{1}{2Z_L^{(-)}}} \underline{U}^{(-)}(z) - \sqrt{\frac{Z_L^{(-)}}{2}} \underline{I}^{(-)}(z), \quad (7.47)$$

$$\underline{a}^{(+)}(z) = \sqrt{\frac{1}{2Z_L^{(+)}}} \underline{U}^{(+)}(z) + \sqrt{\frac{Z_L^{(+)}}{2}} \underline{I}^{(+)}(z), \quad (7.48)$$

$$\underline{b}^{(+)}(z) = \sqrt{\frac{1}{2Z_L^{(+)}}} \underline{U}^{(+)}(z) - \sqrt{\frac{Z_L^{(+)}}{2}} \underline{I}^{(+)}(z). \quad (7.49)$$

Zunächst sollen nur symmetrische Abschlüsse betrachtet werden, siehe Abbildung 7.14. An symmetrischen Abschlüssen wird jeder Mode nur in sich selbst

reflektiert. An asymmetrischen Abschlüssen kann hingegen auch eine Modenkonzersion auftreten, siehe Abschnitt 9.1.6. Wegen der im Allgemeinen unterschiedlichen Wellenwiderstände von Gegentakmode und Gleichtakmode und der unterschiedlichen für die verschiedenen Moden sichtbaren Impedanzen sind die Reflexionsfaktoren an ein und dem selben symmetrischen Abschluss für die beiden Moden im Allgemeinen unterschiedlich.

Die für den Gegentakmode wirksame Abschlussimpedanz ergibt sich aus der Parallelschaltung von  $\underline{Z}_{2,10}$  und  $\frac{\underline{Z}_{2,12}}{2}$ :

$$\underline{Z}_2^{(-)} = \underline{Z}_{2,10} \parallel \frac{\underline{Z}_{2,12}}{2} = \frac{\underline{Z}_{2,10} \frac{\underline{Z}_{2,12}}{2}}{\underline{Z}_{2,10} + \frac{\underline{Z}_{2,12}}{2}}. \quad (7.50)$$

Aus (7.24) ergibt sich unter Verwenden des Wellenwiderstands  $Z_L^{(-)}$  des Gegentakmodes gemäß (3.60) der Reflexionsfaktor

$$\underline{\Gamma}_2^{(-)} = \frac{\underline{Z}_2^{(-)} - Z_L^{(-)}}{\underline{Z}_2^{(-)} + Z_L^{(-)}} \quad (7.51)$$

des Gegentakmodes. Die Abschlussimpedanz  $\underline{Z}_2^{(-)}$  wird durch die Leitung in die für den Gegentakmode sichtbare Eingangsimpedanz

$$\underline{Z}_1^{(-)} = \underline{Z}_{1,10} \parallel \frac{\underline{Z}_{1,12}}{2} = \frac{\underline{Z}_2^{(-)} + jZ_L^{(-)} \tan(\beta l)}{Z_L^{(-)} + j\underline{Z}_2^{(-)} \tan(\beta l)} \quad (7.52)$$

transformiert, siehe (7.26).

Für den Gleichtakmode ist die Abschlussimpedanz

$$\underline{Z}_2^{(+)} = \underline{Z}_{2,10} \quad (7.53)$$

wirksam, so dass sich aus (7.24) unter Verwenden des Wellenwiderstands  $Z_L^{(+)}$  des Gleichtakmodes gemäß (3.61) der Reflexionsfaktor

$$\underline{\Gamma}_2^{(+)} = \frac{\underline{Z}_2^{(+)} - Z_L^{(+)}}{\underline{Z}_2^{(+)} + Z_L^{(+)}} \quad (7.54)$$

des Gleichtakmodes ergibt. Die Abschlussimpedanz  $\underline{Z}_2^{(+)}$  wird durch die Leitung in die für den Gleichtakmode sichtbare Eingangsimpedanz

$$\underline{Z}_1^{(+)} = \underline{Z}_{1,10} = \frac{\underline{Z}_2^{(+)} + jZ_L^{(+)} \tan(\beta l)}{Z_L^{(+)} + j\underline{Z}_2^{(+)} \tan(\beta l)} \quad (7.55)$$

transformiert, siehe (7.26).

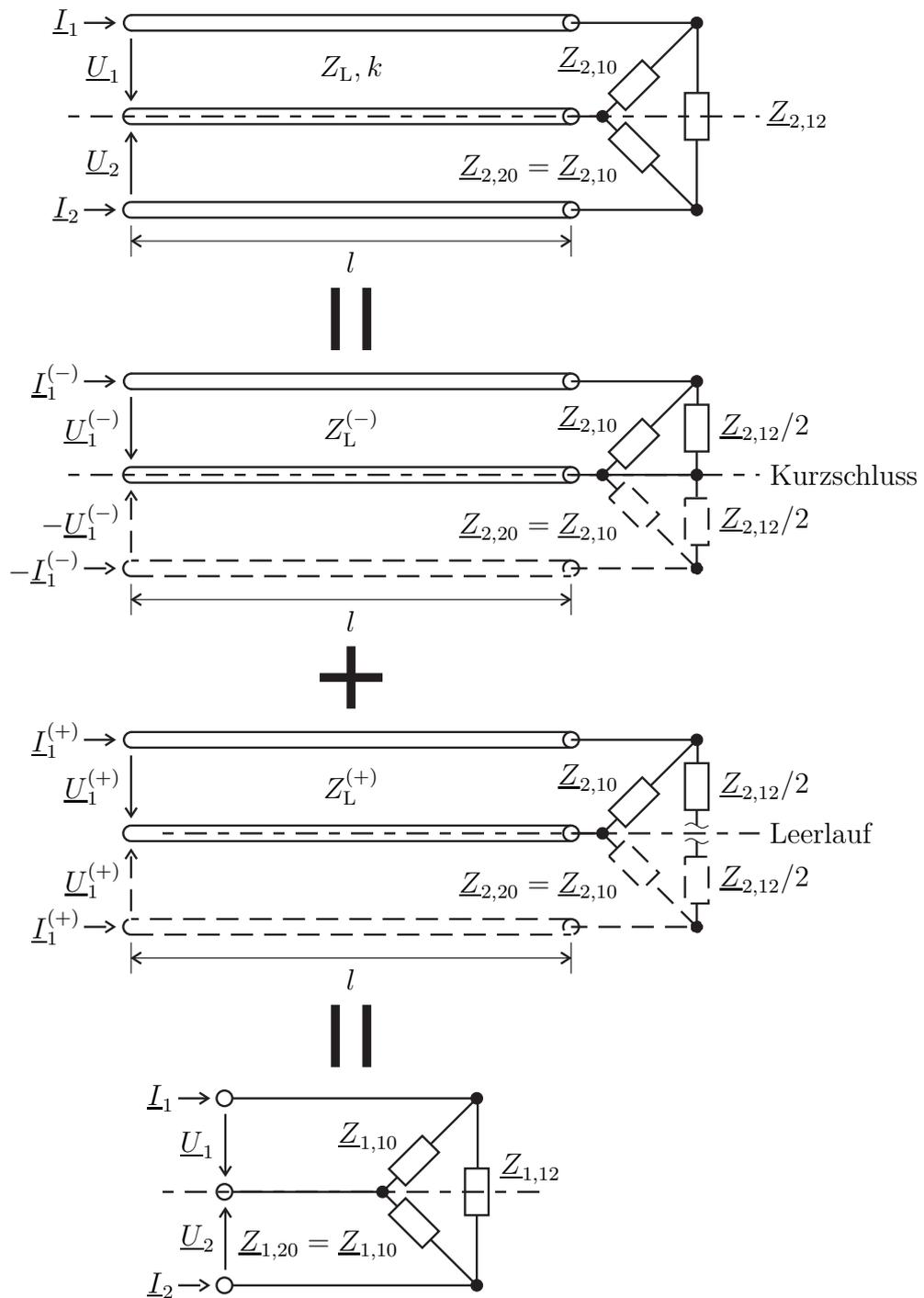


Abbildung 7.14.: Impedanztransformation durch ein symmetrisches Dreileitersystem

**Aufgabe 7.5** *Es wird ein aus drei gleichartigen Leitern in gleicher relativer Anordnung bestehendes Dreileitersystem betrachtet, siehe Aufgabe 3.5. Bestimmen sie die Impedanzen  $\underline{Z}_{2,10}$  und  $\underline{Z}_{2,12}$  des symmetrischen Abschlusses abhängig vom Wellenwiderstand  $Z_L$  derart, dass weder Gegentaktmode noch Gleichtaktmode reflektiert werden:*

$$\Gamma_2^{(-)} = \Gamma_2^{(+)} = 0.$$

## 7.10. Massegekoppelte symmetrische Dreileitersysteme

Für massegekoppelte symmetrische Dreileitersysteme sind gemäß (3.72) die Wellenwiderstände der beiden Moden gleich. Damit sind auch die Reflexionsfaktoren an einem symmetrischen massegekoppelten Abschluss für beide Moden gleich. Der Abschluss in Abbildung 7.14 wäre beispielsweise dann ein massegekoppelter Abschluss, wenn  $\underline{Z}_{2,12} = \infty$  nicht vorhanden wäre und damit auch  $\underline{Z}_2^{(-)} = \underline{Z}_2^{(+)}$  gilt.

Die hier primär interessierende Besonderheit eines massegekoppelten symmetrischen Dreileitersystems besteht jedoch darin, dass man es auch als ein Paar gleichartiger Zweileitersysteme ansehen kann. Die komplexen Wellenamplituden auf diesen Zweileitersystemen kann man aus den zugehörigen Spannungen und Strömen auf den Zweileitersystemen berechnen, siehe (7.16) und (7.17). Die Spannungen und Ströme auf den Zweileitersystemen kann man durch die Spannungen und Ströme der Gegentaktwellen und Gleichtaktwellen ausdrücken, siehe (3.62), (3.63) (3.66) und (3.67), und diese kann man schließlich aus den komplexen Wellenamplituden der Gegentaktwellen und Gleichtaktwellen berechnen, siehe (7.38),

(7.39), (7.40) und (7.41):

$$\begin{aligned}
 \underline{a}_1(z) &= \frac{U_{1H}(z)}{\sqrt{Z_L}} = \frac{U_H^{(-)}(z) + U_H^{(+)}(z)}{\sqrt{Z_L}} \\
 &= \sqrt{Z_L} I_{1H}(z) = \sqrt{Z_L} (I_H^{(-)}(z) + I_H^{(+)}(z)) \\
 &= \frac{\underline{a}^{(-)}(z) + \underline{a}^{(+)}(z)}{\sqrt{2}}, \tag{7.56}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \underline{b}_1(z) &= \frac{U_{1R}(z)}{\sqrt{Z_L}} = \frac{U_R^{(-)}(z) + U_R^{(+)}(z)}{\sqrt{Z_L}} \\
 &= -\sqrt{Z_L} I_{1R}(z) = -\sqrt{Z_L} (I_R^{(-)}(z) + I_R^{(+)}(z)) \\
 &= \frac{\underline{b}^{(-)}(z) + \underline{b}^{(+)}(z)}{\sqrt{2}}, \tag{7.57}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \underline{a}_2(z) &= \frac{U_{2H}(z)}{\sqrt{Z_L}} = \frac{-U_H^{(-)}(z) + U_H^{(+)}(z)}{\sqrt{Z_L}} \\
 &= \sqrt{Z_L} I_{2H}(z) = \sqrt{Z_L} (-I_H^{(-)}(z) + I_H^{(+)}(z)) \\
 &= \frac{-\underline{a}^{(-)}(z) + \underline{a}^{(+)}(z)}{\sqrt{2}}, \tag{7.58}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \underline{b}_2(z) &= \frac{U_{2R}(z)}{\sqrt{Z_L}} = \frac{-U_R^{(-)}(z) + U_R^{(+)}(z)}{\sqrt{Z_L}} \\
 &= -\sqrt{Z_L} I_{2R}(z) = -\sqrt{Z_L} (-I_R^{(-)}(z) + I_R^{(+)}(z)) \\
 &= \frac{-\underline{b}^{(-)}(z) + \underline{b}^{(+)}(z)}{\sqrt{2}}. \tag{7.59}
 \end{aligned}$$

Durch Auflösen nach den komplexen Wellenamplituden der Gegentaktwellen und Gleichtaktwellen erhält man:

$$\underline{a}^{(-)}(z) = \frac{\underline{a}_1(z) - \underline{a}_2(z)}{\sqrt{2}}, \tag{7.60}$$

$$\underline{b}^{(-)}(z) = \frac{\underline{b}_1(z) - \underline{b}_2(z)}{\sqrt{2}}, \tag{7.61}$$

$$\underline{a}^{(+)}(z) = \frac{\underline{a}_1(z) + \underline{a}_2(z)}{\sqrt{2}}, \tag{7.62}$$

$$\underline{b}^{(+)}(z) = \frac{\underline{b}_1(z) + \underline{b}_2(z)}{\sqrt{2}}. \tag{7.63}$$

# Kapitel 8.

## Kreisdiagramme

### 8.1. Normierung

Das Ziel der folgenden Überlegungen ist es, graphische Hilfsmittel zur Analyse und Synthese von Schaltungen zu schaffen. Universell einsetzbare graphische Hilfsmittel und Schaltungen erhält man durch Normierung.

Die Impedanzen normiert man gemäß

$$\underline{\tilde{Z}} = \tilde{R} + j\tilde{X} = \frac{\underline{Z}}{R_B} = \frac{R}{R_B} + j\frac{X}{R_B} \quad (8.1)$$

auf einen reellen positiven Bezugswiderstand  $R_B$ . Entsprechend normiert man die Admittanzen

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} \quad (8.2)$$

gemäß

$$\underline{\tilde{Y}} = \tilde{G} + j\tilde{B} = \frac{\underline{Y}}{G_B} = \frac{G}{G_B} + j\frac{B}{G_B} \quad (8.3)$$

auf den reellen positiven Bezugsleitwert

$$G_B = \frac{1}{R_B}. \quad (8.4)$$

Es folgt die Inversionsbeziehung

$$\underline{\tilde{Y}} = \tilde{G} + j\tilde{B} = \frac{1}{\underline{\tilde{Z}}} = \frac{1}{\tilde{R} + j\tilde{X}} = \frac{\tilde{R}}{\tilde{R}^2 + \tilde{X}^2} - j\frac{\tilde{X}}{\tilde{R}^2 + \tilde{X}^2}. \quad (8.5)$$

Weiterhin normiert man die Kreisfrequenz gemäß

$$\tilde{\omega} = \frac{\omega}{\omega_B} \quad (8.6)$$

auf die reelle positive Bezugskreisfrequenz  $\omega_B$ .

Für den normierten Blindwiderstand einer Induktivität  $L$  folgt

$$\tilde{X} = \frac{\omega L}{R_B} = \tilde{\omega} \underbrace{\frac{\omega_B L}{R_B}}_{\tilde{L}}, \quad (8.7)$$

das heißt Induktivitäten werden auf die Bezugsinduktivität

$$L_B = \frac{R_B}{\omega_B} \quad (8.8)$$

normiert.

Für den normierten Blindleitwert einer Kapazität  $C$  folgt

$$\tilde{B} = \frac{\omega C}{G_B} = \tilde{\omega} \underbrace{\frac{\omega_B C}{G_B}}_{\tilde{C}}, \quad (8.9)$$

das heißt Kapazitäten werden auf die Bezugskapazität

$$C_B = \frac{G_B}{\omega_B} \quad (8.10)$$

normiert.

## 8.2. Inversionsdiagramm

### 8.2.1. Herleitung des Inversionsdiagramms

Die Inversion (8.5) beschreibt eine konforme Abbildung der normierten Impedanzebene auf die normierte Admittanzebene, siehe Abbildung 8.1. Da es sich um einen Sonderfall der Möbius-Transformation handelt, werden Kreise auf Kreise abgebildet, wobei Geraden als Sonderfälle von Kreisen mit unendlichem Radius anzusehen sind. Die senkrechten Geraden konstanten normierten Wirkwiderstands  $\tilde{R}$  der normierten Impedanzebene werden auf Kreise konstanten normierten Wirkwiderstands  $\tilde{R}$  mit Mittelpunkt  $\frac{1}{2\tilde{R}}$  und Radius  $\frac{1}{2\tilde{R}}$  in der normierten Admittanzebene abgebildet. Die horizontalen Geraden konstanten normierten Blindwiderstands  $\tilde{X}$  der normierten Impedanzebene werden auf Kreise konstanten normierten Blindwiderstands  $\tilde{X}$  mit Mittelpunkt  $-j\frac{1}{2\tilde{X}}$  und Radius  $\frac{1}{2\tilde{X}}$  in der normierten Admittanzebene abgebildet.

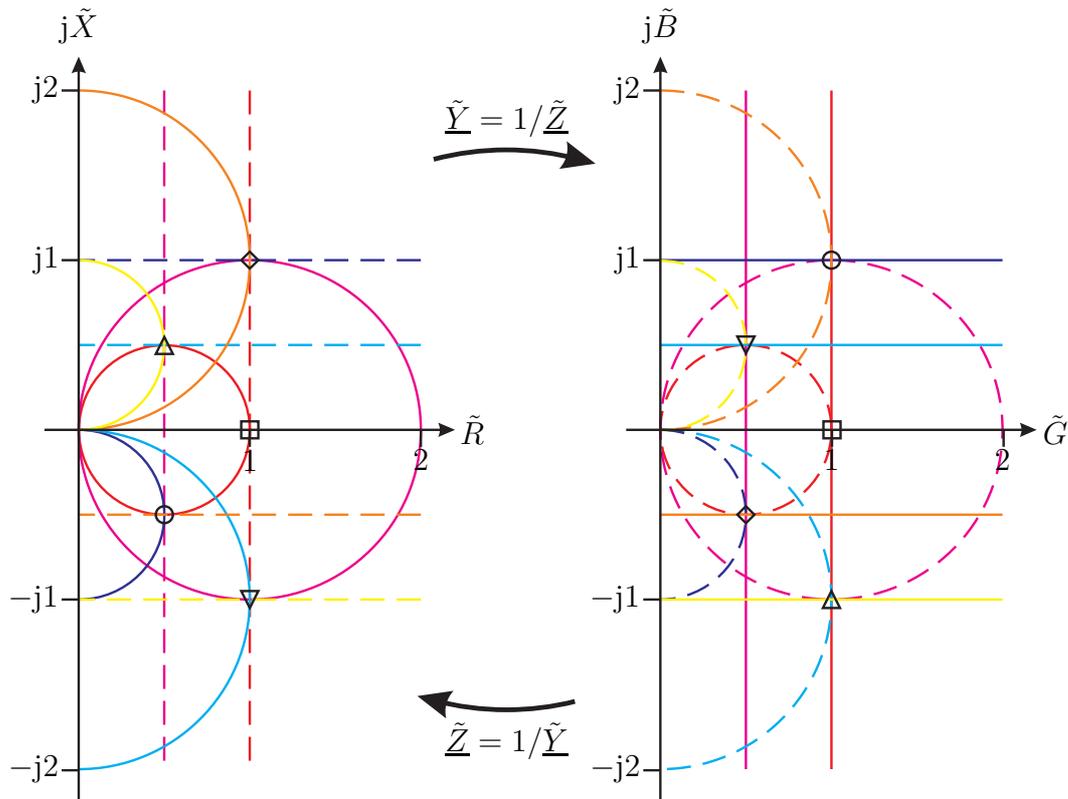


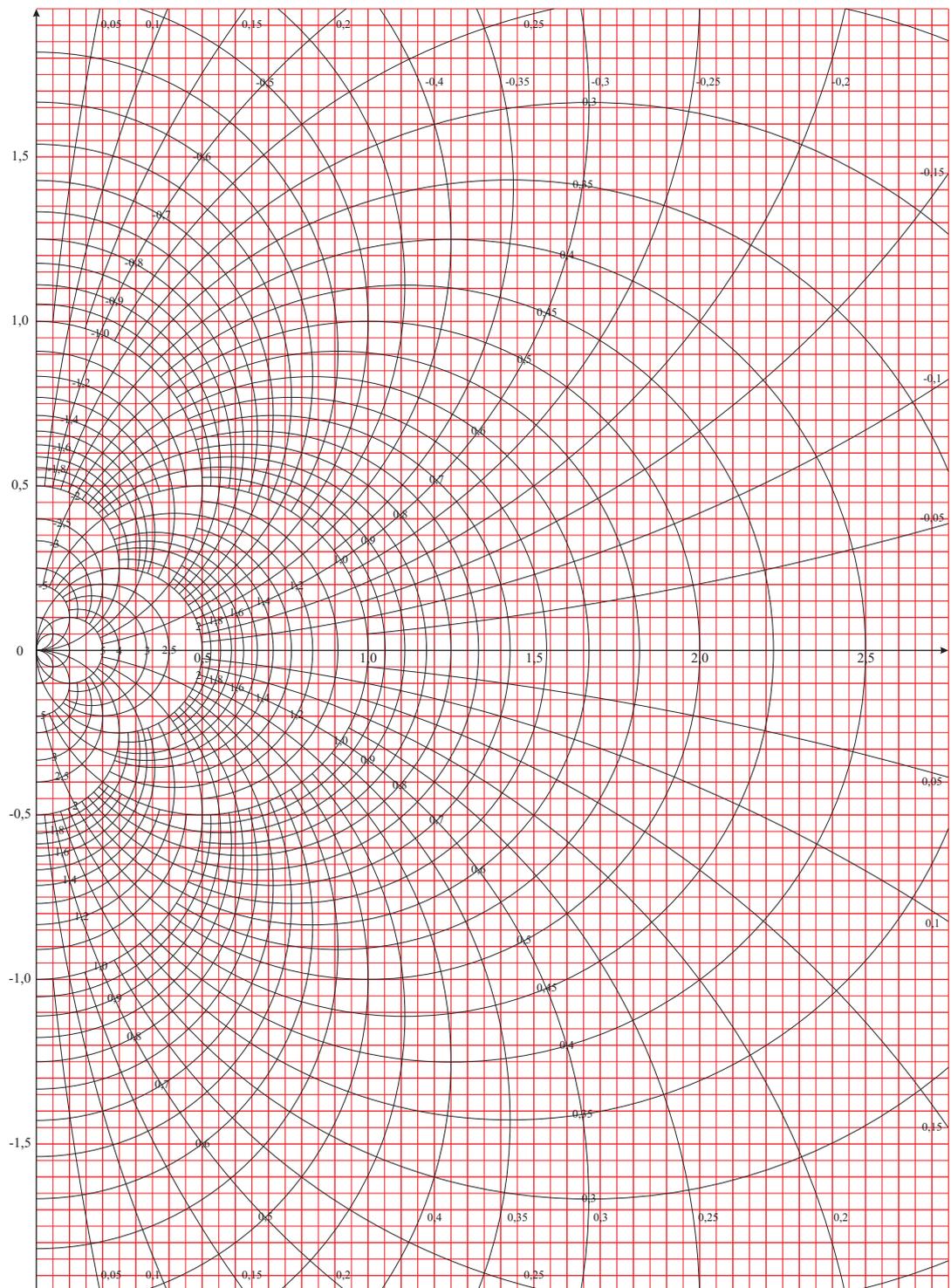
Abbildung 8.1.: Inversionsdiagramm

Die Umkehrabbildung der normierten Admittanzebene auf die normierte Impedanzebene ist völlig dual. Die senkrechten Geraden konstanten normierten Wirkleitwerts  $\tilde{G}$  der normierten Admittanzebene werden auf Kreise konstanten normierten Wirkleitwerts  $\tilde{G}$  mit Mittelpunkt  $\frac{1}{2\tilde{G}}$  und Radius  $\frac{1}{2\tilde{G}}$  in der normierten Impedanzebene abgebildet. Die horizontalen Geraden konstanten normierten Blindleitwerts  $\tilde{B}$  der normierten Admittanzebene werden auf Kreise konstanten normierten Blindleitwerts  $\tilde{B}$  mit Mittelpunkt  $-j\frac{1}{2\tilde{B}}$  und Radius  $\frac{1}{2\tilde{B}}$  in der normierten Impedanzebene abgebildet. Wegen der Dualität kann man das gleiche Inversionsdiagramm als normierte Impedanzebene oder als normierte Admittanzebene nutzen.

**Aufgabe 8.1** Zeigen Sie, dass die Orte konstanten normierten Wirkwiderstands  $\tilde{R}$  und die Orte konstanten normierten Blindwiderstands  $\tilde{X}$  Kreise in der normierten Admittanzebene sind!

## Kapitel 8. Kreisdiagramme

---



## 8.2.2. Transformation mit konzentrierten Bauelementen

### 8.2.2.1. Serienschaltung im Inversionsdiagramm

Zunächst wird die Serienschaltung konzentrierter Bauelemente betrachtet, siehe Abbildung 8.2.

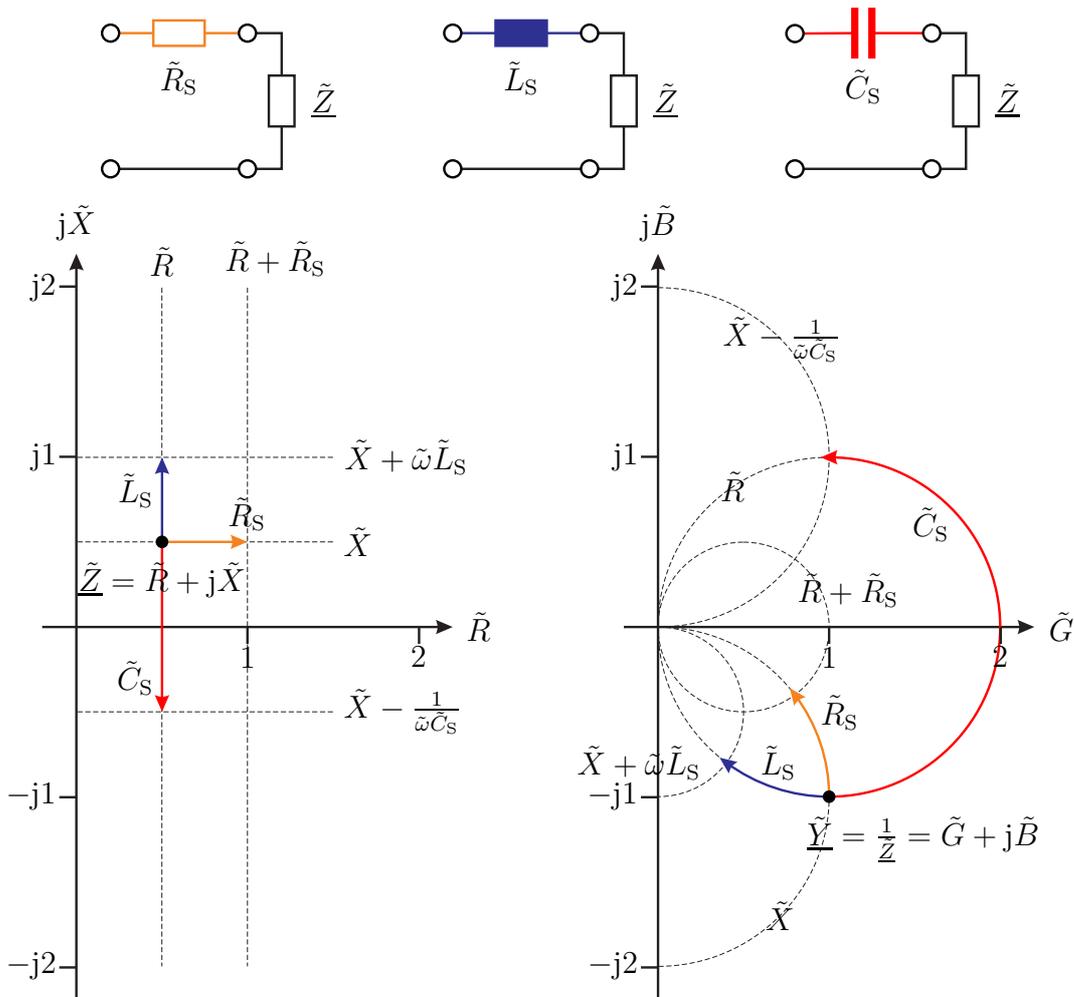


Abbildung 8.2.: Serienschaltung im Inversionsdiagramm

- Die Serienschaltung eines normierten Wirkwiderstands ist eine verlustbehaftete Transformation, mit der sich in der normierten Impedanzebene Punkte rechts von  $\tilde{Z}$  und in der normierten Admittanzebene Punkte auf dem Segment des Kreises konstanten normierten Blindwiderstands durch  $\tilde{Y} = 1/\tilde{Z}$  in Richtung Ursprung erreichen lassen.

- Die Serienschaltung eines normierten Blindwiderstands ist eine verlustfreie Transformation, mit der sich in der normierten Impedanzebene Punkte oberhalb oder unterhalb von  $\tilde{Z}$  und in der normierten Admittanzebene Punkte auf dem Kreis konstanten normierten Wirkwiderstands durch  $\tilde{Y} = 1/\tilde{Z}$  erreichen lassen.

### 8.2.2.2. Parallelschaltung im Inversionsdiagramm

Nun wird die Parallelschaltung konzentrierter Bauelemente betrachtet, siehe Abbildung 8.3.

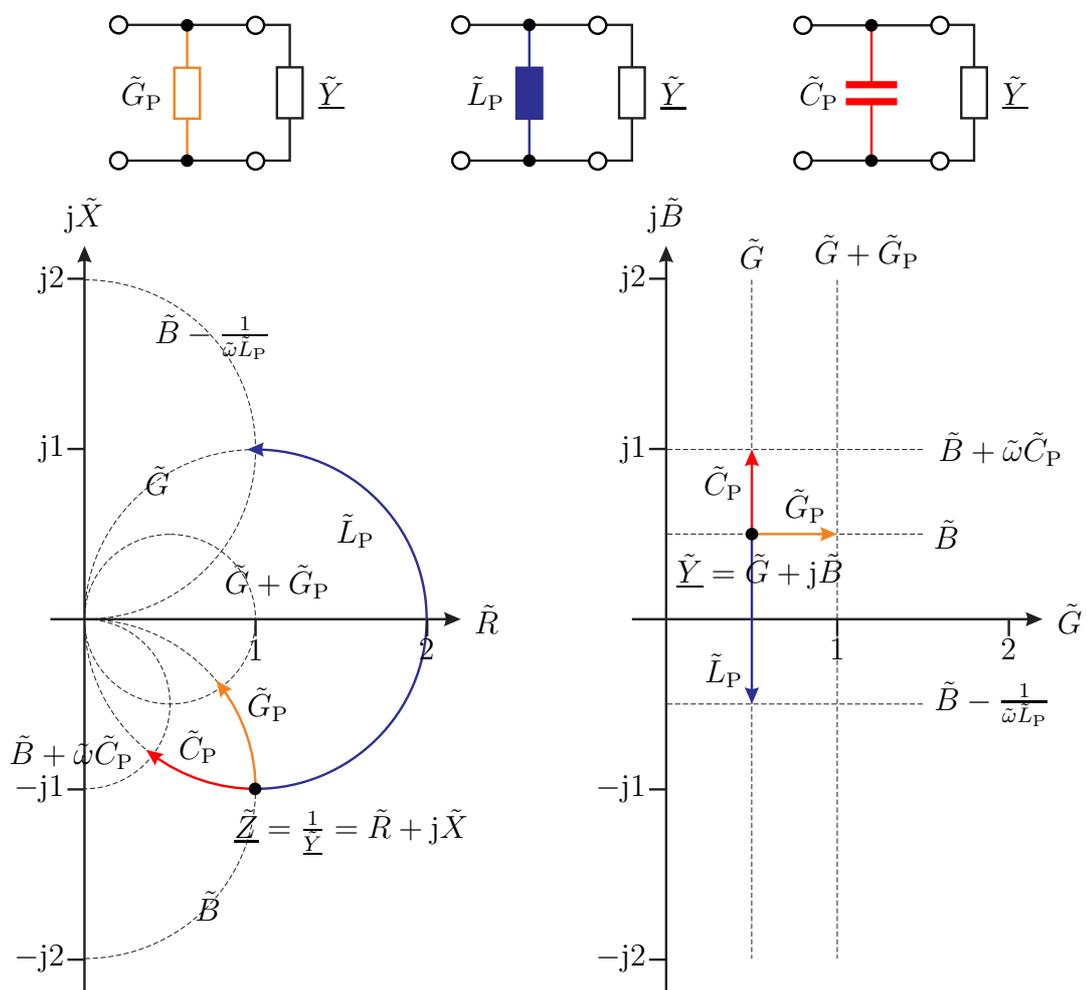


Abbildung 8.3.: Parallelschaltung im Inversionsdiagramm

- Die Parallelschaltung eines normierten Wirkleitwerts ist eine verlustbehaftete Transformation, mit der sich in der normierten Impedanzebene Punkte auf dem Segment des Kreises konstanten normierten Blindleitwerts durch  $\tilde{Z}$  in Richtung Ursprung und in der normierten Admittanzebene Punkte rechts von  $\tilde{Y} = 1/\tilde{Z}$  erreichen lassen.
- Die Parallelschaltung eines normierten Blindleitwerts ist eine verlustfreie Transformation, mit der sich in der normierten Impedanzebene Punkte auf dem Kreis konstanten normierten Wirkleitwerts durch  $\tilde{Z}$  und in der normierten Admittanzebene Punkte oberhalb oder unterhalb von  $\tilde{Y} = 1/\tilde{Z}$  erreichen lassen.

### 8.2.2.3. Transformation mit mehreren Blindelementen

Durch verwenden mehrerer Blindelemente können ausgehend von  $\tilde{Z}_2$  flächige Bereiche in der normierten Impedanzebene oder in der normierten Admittanzebene erreicht werden, siehe Abbildung 8.4. Man kann jede Transformationsaufgabe mit einer Transformationsschaltung aus zwei Blindelementen lösen, man muss jedoch neben den Bauelementewerten auch die Schaltungstopologie geeignet wählen.

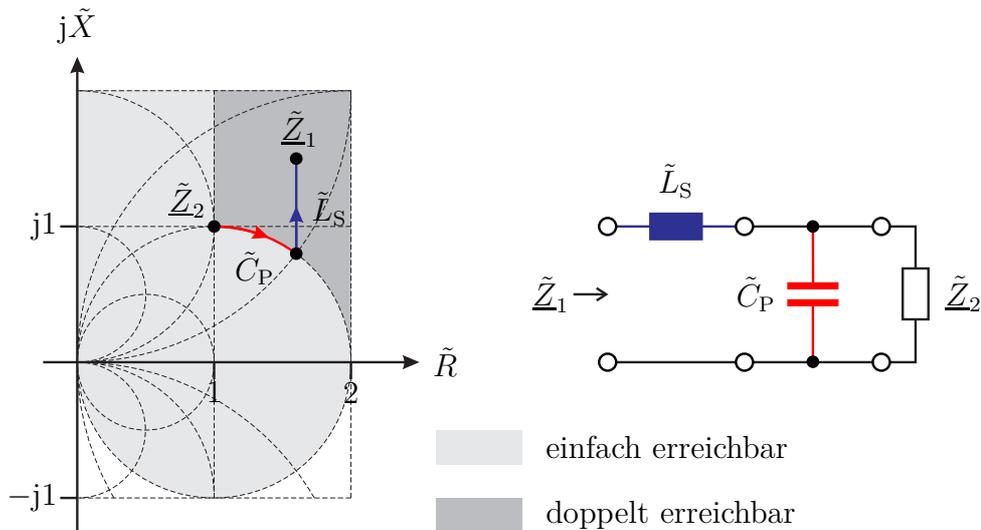


Abbildung 8.4.: Transformation mit mehreren Blindelementen

Es gibt verlustfreie Transformationsschaltungen aus drei Blindelementen, wie die  $\Pi$ -Schaltung, siehe Abbildung 8.5, und die T-Schaltung, siehe Abbildung 8.6, mit denen man allein durch passende Wahl der Bauelementewerte jede Transformationsaufgabe lösen kann.

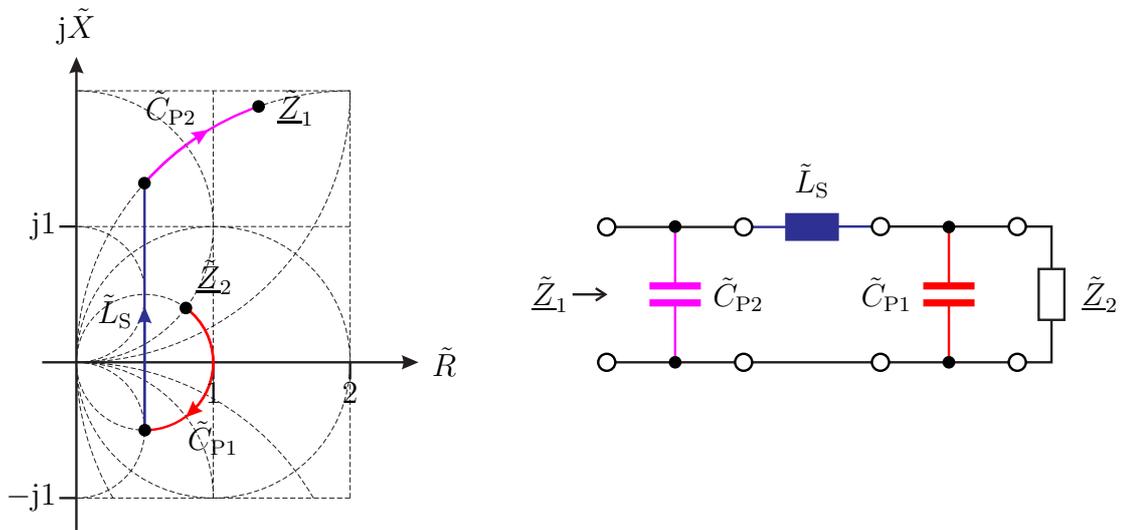


Abbildung 8.5.:  $\Pi$ -Schaltung

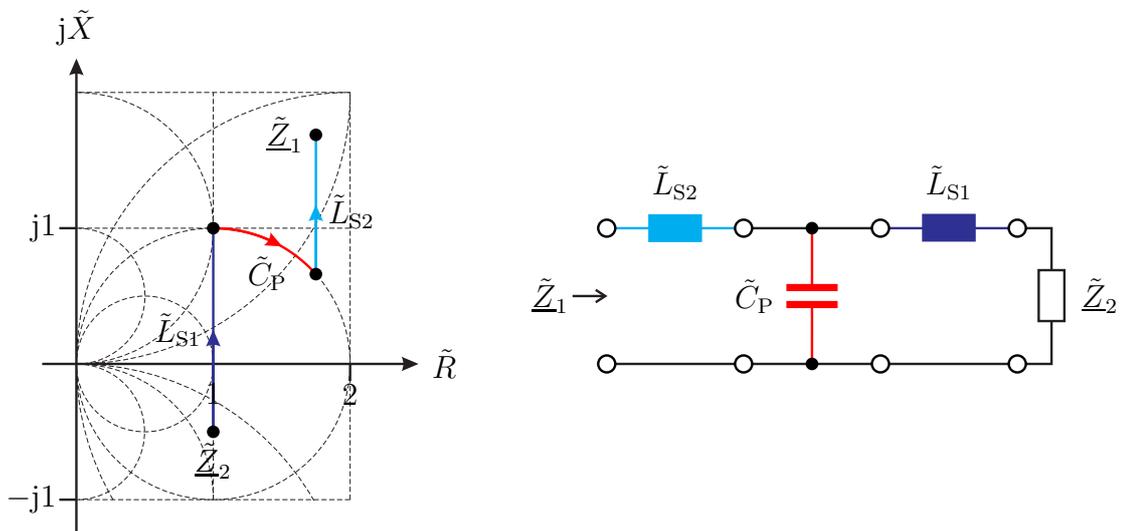


Abbildung 8.6.: T-Schaltung

**Aufgabe 8.2** Die in Abbildung 8.7 dargestellte Schaltung aus der Induktivität  $L = 20 \mu\text{H}$  und den Kapazitäten  $C_1 = 1,25 \text{ nF}$  und  $C_2 = 500 \text{ pF}$  transformiert den Widerstand  $R = 100 \Omega$  in die Eingangsimpedanz  $\underline{Z}$ . Die Schaltung werde bei der Kreisfrequenz  $\omega = 10^7 \text{ s}^{-1}$  betrieben. Bestimmen Sie die Eingangsimpedanz  $\underline{Z}$ !

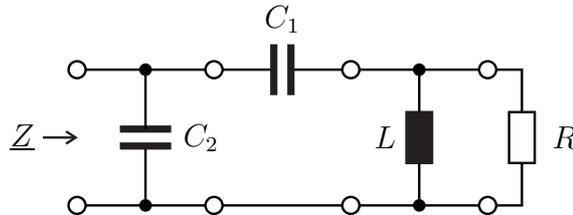


Abbildung 8.7.: Transformationsschaltung mit konzentrierten Bauelementen

## 8.3. Leitungsdiagramm

### 8.3.1. Herleitung des Leitungsdiagramms

#### 8.3.1.1. Negativer reeller Reflexionsfaktor

Es werden Leitungstransformationen in der auf den Wellenwiderstand  $Z_L$  normierten Impedanzebene betrachtet, siehe Abbildung 8.8. Zunächst wird der Spezialfall der Transformation eines negativen reellen Reflexionsfaktors  $\underline{\Gamma}_2 = -|\underline{\Gamma}_2|$  betrachtet. Die auf den Wellenwiderstand  $Z_L$  normierte Impedanz

$$\tilde{Z}_2 = \frac{Z_2}{Z_L} \quad (8.11)$$

ist dann reell und kleiner als eins, siehe (7.23). Mit (7.14) folgt der Anpassungsfaktor

$$m = \frac{1 - |\underline{\Gamma}_2|}{1 + |\underline{\Gamma}_2|}.$$

Die auf den Wellenwiderstand  $Z_L$  normierte Eingangsimpedanz einer mit dem negativem reellem Reflexionsfaktor  $\underline{\Gamma}_2$  abgeschlossenen Leitung der normierten Länge

$$\tilde{l} = \frac{l}{\lambda} \quad (8.12)$$

ist

$$\tilde{Z}_1 = \frac{Z_1}{Z_L} = \frac{m + j \tan(2\pi\tilde{l})}{1 + jm \tan(2\pi\tilde{l})}, \quad (8.13)$$

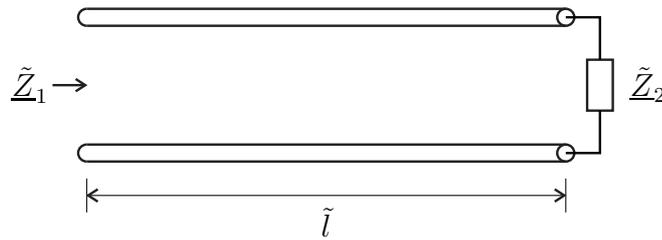


Abbildung 8.8.: Leitungstransformation

siehe (7.27) und (2.38).

Die auf den Wellenwiderstand  $Z_L$  normierte Eingangsimpedanz  $\tilde{Z}_1$  kann als Funktion des Anpassungsfaktors  $m$  oder als Funktion von  $\tan(2\pi\tilde{l})$  betrachtet werden. Es handelt sich um Sonderfälle der Möbius-Transformation. Bei den Orten konstanten Anpassungsfaktors  $m$  oder den Orten konstanter normierter Leitungslänge  $\tilde{l}$ , was einem konstanten  $\tan(2\pi\tilde{l})$  entspricht, handelt es sich folglich um Kreise in der auf den Wellenwiderstand  $Z_L$  normierten Impedanzebene, siehe Abbildung 8.9.

Einen Kreis konstanten Anpassungsfaktors  $m$  erhält man bei einem konstantem negativen reellen Reflexionsfaktor  $\underline{\Gamma}_2 = -|\underline{\Gamma}_2|$  und Variation der normierten Leitungslänge  $\tilde{l}$ . Der Kreis konstanten Anpassungsfaktors  $m$  hat den Mittelpunkt  $\frac{1}{2} \left( \frac{1}{m} + m \right)$  und den Radius  $\frac{1}{2} \left( \frac{1}{m} - m \right)$  in der auf den Wellenwiderstand  $Z_L$  normierten Impedanzebene.

Einen Kreis konstanter normierter Leitungslänge  $\tilde{l}$  erhält man bei Variation des Anpassungsfaktors  $m$ , das heißt bei Variation des negativen reellen Reflexionsfaktors  $\underline{\Gamma}_2 = -|\underline{\Gamma}_2|$ . Der Kreis konstanter normierter Leitungslänge  $\tilde{l}$  hat den Mittelpunkt  $-j \cot(4\pi\tilde{l})$  und den Radius  $\left| \frac{1}{\sin(4\pi\tilde{l})} \right|$  in der auf den Wellenwiderstand  $Z_L$  normierten Impedanzebene. Die Kreisgleichung ist

$$\left| \tilde{Z}_1 + j \cot(4\pi\tilde{l}) \right|^2 = \left( \frac{1}{\sin(4\pi\tilde{l})} \right)^2.$$

Einsetzen von  $\tilde{Z}_1 = 1$  ergibt

$$\left| 1 + j \cot(4\pi\tilde{l}) \right|^2 = 1 + (\cot(4\pi\tilde{l}))^2 = \frac{(\sin(4\pi\tilde{l}))^2 + (\cos(4\pi\tilde{l}))^2}{(\sin(4\pi\tilde{l}))^2} = \left( \frac{1}{\sin(4\pi\tilde{l})} \right)^2,$$

das heißt alle Kreise konstanter normierter Leitungslänge  $\tilde{l}$  gehen durch den Punkt 1. Beim Durchlaufen des Punktes 1 auf einem der Kreise ändert sich der Parameter  $\tilde{l}$  um  $1/4$ , siehe Abbildung 8.9.

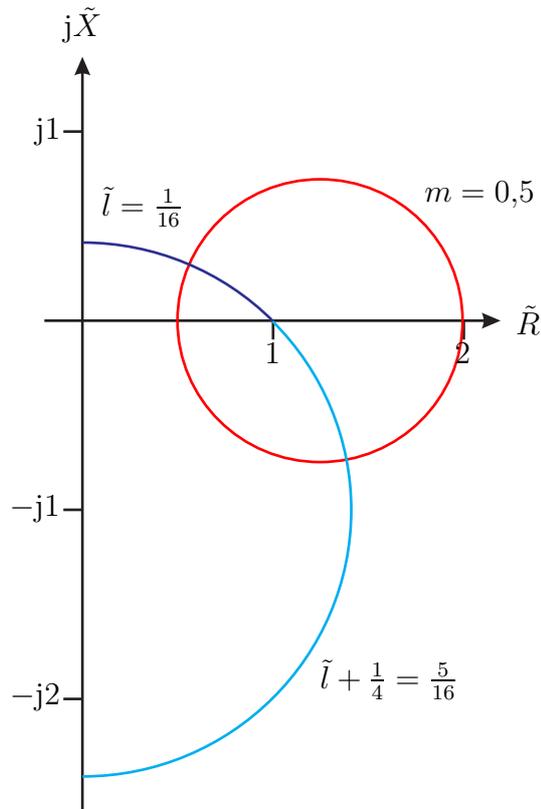
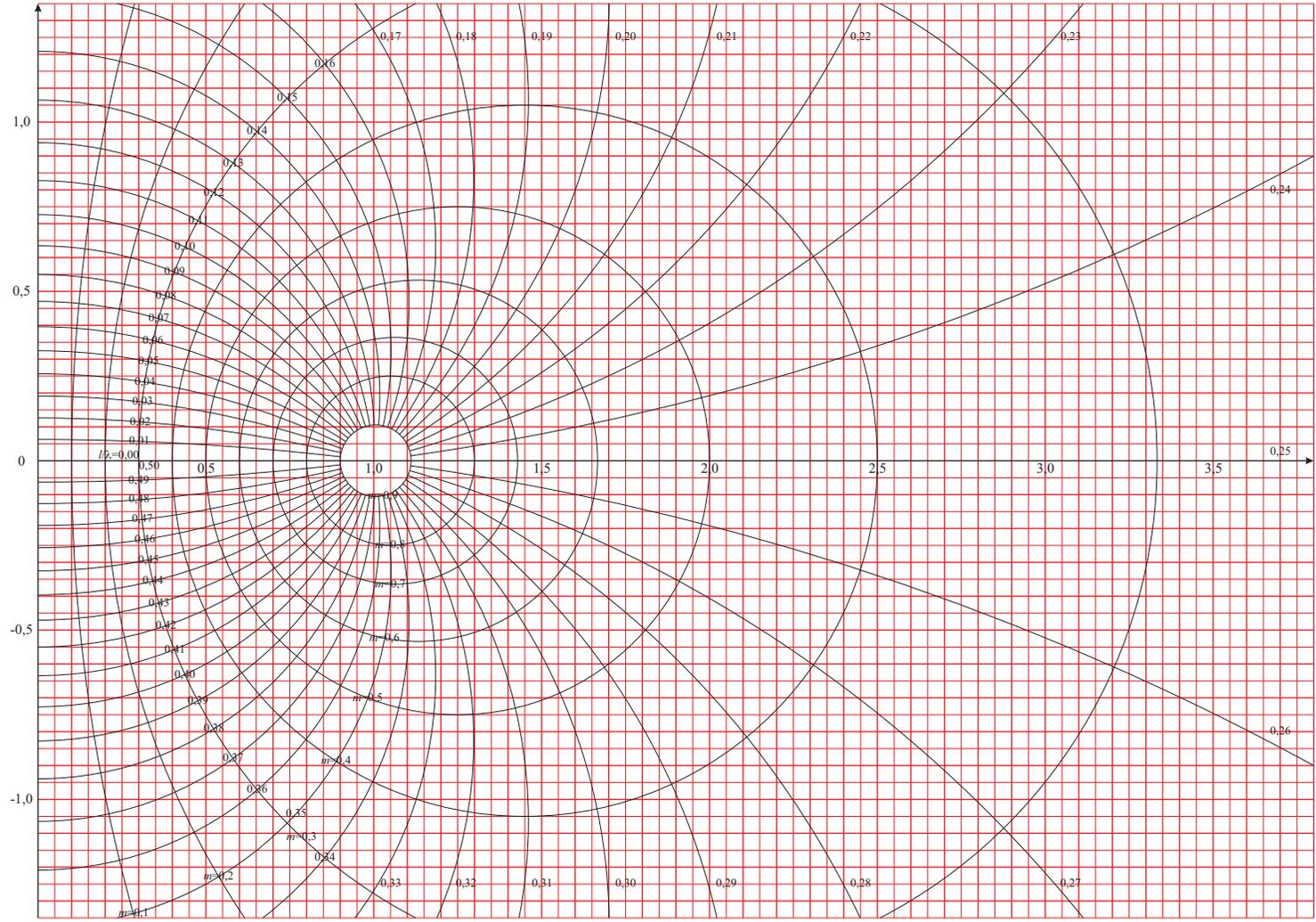


Abbildung 8.9.: Kreis konstanten Anpassungsfaktors  $m$  und Kreise konstanter normierter Leitungslänge  $\tilde{l}$  in der auf den Wellenwiderstand  $Z_L$  normierten Impedanzebene

In der auf den Kehrwert  $1/Z_L$  des Wellenwiderstands normierten Admittanzebene erhält man durch Bilden des Kehrwerts von (8.13)

$$\tilde{Y}_1 = \frac{1}{\tilde{Z}_1} = \frac{1 + jm \tan(2\pi\tilde{l})}{m + j \tan(2\pi\tilde{l})} = \frac{\frac{1}{m} + j \tan(2\pi\tilde{l})}{1 + j\frac{1}{m} \tan(2\pi\tilde{l})}. \quad (8.14)$$

Bis auf die Ersetzung von  $m$  durch  $1/m$  ist dies die gleiche Formel wie für die auf den Wellenwiderstand  $Z_L$  normierten Impedanzebene, siehe (8.13). Für die Orte konstanten Anpassungsfaktors  $m$  oder die Orte konstanter normierter Leitungslänge  $\tilde{l}$  ergeben sich deshalb die formal gleichen Kreisgleichungen wie in der auf den Wellenwiderstand  $Z_L$  normierten Impedanzebene, wobei die beiden Äste  $\tilde{l}$  und  $\tilde{l} \pm 4$  der Kreise konstanter normierter Leitungslänge  $\tilde{l}$  jedoch vertauscht sind. Insbesondere befinden sich die Orte negativen reellen Reflexionsfaktors  $\Gamma_2 = -|\Gamma_2|$  jetzt rechts vom Ort perfekter Anpassung.



**Aufgabe 8.3** Zeigen Sie, dass die Orte konstanten Anpassungsfaktors  $m$  und die Orte konstanter normierter Leitungslänge  $\tilde{l}$  Kreise in der auf den Wellenwiderstand  $Z_L$  normierten Impedanzebene sind!

### 8.3.1.2. Komplexer Reflexionsfaktor

Der komplexe Reflexionsfaktor  $\underline{\Gamma}_2$  kann gemäß (7.9) als Ergebnis der Transformation eines negativen reellen Reflexionsfaktors  $-|\underline{\Gamma}_2|$  mit einer Leitung der normierten Länge

$$\tilde{l}_0 = \frac{\pi - \arg(\underline{\Gamma}_2)}{4\pi}$$

aufgefasst werden, siehe auch (8.12) und (2.38). Diese virtuelle normierte Leitungslänge  $\tilde{l}_0$  ist zur normierten Länge  $\tilde{l}$  der realen Leitung hinzu zu addieren, um die normierte Eingangsimpedanz  $\tilde{Z}_1$  als Ergebnis der Transformation eines negativen reellen Reflexionsfaktors  $-|\underline{\Gamma}_2|$  zu erhalten, siehe Abbildung 8.10.

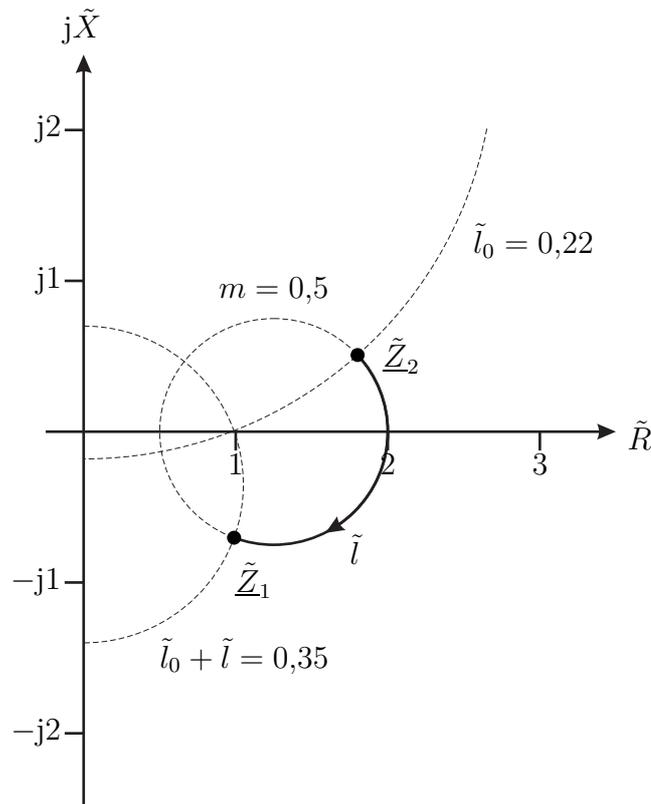


Abbildung 8.10.: Transformation einer beliebigen normierten Impedanz  $\tilde{Z}_2$ . Beispiel  $\tilde{Z}_2 = 1,8 + j0,5$  und  $\tilde{l} = 0,13$

### 8.3.2. Transformation mittels Stichleitung

Abbildung 8.11 zeigt ein Beispiel einer nur aus Leitungen bestehenden Transformationsschaltung. Alle Leitungen haben den gleichen Wellenwiderstand  $Z_L$ . Alle Admittanzen sind auf den Kehrwert  $1/Z_L$  des Wellenwiderstands normiert. Allein durch passende Wahl der normierten Leitungslängen  $\tilde{l}_1$  und  $\tilde{l}_2$  kann man jede beliebige normierte Admittanz  $\tilde{Y}_2$  in die normierte Eingangsadmittanz  $\tilde{Y}_1 = 1$  transformieren. Die parallel geschaltete kurzgeschlossene Stichleitung wirkt wie ein parallelgeschalteter normierter Blindleitwert  $\tilde{B}_2$ .

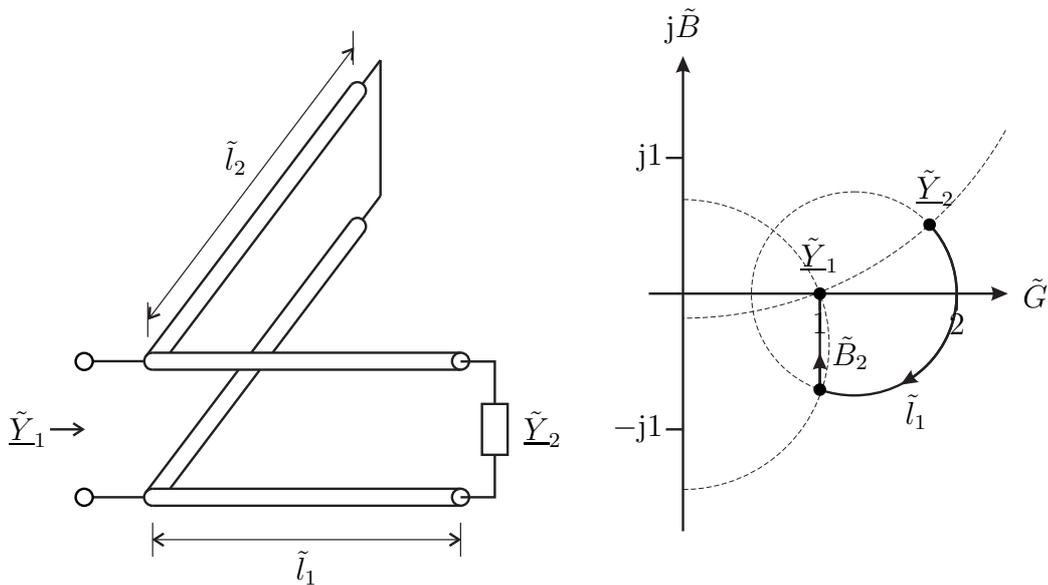


Abbildung 8.11.: Transformation mittels Stichleitung

## 8.4. Smith-Diagramm

### 8.4.1. Herleitung des Smith-Diagramms

Das Smith-Diagramm stellt das Innere des Einheitskreises der Reflexionsfaktorebene dar, siehe Abbildung 8.12.

Man kann das Smith-Diagramm auch als konforme Abbildung der rechten Halbebene der auf den Wellenwiderstand  $Z_L$  normierten Impedanzebene mittels der Abbildungsvorschrift

$$\Gamma = \frac{\tilde{Z} - 1}{\tilde{Z} + 1} \quad (8.15)$$

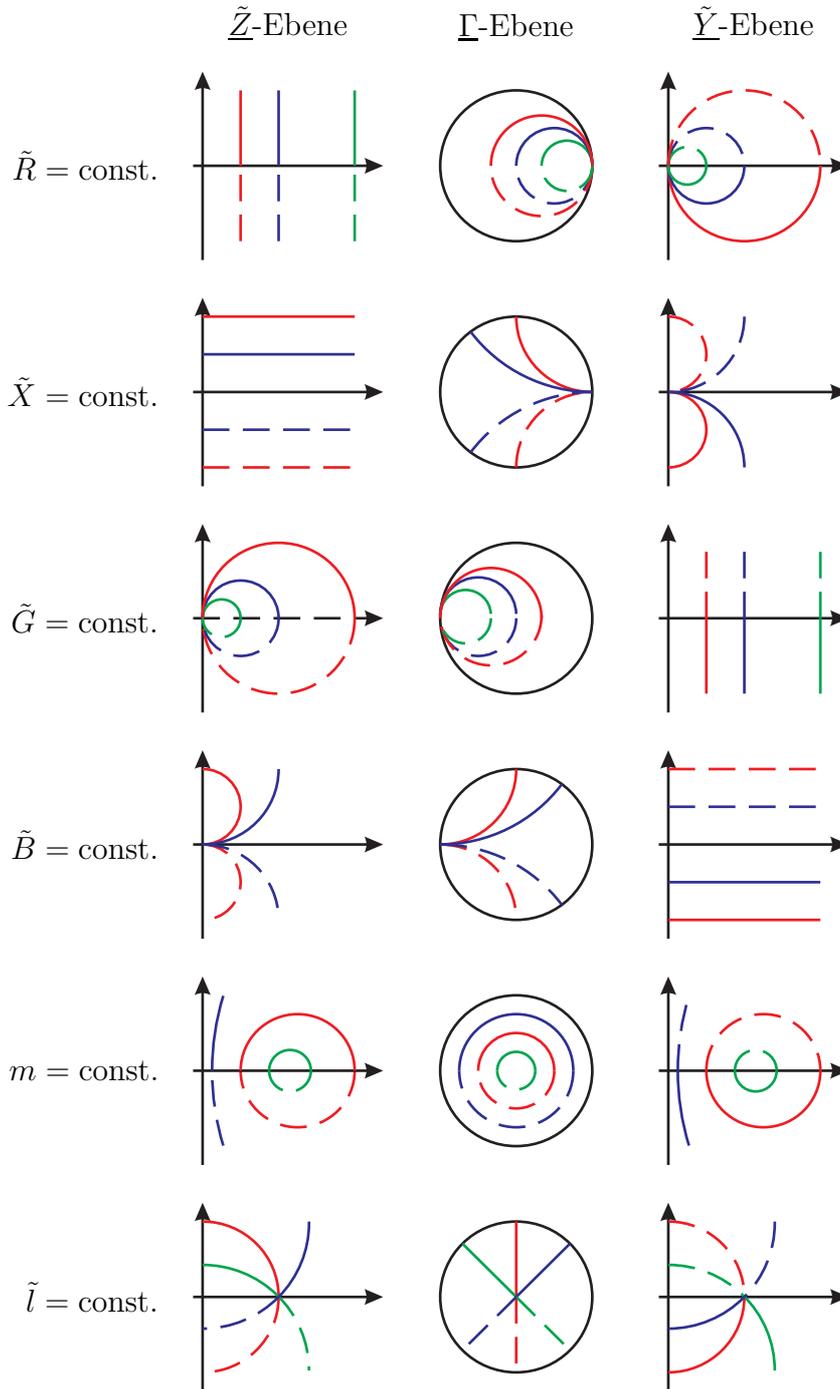


Abbildung 8.12.: Konforme Abbildung der Impedanzebene und der Admittanzebene auf die Reflexionsfaktorebene

auffassen, siehe (7.24). Alternativ kann man es auch als konforme Abbildung der rechten Halbebene der auf den Kehrwert  $1/Z_L$  des Wellenwiderstands normierten Admittanzebene mittels der Abbildungsvorschrift

$$\underline{\Gamma} = \frac{1 - \tilde{Y}}{1 + \tilde{Y}} \quad (8.16)$$

auffassen, siehe (8.5). Die beiden konformen Abbildungen unterscheiden sich mathematisch nur im Vorzeichen, das heißt in einer Spiegelung am Ursprung. Da es sich um Sonderfälle der Möbius-Transformation handelt, werden Kreise auf Kreise abgebildet, wobei Geraden wieder als Sonderfälle von Kreisen mit unendlichem Radius anzusehen sind.

Im Smith-Diagramm sind die Kreise konstanten normierten Wirkwiderstands  $\tilde{R}$  und die Kreise konstanten normierten Blindwiderstands  $\tilde{X}$  eingezeichnet. Die Kreise konstanten normierten Wirkwiderstands  $\tilde{R}$  sind Kreise mit Mittelpunkt  $\frac{\tilde{R}}{1+\tilde{R}}$  und Radius  $\frac{1}{1+\tilde{R}}$ . Die Kreise konstanten normierten Blindwiderstands  $\tilde{X}$  sind Kreise mit Mittelpunkt  $1 + j\frac{1}{\tilde{X}}$  und Radius  $|\frac{1}{\tilde{X}}|$ .

Die Kreise konstanten normierten Wirkleitwerts  $\tilde{G}$  und den Kreise konstanten normierten Blindleitwerts  $\tilde{B}$  fehlen meistens. Da sich die Abbildungsvorschriften (8.15) und (8.16) nur im Vorzeichen unterscheiden, entstehen diese Kreissysteme aus den Kreisen konstanten normierten Wirkwiderstands  $\tilde{R}$  und den Kreisen konstanten normierten Blindwiderstands  $\tilde{X}$  durch Spiegeln am Ursprung. Man behilft sich, indem man die zu betrachtenden Punkte und Transformationswege am Ursprung gespiegelt einträgt.

Die Kreise konstanten Anpassungsfaktors  $m$  sind Kreise konstanten Reflexionsfaktorbetrags  $|\underline{\Gamma}|$  und damit konzentrische Kreise um den Ursprung mit Radius  $\frac{1-m}{1+m}$ , siehe (7.15). Die Orte konstanter normierter Leitungslänge  $\tilde{l}$  sind Orte konstanten Reflexionsfaktorarguments  $\arg(\underline{\Gamma})$  und damit Geraden durch den Ursprung in der Reflexionsfaktorebene, siehe (7.9) und (2.38).

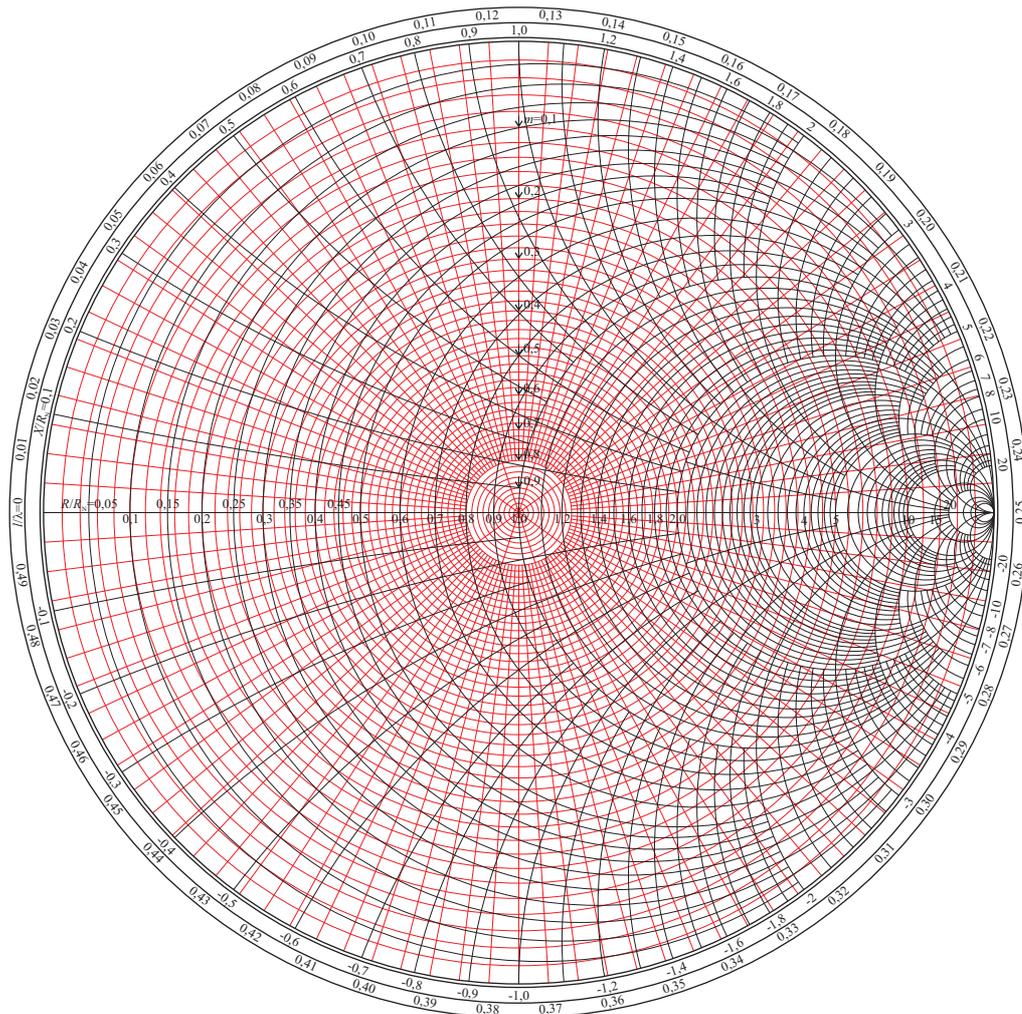
**Aufgabe 8.4** *Zeigen Sie, dass die Orte konstanten normierten Wirkwiderstands  $\tilde{R}$  und die Orte konstanten normierten Blindwiderstands  $\tilde{X}$  Kreise in der Reflexionsfaktorebene sind!*

## 8.4.2. Transformation mit konzentrierten Bauelementen

### 8.4.2.1. Serienschaltung im Smith-Diagramm

Zunächst wird die Serienschaltung konzentrierter Bauelemente betrachtet, siehe Abbildung 8.13.

## 8.4. Smith-Diagramm



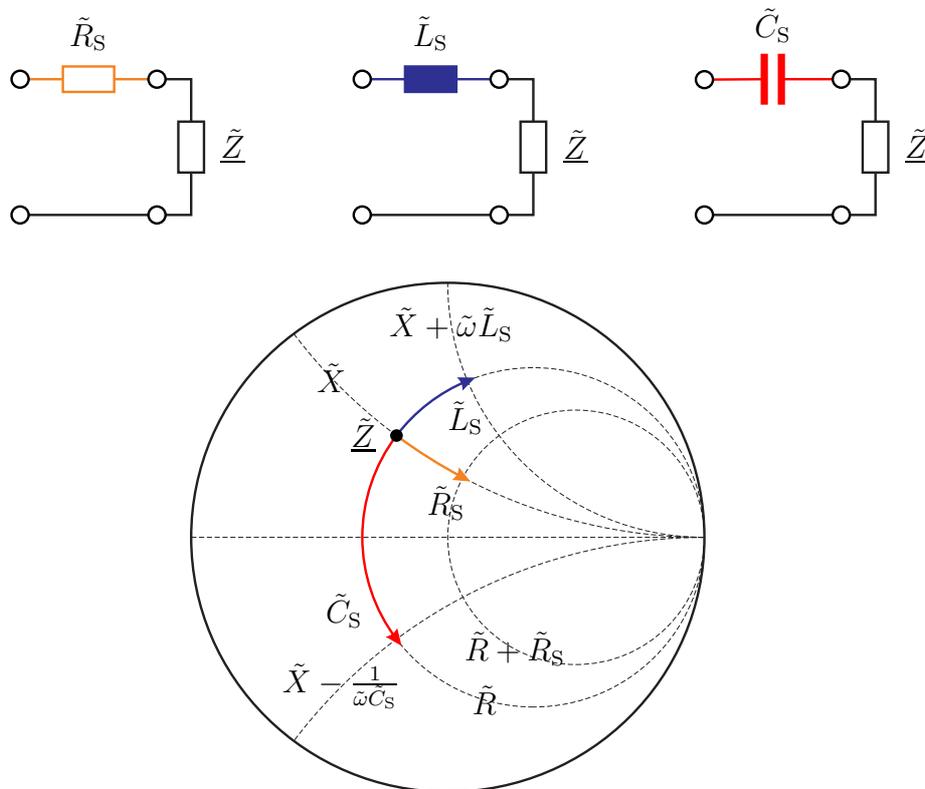


Abbildung 8.13.: Serienschaltung im Smith-Diagramm

- Bei Serienschaltung eines normierten Wirkwiderstands erfolgt die Reflexionsfaktoränderung entlang eines Kreises konstanten normierten Blindwiderstands  $\tilde{X}$  in Richtung des Punktes  $\underline{\Gamma} = 1$ .
- Bei Serienschaltung eines normierten Blindwiderstands erfolgt die Reflexionsfaktoränderung entlang eines Kreises konstanten normierten Wirkwiderstands  $\tilde{R}$ .

#### 8.4.2.2. Parallelschaltung im Smith-Diagramm

Nun wird die Parallelschaltung konzentrierter Bauelemente betrachtet, siehe Abbildung 8.14.

- Bei Parallelschaltung eines normierten Wirkleitwerts erfolgt die Reflexionsfaktoränderung entlang eines Kreises konstanten normierten Blindleitwerts  $\tilde{B}$  in Richtung des Punktes  $\underline{\Gamma} = -1$ .

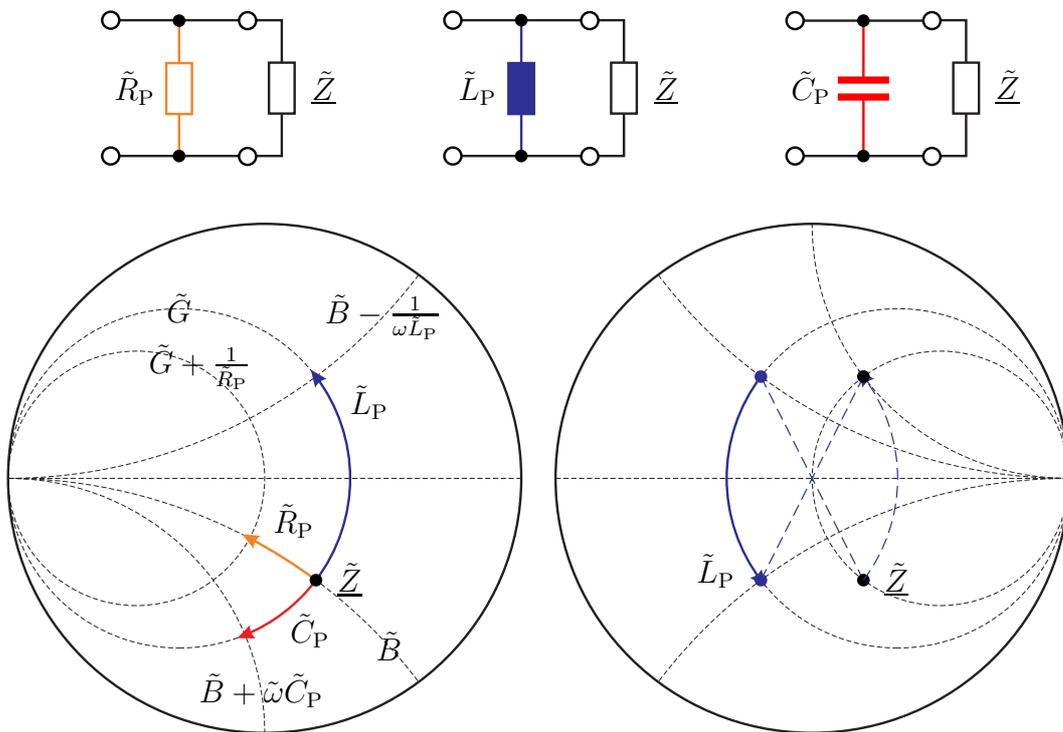


Abbildung 8.14.: Parallelschaltung im Smith-Diagramm

- Bei Parallelschaltung eines normierten Blindleitwerts erfolgt die Reflexionsfaktoränderung entlang eines Kreises konstanten normierten Wirkleitwerts  $\tilde{G}$ .

Links unten in Abbildung 8.14 wird ein Smith-Diagramm mit Kreisen konstanten normierten Wirkleitwerts und die Kreise konstanten normierten Blindleitwerts verwendet. Rechts unten in Abbildung 8.14 ist am Beispiel der Transformation durch Parallelschaltung einer Induktivität die Konstruktion des am Ursprung gespiegelten Transformationsweges dargestellt. Diese Konstruktion verwendet man, falls die Kreise konstanten normierten Wirkleitwerts und die Kreise konstanten normierten Blindleitwerts im verwendeten Smith-Diagramm nicht enthalten sind.

### 8.4.3. Leitungstransformation im Smith-Diagramm

Eine Leitung bewirkt eine Reflexionsfaktoränderung entlang eines Kreises konstanten Anpassungsfaktors  $m$  im Uhrzeigersinn, siehe Abbildung 8.15. Der Winkel der Drehung ist proportional zur normierten Leitungslänge  $\tilde{l}$ .

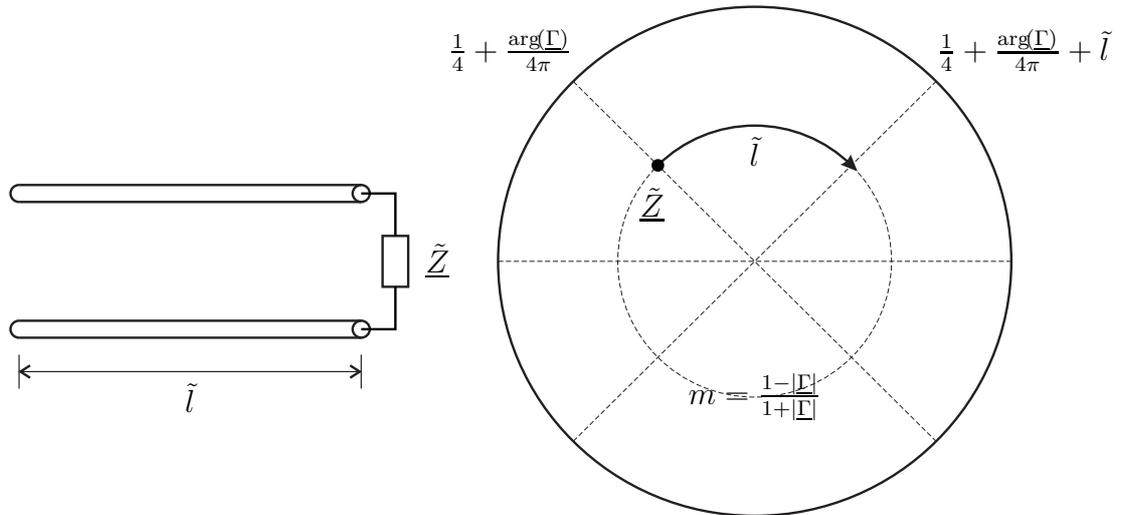


Abbildung 8.15.: Leitungstransformation im Smith-Diagramm

**Aufgabe 8.5** Der Widerstand  $R = 50 \Omega$  soll mit der in *Abbildung 8.16* dargestellten Transformationsschaltung in die Eingangsimpedanz  $\underline{Z} = 200 \Omega$  transformiert werden. Die Wellenwiderstände beider Leitungen seien  $Z_L = 50 \Omega$ . Bestimmen Sie die kürzestmöglichen normierten Leitungslängen  $\tilde{l}_1$  und  $\tilde{l}_2$ !

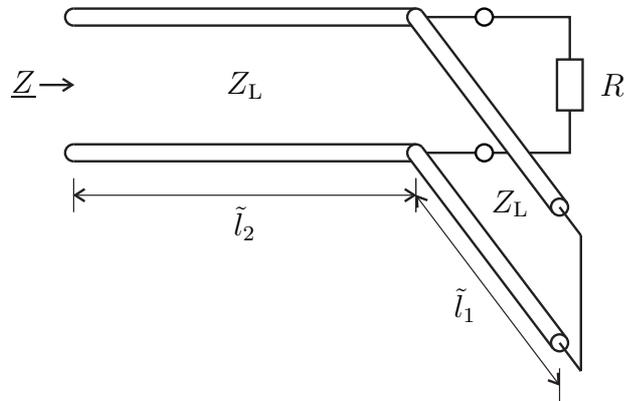


Abbildung 8.16.: Transformationsschaltung mit Leitungen

# Kapitel 9.

## Mehrtore

### 9.1. Mehrtore ohne Quellen

#### 9.1.1. Streumatrix

In den letzten beiden Kapiteln wurden komplexe Wellenamplituden an Eintoren betrachtet. Jetzt sollen komplexe Wellenamplituden an Mehrporten betrachtet werden, siehe Abbildung 9.1.

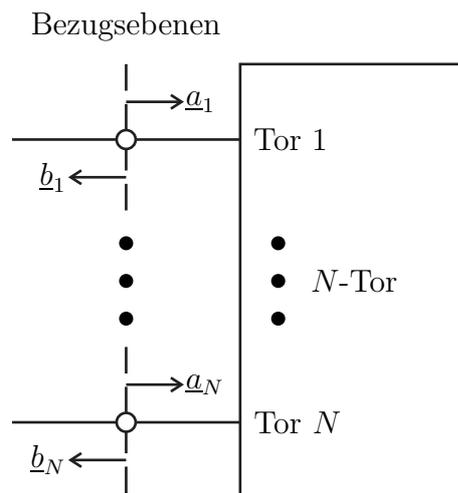


Abbildung 9.1.: Mehrtor

An jedem Tor  $n$  definiert man eine komplexe Wellenamplitude  $\underline{a}_n$  der zulaufenden Welle und eine komplexe Wellenamplitude  $\underline{b}_n$  der ablaufenden Welle. Die Bezugswellen sind wieder so gewählt, dass sich der Betrag der auf das Tor  $n$  zulaufenden Leistung zu

$$|P_{an}| = \frac{1}{2} |\underline{a}_n|^2$$

ergibt und dass sich der Betrag der von dem Tor  $n$  ablaufenden Leistung zu

$$|P_{bn}| = \frac{1}{2} |\underline{b}_n|^2$$

ergibt, vergleiche (7.3) und (7.6). Die komplexen Wellenamplituden sind in den Bezugsebenen bezüglich der Bezugswellen auf den verwendeten Wellenleitersystemen definiert. Speziell bei Zweileitersystemen sind die komplexen Wellenamplituden bezüglich eines Bezugswiderstands  $R_B$  definiert, der dem Wellenwiderstand  $Z_L$  der Wellenleiter entspricht.

Für die vom Mehr Tor aufgenommene Leistung folgt mit (7.28)

$$P = \sum_{n=1}^N \left( \frac{1}{2} |\underline{a}_n|^2 - \frac{1}{2} |\underline{b}_n|^2 \right).$$

Mit dem Vektor

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} \underline{a}_1 \\ \vdots \\ \underline{a}_N \end{pmatrix} \quad (9.1)$$

der komplexen Wellenamplituden  $\underline{a}_n$ ,  $n = 1 \dots N$ , der zulaufenden Wellen und dem Vektor

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} \underline{b}_1 \\ \vdots \\ \underline{b}_N \end{pmatrix} \quad (9.2)$$

der komplexen Wellenamplituden  $\underline{b}_n$ ,  $n = 1 \dots N$ , der ablaufenden Wellen schreibt man kompakter

$$P = \frac{1}{2} \|\mathbf{a}\|^2 - \frac{1}{2} \|\mathbf{b}\|^2 = \frac{1}{2} \mathbf{a}^{*\text{T}} \cdot \mathbf{a} - \frac{1}{2} \mathbf{b}^{*\text{T}} \cdot \mathbf{b}. \quad (9.3)$$

Eine auf ein Tor  $n$  zulaufende Welle der komplexen Wellenamplitude  $\underline{a}_n$  wird durch das lineare Mehr Tor gestreut, so dass im Allgemeinen an allen Toren  $m = 1 \dots N$  ablaufende Wellen entstehen, deren komplexe Wellenamplituden  $\underline{b}_m$  proportional zur komplexen Wellenamplitude  $\underline{a}_n$  der zulaufenden Welle an Tor  $n$  sind. Laufen gleichzeitig auf mehrere Tore des linearen Mehr Tors Wellen zu, so überlagern sich die gestreuten Wellen additiv. Der Zusammenhang zwischen den komplexen Wellenamplituden der zulaufenden und der ablaufenden Wellen an einem linearen Mehr Tor ergibt sich daher zu

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} \underline{b}_1 \\ \vdots \\ \underline{b}_N \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \underline{S}_{1,1} & \cdots & \underline{S}_{1,N} \\ \vdots & & \vdots \\ \underline{S}_{N,1} & \cdots & \underline{S}_{N,N} \end{pmatrix}}_{\mathbf{S}} \cdot \begin{pmatrix} \underline{a}_1 \\ \vdots \\ \underline{a}_N \end{pmatrix} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{a}. \quad (9.4)$$

Die Elemente  $\underline{S}_{m,n}$  der Streumatrix  $\underline{\mathbf{S}}$  bezeichnet man als Streuparameter. Speziell die Diagonalelemente  $\underline{S}_{n,n}$  der Streumatrix  $\underline{\mathbf{S}}$  bezeichnet man als Eigenreflexionsfaktoren.

### 9.1.2. Signalflussgraph

Signalflussgraphen dienen dem Veranschaulichen der Funktionsweise von Mehrportern. Die komplexen Wellenamplituden  $\underline{a}_n$ ,  $n = 1 \dots N$ , und  $\underline{b}_n$ ,  $n = 1 \dots N$ , entsprechen den Knoten im Signalflussgraphen und die Streuparameter  $\underline{S}_{m,n}$ ,  $m, n = 1 \dots N$ , entsprechen den Kanten im Signalflussgraphen, siehe Abbildung 9.2.

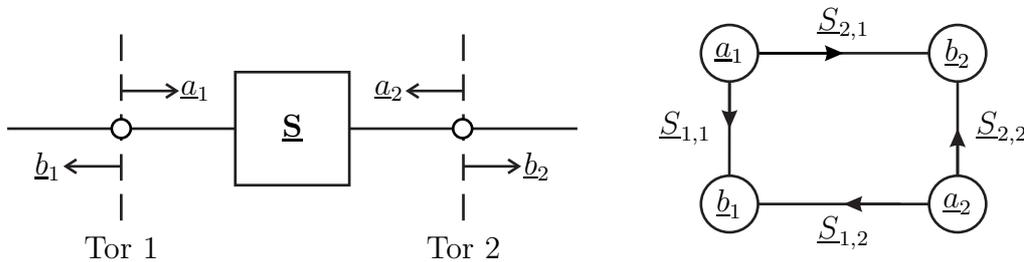


Abbildung 9.2.: Signalflussgraph

Bei komplizierten, aus mehreren Komponenten zusammengesetzten Netzwerken erhält man den resultierenden Signalflussgraphen durch Verknüpfen der Signalflussgraphen der einzelnen Komponenten. Abbildung 9.3 zeigt einige Regeln zum Vereinfachen der entstehenden komplexen Signalflussgraphen. Die Mason-Regeln sind Verallgemeinerungen dieser Regeln [Mas53].

Zum Herleiten der Schleifenregel liest man aus dem Signalflussgraphen

$$\begin{aligned} \underline{d} &= \underline{c} \\ &= \underline{S}_{c,b} \underline{b} \\ &= \underline{S}_{c,b} (\underline{a} + \underline{S}_{b,c} \underline{c}) \\ &= \underline{S}_{c,b} (\underline{a} + \underline{S}_{b,c} \underline{d}) \end{aligned}$$

ab. Aufgelöst nach  $\underline{d}$  erhält man

$$\underline{d} = \frac{\underline{S}_{c,b}}{1 - \underline{S}_{c,b} \underline{S}_{b,c}} \underline{a}.$$

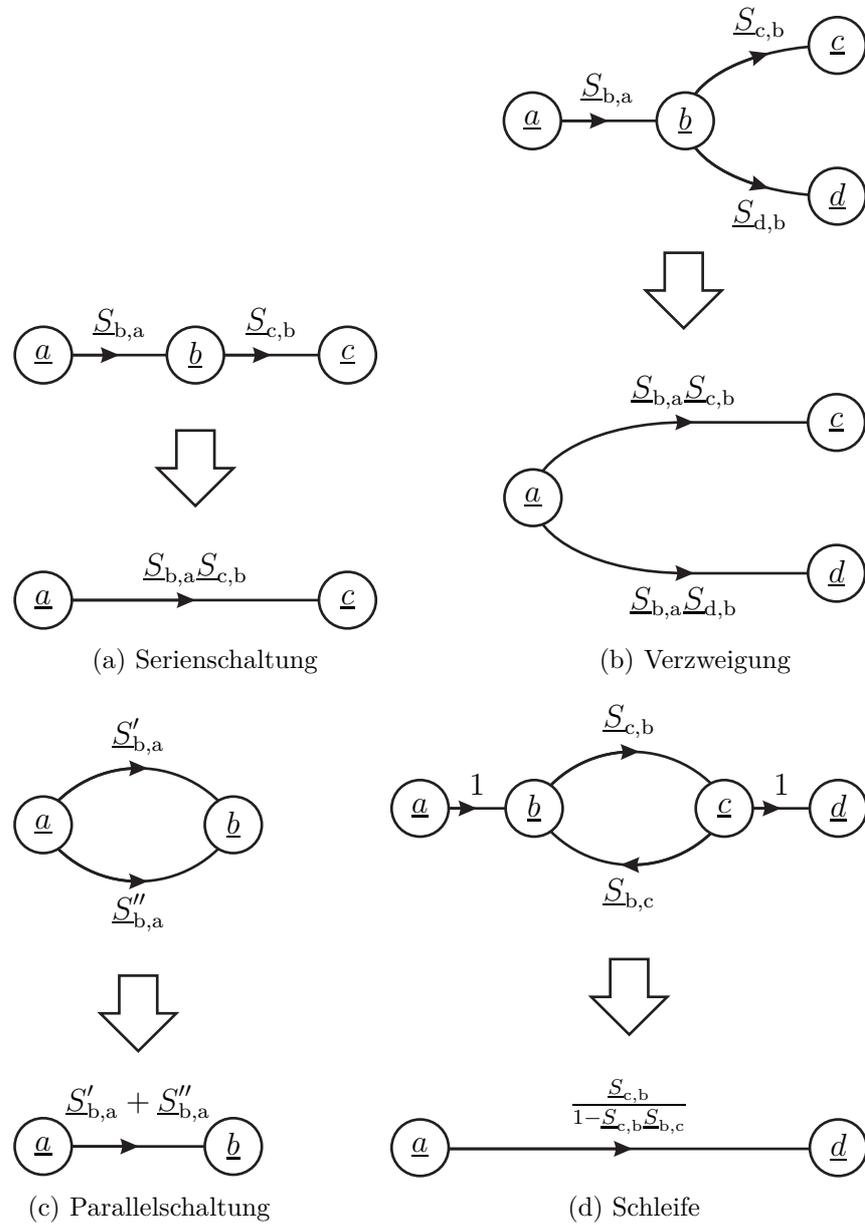


Abbildung 9.3.: Vereinfachen von Signalflussgraphen

### 9.1.3. Eigenschaften von Mehreren

#### 9.1.3.1. Eigenreflexionsfreiheit

Man bezeichnet ein Mehrere als eigenreflexionsfrei, falls alle Eigenreflexionsfaktoren Null sind:

$$\underline{S}_{n,n} = 0, \quad n = 1 \dots N. \quad (9.5)$$

#### 9.1.3.2. Passivität und Verlustfreiheit

Man bezeichnet ein Mehrere als passiv, falls die aufgenommene Leistung  $P$  stets größer oder gleich Null ist. Aus (9.3) folgt mit (9.4) und der Einheitsmatrix  $\mathbf{E}$ :

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2} \underline{\mathbf{a}}^{*\text{T}} \cdot \underline{\mathbf{a}} - \frac{1}{2} \underline{\mathbf{a}}^{*\text{T}} \cdot \underline{\mathbf{S}}^{*\text{T}} \cdot \underline{\mathbf{S}} \cdot \underline{\mathbf{a}} \geq 0, \\ \underline{\mathbf{a}}^{*\text{T}} \cdot (\mathbf{E} - \underline{\mathbf{S}}^{*\text{T}} \cdot \underline{\mathbf{S}}) \cdot \underline{\mathbf{a}} &\geq 0. \end{aligned} \quad (9.6)$$

Diese Ungleichung ist nur dann für alle Vektoren  $\underline{\mathbf{a}}$  erfüllt, wenn die Matrix  $\mathbf{E} - \underline{\mathbf{S}}^{*\text{T}} \cdot \underline{\mathbf{S}}$  positiv semidefinit ist, das heißt keine negativen Eigenwerte hat.<sup>1</sup>

Man bezeichnet ein Mehrere als verlustfrei, wenn die aufgenommene Leistung  $P$  stets Null ist, das heißt wenn stets

$$\underline{\mathbf{a}}^{*\text{T}} \cdot (\mathbf{E} - \underline{\mathbf{S}}^{*\text{T}} \cdot \underline{\mathbf{S}}) \cdot \underline{\mathbf{a}} = 0$$

gilt. Diese Gleichung ist nur dann für alle Vektoren  $\underline{\mathbf{a}}$  erfüllt, wenn

$$\underline{\mathbf{S}}^{*\text{T}} \cdot \underline{\mathbf{S}} = \mathbf{E} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\mathbf{S}}^{-1} = \underline{\mathbf{S}}^{*\text{T}} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\mathbf{S}} \cdot \underline{\mathbf{S}}^{*\text{T}} = \mathbf{E} \quad (9.7)$$

gilt, das heißt wenn die Streumatrix  $\underline{\mathbf{S}}$  unitär ist.

#### 9.1.3.3. Reziprozität

Zum Herleiten des Reziprozitätstheorems wird ohne Beschränkung der Allgemeinheit ein Zweier betrachtet. Das Zweier selbst enthalte keine Quellen und bestehe aus reziproken, das heißt linearen und isotropen Materialien. Die Feldstärken  $\vec{E}_1$  und  $\vec{H}_1$  beschreiben die Feldkonfiguration wenn sich eine Quelle an Tor 1 befindet und Tor 2 reflexionsfrei abgeschlossen ist. Dual dazu beschreiben die Feldstärken  $\vec{E}_2$  und  $\vec{H}_2$  die Feldkonfiguration wenn sich eine Quelle an Tor 2 befindet und Tor 1 reflexionsfrei abgeschlossen ist.

<sup>1</sup>Die Eigenwerte der hermiteschen Matrix  $\mathbf{E} - \underline{\mathbf{S}}^{*\text{T}} \cdot \underline{\mathbf{S}}$  sind stets reell.

Eine Hülle umschlieÙe das Zweitor und verlaufe durch die Bezugsebenen der Tore. Nicht verschwindende Feldstärken treten dann nur in den Bereichen der Tore auf. Mit dem Reziprozitätstheorem (1.83) folgt

$$\iint_{\text{Tor 1}} \langle \vec{E}_1 \times \vec{H}_2, d\vec{A} \rangle + \iint_{\text{Tor 2}} \langle \vec{E}_1 \times \vec{H}_2, d\vec{A} \rangle = \iint_{\text{Tor 1}} \langle \vec{E}_2 \times \vec{H}_1, d\vec{A} \rangle + \iint_{\text{Tor 2}} \langle \vec{E}_2 \times \vec{H}_1, d\vec{A} \rangle.$$

Vereinfachend wird angenommen, dass an beiden Toren gleichartige Wellenleiter verwendet werden. Mit den Feldstärken  $\vec{E}$  und  $\vec{H}$  der Bezugswellen folgt mit (7.1) und (7.4) für die Feldstärken an Tor 1:

$$\begin{aligned} \vec{E}_1 &= a_1 \vec{E} + b_1 \vec{H} = a_1 (1 + \underline{S}_{1,1}) \vec{E}, \\ \vec{H}_1 &= a_1 \vec{H} - b_1 \vec{E} = a_1 (1 - \underline{S}_{1,1}) \vec{H}, \\ \vec{E}_2 &= b_1 \vec{E} = a_2 \underline{S}_{1,2} \vec{E}, \\ \vec{H}_2 &= -b_1 \vec{H} = -a_2 \underline{S}_{1,2} \vec{H}. \end{aligned}$$

Dual folgt für die Feldstärken an Tor 2:

$$\begin{aligned} \vec{E}_1 &= b_2 \vec{E} = a_1 \underline{S}_{2,1} \vec{E}, \\ \vec{H}_1 &= -b_2 \vec{H} = -a_1 \underline{S}_{2,1} \vec{H}, \\ \vec{E}_2 &= a_2 \vec{E} + b_2 \vec{H} = a_2 (1 + \underline{S}_{2,2}) \vec{E}, \\ \vec{H}_2 &= a_2 \vec{H} - b_2 \vec{E} = a_2 (1 - \underline{S}_{2,2}) \vec{H}. \end{aligned}$$

Einsetzen in das Reziprozitätstheorem ergibt:

$$\begin{aligned} & - \iint_{\text{Tor 1}} \langle a_1 (1 + \underline{S}_{1,1}) \vec{E} \times a_2 \underline{S}_{1,2} \vec{H}, d\vec{A} \rangle \\ & + \iint_{\text{Tor 2}} \langle a_1 \underline{S}_{2,1} \vec{E} \times a_2 (1 - \underline{S}_{2,2}) \vec{H}, d\vec{A} \rangle \\ & = \iint_{\text{Tor 1}} \langle a_2 \underline{S}_{1,2} \vec{E} \times a_1 (1 - \underline{S}_{1,1}) \vec{H}, d\vec{A} \rangle \\ & \quad - \iint_{\text{Tor 2}} \langle a_2 (1 + \underline{S}_{2,2}) \vec{E} \times a_1 \underline{S}_{2,1} \vec{H}, d\vec{A} \rangle, \\ & \quad \left( a_1 (1 + \underline{S}_{1,1}) a_2 \underline{S}_{1,2} + a_2 \underline{S}_{1,2} a_1 (1 - \underline{S}_{1,1}) \right) \iint_{\text{Tor 1}} \langle \vec{E} \times \vec{H}, d\vec{A} \rangle \\ & = \left( a_1 \underline{S}_{2,1} a_2 (1 - \underline{S}_{2,2}) + a_2 (1 + \underline{S}_{2,2}) a_1 \underline{S}_{2,1} \right) \iint_{\text{Tor 2}} \langle \vec{E} \times \vec{H}, d\vec{A} \rangle \\ & \underline{S}_{1,2} = \underline{S}_{2,1}. \end{aligned}$$

Man bezeichnet ein Mehrtror als reziprok (umkehrbar) oder transmissionssymmetrisch, falls  $\underline{S}_{m,n} = \underline{S}_{n,m}$  für alle  $m, n = 1 \dots N$  gilt, das heißt falls die Streumatrix  $\underline{S}$  symmetrisch ist:

$$\underline{S} = \underline{S}^T. \quad (9.8)$$

Falls ein Mehrtror keine nichtreziproken Materialien (zum Beispiel vormagnetisierte Ferrite) enthält, ist es gemäß dem Reziprozitätstheorem immer reziprok.

#### 9.1.3.4. Eigenreflexionssymmetrie

Man bezeichnet ein Mehrtror als eigenreflexionssymmetrisch, falls

$$\underline{S}_{m,m} = \underline{S}_{n,n}, \quad m, n = 1 \dots N, \quad (9.9)$$

gilt.

#### 9.1.4. Impedanzmatrix und Admittanzmatrix

Es werden Mehrtror mit Zweileitersystemen an den Toren betrachtet, siehe Abbildung 9.4. Man definiert den Spannungsvektor

$$\underline{U} = \begin{pmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_N \end{pmatrix} = \sqrt{R_B} (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \quad (9.10)$$

und den Stromvektor

$$\underline{I} = \begin{pmatrix} I_1 \\ \vdots \\ I_N \end{pmatrix} = \frac{\mathbf{a} - \mathbf{b}}{\sqrt{R_B}}, \quad (9.11)$$

siehe (7.18) und (7.19).

In der Elektronik hat sich das Verwenden der Impedanzmatrix  $\underline{Z}$  und der Admittanzmatrix  $\underline{Y}$  zum Beschreiben der Zusammenhänge zwischen Spannungsvektor  $\underline{U}$  und Stromvektor  $\underline{I}$  an Mehrtroren etabliert. Es gelten

$$\underline{U} = \underbrace{\begin{pmatrix} Z_{1,1} & \dots & Z_{1,N} \\ \vdots & & \vdots \\ Z_{N,1} & \dots & Z_{N,N} \end{pmatrix}}_{\underline{Z}} \cdot \underline{I} \quad (9.12)$$

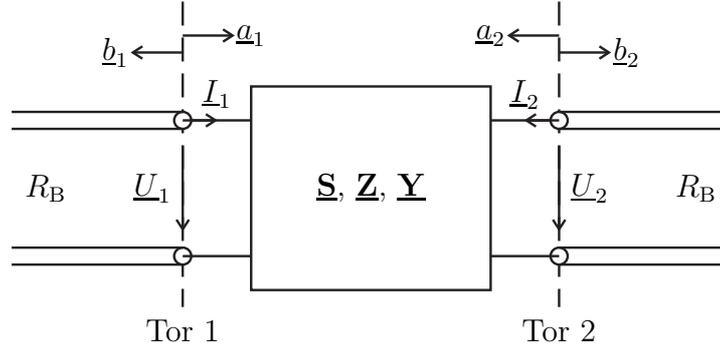


Abbildung 9.4.: Vierpol mit Spannungen und Strömen an den Toren

und

$$\underline{\mathbf{I}} = \underbrace{\begin{pmatrix} Y_{1,1} & \cdots & Y_{1,N} \\ \vdots & & \vdots \\ Y_{N,1} & \cdots & Y_{N,N} \end{pmatrix}}_{\underline{\mathbf{Y}}} \cdot \underline{\mathbf{U}}. \quad (9.13)$$

Es folgt der Zusammenhang

$$\underline{\mathbf{Y}} = \underline{\mathbf{Z}}^{-1} \quad (9.14)$$

zwischen Impedanzmatrix und Admittanzmatrix.

Wenn man den Spannungsvektor  $\underline{\mathbf{U}}$  und den Stromvektor  $\underline{\mathbf{I}}$  durch die komplexen Wellenamplituden  $\underline{\mathbf{a}}$  und  $\underline{\mathbf{b}}$  ausdrückt, erhält man mit der Einheitsmatrix  $\underline{\mathbf{E}}$ :

$$\begin{aligned} \sqrt{R_B} (\underline{\mathbf{a}} + \underline{\mathbf{b}}) &= \underline{\mathbf{Z}} \cdot \frac{\underline{\mathbf{a}} - \underline{\mathbf{b}}}{\sqrt{R_B}}, \\ R_B \underline{\mathbf{E}} \cdot (\underline{\mathbf{a}} + \underline{\mathbf{b}}) &= \underline{\mathbf{Z}} \cdot (\underline{\mathbf{a}} - \underline{\mathbf{b}}), \\ (\underline{\mathbf{Z}} + R_B \underline{\mathbf{E}}) \cdot \underline{\mathbf{b}} &= (\underline{\mathbf{Z}} - R_B \underline{\mathbf{E}}) \cdot \underline{\mathbf{a}}, \\ \underline{\mathbf{b}} &= (\underline{\mathbf{Z}} + R_B \underline{\mathbf{E}})^{-1} \cdot (\underline{\mathbf{Z}} - R_B \underline{\mathbf{E}}) \cdot \underline{\mathbf{a}}. \end{aligned} \quad (9.15)$$

Man erhält die Streumatrix (9.4) als Funktion der Impedanzmatrix zu

$$\underline{\mathbf{S}} = (\underline{\mathbf{Z}} + R_B \underline{\mathbf{E}})^{-1} \cdot (\underline{\mathbf{Z}} - R_B \underline{\mathbf{E}}) \quad (9.16)$$

Auflösen nach der Impedanzmatrix ergibt:

$$\begin{aligned} (\underline{\mathbf{Z}} + R_B \underline{\mathbf{E}}) \cdot \underline{\mathbf{S}} &= (\underline{\mathbf{Z}} - R_B \underline{\mathbf{E}}), \\ \underline{\mathbf{Z}} \cdot (\underline{\mathbf{E}} - \underline{\mathbf{S}}) &= R_B (\underline{\mathbf{E}} + \underline{\mathbf{S}}), \\ \underline{\mathbf{Z}} &= R_B (\underline{\mathbf{E}} + \underline{\mathbf{S}}) \cdot (\underline{\mathbf{E}} - \underline{\mathbf{S}})^{-1}. \end{aligned} \quad (9.17)$$

Da die Admittanzmatrix die Inverse der Impedanzmatrix ist, gilt

$$\underline{\mathbf{Y}} = \underline{\mathbf{Z}}^{-1} = \frac{1}{R_B} (\mathbf{E} - \underline{\mathbf{S}}) \cdot (\mathbf{E} + \underline{\mathbf{S}})^{-1}. \quad (9.18)$$

Auflösen nach der Streumatrix ergibt:

$$\begin{aligned} R_B \underline{\mathbf{Y}} &= (\mathbf{E} - \underline{\mathbf{S}}) \cdot (\mathbf{E} + \underline{\mathbf{S}})^{-1}, \\ R_B \underline{\mathbf{Y}} \cdot (\mathbf{E} + \underline{\mathbf{S}}) &= (\mathbf{E} - \underline{\mathbf{S}}), \\ (\mathbf{E} + R_B \underline{\mathbf{Y}}) \cdot \underline{\mathbf{S}} &= \mathbf{E} - R_B \underline{\mathbf{Y}}, \\ \underline{\mathbf{S}} &= (\mathbf{E} + R_B \underline{\mathbf{Y}})^{-1} \cdot (\mathbf{E} - R_B \underline{\mathbf{Y}}). \end{aligned} \quad (9.19)$$

Ein Mehrtor mit Zweileitersystemen kann konventionell durch Impedanzmatrix  $\underline{\mathbf{Z}}$  und Admittanzmatrix  $\underline{\mathbf{Y}}$  oder äquivalent durch die Streumatrix  $\underline{\mathbf{S}}$  beschrieben werden. Formal kann man jeder Streumatrix  $\underline{\mathbf{S}}$  eine Impedanzmatrix  $\underline{\mathbf{Z}}$  und eine Admittanzmatrix  $\underline{\mathbf{Y}}$  zuordnen, auch wenn dies physikalisch nicht sinnvoll ist, da sich die Streumatrix  $\underline{\mathbf{S}}$  beispielsweise auf ein Mehrtor in Hohlleitertechnik bezog, bei dem keine sinnvollen Definitionen für Spannungen  $\underline{\mathbf{U}}$  und Ströme  $\underline{\mathbf{I}}$  an den Toren existieren.

**Aufgabe 9.1** *Massefreie Netzwerke sind dadurch charakterisiert, dass es keinerlei elektrische Verbindung zwischen Masse und den übrigen Anschlüssen gibt, siehe Abbildung 9.5. Die Summe der in die Tore hineinfließenden Ströme  $\underline{I}_m$ ,  $m = 1 \dots N$  muss daher stets Null sein. Betrachten Sie weiterhin den speziellen Betriebszustand, bei dem die Spannungen  $\underline{U}_n$ ,  $n = 1 \dots N$ , an allen Toren gleich sind. Dann müssen alle Ströme  $\underline{I}_m$ ,  $m = 1 \dots N$ , Null sein. Welche Eigenschaften hat die Admittanzmatrix  $\underline{\mathbf{Y}}$  eines massefreien Mehrtors?*

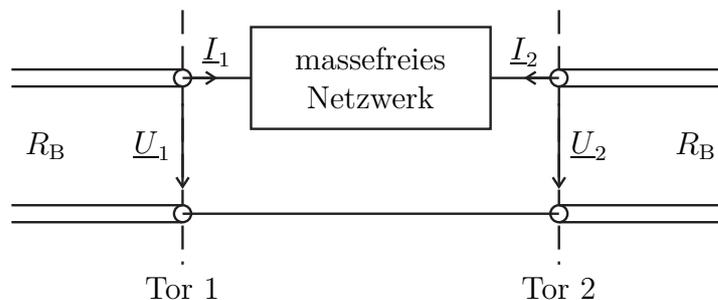


Abbildung 9.5.: Massefreier Vierpol

**Aufgabe 9.2** *Zeigen Sie, dass die Impedanzmatrix  $\underline{\mathbf{Z}}$  und die Admittanzmatrix  $\underline{\mathbf{Y}}$  eines reziproken Mehrtors symmetrisch sind! Welche Eigenschaften haben die Impedanzmatrix  $\underline{\mathbf{Z}}$  und die Admittanzmatrix  $\underline{\mathbf{Y}}$  eines reziproken verlustfreien Mehrtors?*

### 9.1.5. Transmissionsmatrix

Häufig werden Kaskaden von Zweitoren gebildet. Die Aufgabe besteht nun darin, die Eigenschaften des aus einer Kaskade mehrerer Zweitore bestehenden Zweitores zu berechnen. Diese Aufgabe lässt sich mit Hilfe von Transmissionsmatrizen einfach lösen.

Wenn man die komplexen Wellenamplituden  $\underline{a}_1$  und  $\underline{b}_1$  an Tor 1 als die abhängigen Größen wählt, erhält man mit der Transmissionsmatrix  $\underline{\mathbf{T}}$

$$\begin{pmatrix} \underline{a}_1 \\ \underline{b}_1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \underline{T}_{a,b} & \underline{T}_{a,a} \\ \underline{T}_{b,b} & \underline{T}_{b,a} \end{pmatrix}}_{\underline{\mathbf{T}}} \cdot \begin{pmatrix} \underline{b}_2 \\ \underline{a}_2 \end{pmatrix}, \quad (9.20)$$

siehe Abbildung 9.6. Die Elemente der Transmissionsmatrix  $\underline{\mathbf{T}}$  bezeichnet man als Transmissionsparameter.

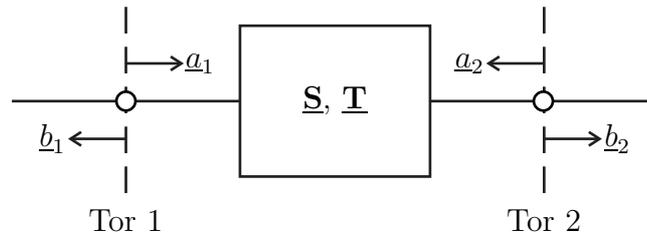


Abbildung 9.6.: Zweitor

Transmissionsmatrizen  $\underline{\mathbf{T}}$  und Streumatrizen  $\underline{\mathbf{S}}$  von Zweitoren lassen sich ineinander umrechnen. Ausgehend von dem Streuparametermodell

$$\begin{aligned} \underline{b}_1 &= \underline{S}_{1,1}\underline{a}_1 + \underline{S}_{1,2}\underline{a}_2, \\ \underline{b}_2 &= \underline{S}_{2,1}\underline{a}_1 + \underline{S}_{2,2}\underline{a}_2, \end{aligned}$$

des Zweitores gemäß (9.4) erhält man durch Auflösen nach  $\underline{a}_1$  und  $\underline{b}_1$ :

$$\begin{aligned} \underline{a}_1 &= \frac{1}{\underline{S}_{2,1}}\underline{b}_2 - \frac{\underline{S}_{2,2}}{\underline{S}_{2,1}}\underline{a}_2, \\ \underline{b}_1 &= \frac{\underline{S}_{1,1}}{\underline{S}_{2,1}}\underline{b}_2 - \frac{\underline{S}_{1,1}\underline{S}_{2,2}}{\underline{S}_{2,1}}\underline{a}_2 + \underline{S}_{1,2}\underline{a}_2. \end{aligned}$$

Hieraus liest man die Transmissionsmatrix

$$\underline{\mathbf{T}} = \begin{pmatrix} \underline{T}_{a,b} & \underline{T}_{a,a} \\ \underline{T}_{b,b} & \underline{T}_{b,a} \end{pmatrix} = \frac{1}{\underline{S}_{2,1}} \begin{pmatrix} 1 & -\underline{S}_{2,2} \\ \underline{S}_{1,1} & -\det(\underline{\mathbf{S}}) \end{pmatrix} \quad (9.21)$$

ab, wobei  $\det(\cdot)$  die Determinante der Matrix ist.<sup>2</sup>

Ausgehend von dem Transmissionsparametermodell

$$\begin{aligned} \underline{a}_1 &= \underline{T}_{a,b} \underline{b}_2 + \underline{T}_{a,a} \underline{a}_2, \\ \underline{b}_1 &= \underline{T}_{b,b} \underline{b}_2 + \underline{T}_{b,a} \underline{a}_2, \end{aligned}$$

des Zweitores erhält man durch Auflösen nach  $\underline{b}_1$  und  $\underline{b}_2$ :

$$\begin{aligned} \underline{b}_2 &= \frac{1}{\underline{T}_{a,b}} \underline{a}_1 - \frac{\underline{T}_{a,a}}{\underline{T}_{a,b}} \underline{a}_2, \\ \underline{b}_1 &= \frac{\underline{T}_{b,b}}{\underline{T}_{a,b}} \underline{a}_1 - \frac{\underline{T}_{b,b} \underline{T}_{a,a}}{\underline{T}_{a,b}} \underline{a}_2 + \underline{T}_{b,a} \underline{a}_2. \end{aligned}$$

Hieraus liest man die Streumatrix

$$\underline{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} \underline{S}_{1,1} & \underline{S}_{1,2} \\ \underline{S}_{2,1} & \underline{S}_{2,2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\underline{T}_{a,b}} \begin{pmatrix} \underline{T}_{b,b} & \det(\underline{\mathbf{T}}) \\ 1 & -\underline{T}_{a,a} \end{pmatrix} \quad (9.22)$$

ab, siehe (9.4).

Die Determinante der Transmissionsmatrix ergibt sich zu

$$\det(\underline{\mathbf{T}}) = \frac{1}{\underline{S}_{2,1}^2} \left( -\det(\underline{\mathbf{S}}) + \underline{S}_{1,1} \underline{S}_{2,2} \right) = \frac{\underline{S}_{1,2}}{\underline{S}_{2,1}}. \quad (9.23)$$

Insbesondere ist die Determinante der Transmissionsmatrix reziproker Zweitore eins, siehe (9.8).

Im Folgenden bezeichnen die tiefgestellten Indizes die Tornummer und die hochgestellten Indizes das Zweitor. Aus Abbildung 9.7 liest man

$$\begin{pmatrix} \underline{a}_1 \\ \underline{b}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{a}_1^{(1)} \\ \underline{b}_1^{(1)} \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{T}}^{(1)} \cdot \begin{pmatrix} \underline{b}_2^{(1)} \\ \underline{a}_2^{(1)} \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{T}}^{(1)} \cdot \begin{pmatrix} \underline{a}_1^{(2)} \\ \underline{b}_1^{(2)} \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{T}}^{(1)} \cdot \underline{\mathbf{T}}^{(2)} \cdot \begin{pmatrix} \underline{b}_2^{(2)} \\ \underline{a}_2^{(2)} \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{T}}^{(1)} \cdot \underline{\mathbf{T}}^{(2)} \cdot \begin{pmatrix} \underline{b}_2 \\ \underline{a}_2 \end{pmatrix}$$

ab. Die Transmissionsmatrix einer Kaskade von Zweitoren ergibt sich daher zu

$$\underline{\mathbf{T}} = \underline{\mathbf{T}}^{(1)} \cdot \underline{\mathbf{T}}^{(2)}. \quad (9.24)$$

Nun wird die Kaskade eines allgemeinen Zweitores mit der Transmissionsmatrix  $\underline{\mathbf{T}}^{(1)}$  und eines reziproken Zweitores mit der Transmissionsmatrix  $\underline{\mathbf{T}}^{(2)}$  betrachtet. Die Determinante der resultierenden Transmissionsmatrix ist

$$\det(\underline{\mathbf{T}}) = \det(\underline{\mathbf{T}}^{(1)} \cdot \underline{\mathbf{T}}^{(2)}) = \det(\underline{\mathbf{T}}^{(1)}) \underbrace{\det(\underline{\mathbf{T}}^{(2)})}_1 = \det(\underline{\mathbf{T}}^{(1)}). \quad (9.25)$$

---

<sup>2</sup>Die Determinante der Matrix  $\underline{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} \underline{S}_{1,1} & \underline{S}_{1,2} \\ \underline{S}_{2,1} & \underline{S}_{2,2} \end{pmatrix}$  ist  $\det(\underline{\mathbf{S}}) = \underline{S}_{1,1} \underline{S}_{2,2} - \underline{S}_{1,2} \underline{S}_{2,1}$ .

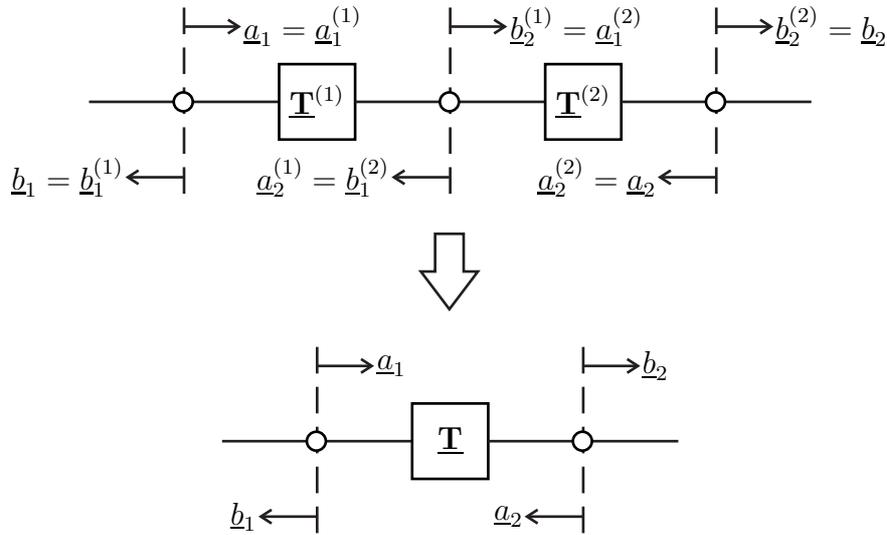


Abbildung 9.7.: Kaskade von Zweitoren

Die Determinante der Transmissionsmatrix von Zweitoren ändert sich beim Anfügen weiterer reziproker Zweitore nicht.

**Aufgabe 9.3** Ein zur hier eingeführten Transmissionsmatrix  $\underline{\mathbf{T}}$  analoges, in der Elektronik verwendetes Modell von Vierpolen ist die Kettenmatrix (im Englischen ABCD-Matrix). Mit den in Abbildung 9.4 eingeführten Zählpfeilen gilt

$$\begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{A} & \underline{B} \\ \underline{C} & \underline{D} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{U}_2 \\ -\underline{I}_2 \end{pmatrix}. \quad (9.26)$$

Üblicherweise wird  $\underline{I}_2$  mit entgegengesetzter Zählpfeilrichtung definiert, so dass hier aus Konsistenzgründen das Minuszeichen vor  $\underline{I}_2$  erforderlich ist. Berechnen Sie die Kettenparameter  $\underline{A}$ ,  $\underline{B}$ ,  $\underline{C}$  und  $\underline{D}$  als Funktionen der Transmissionsparameter und der Streuparameter und umgekehrt die Transmissionsparameter und die Streuparameter als Funktionen der Kettenparameter  $\underline{A}$ ,  $\underline{B}$ ,  $\underline{C}$  und  $\underline{D}$ !

### 9.1.6. Modale Streumatrix

Ein Paar an Toren mit gleichartigen Zweileitersystemen kann man auch als ein symmetrisches Torpaar mit einem symmetrischen massegekoppelten Dreileitersystem ansehen, siehe Abbildung 9.8. Für die Umrechnung der Wellengrößen gilt,

siehe Abschnitt 7.10:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \underline{a}^{(-)} \\ \underline{a}^{(+)} \end{pmatrix} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{U}^T} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \underline{a}_1 \\ \underline{a}_2 \end{pmatrix}}_{\underline{\mathbf{a}}} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} \underline{a}_1 \\ \underline{a}_2 \end{pmatrix}}_{\underline{\mathbf{a}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{U}} \cdot \begin{pmatrix} \underline{a}^{(-)} \\ \underline{a}^{(+)} \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \underline{b}^{(-)} \\ \underline{b}^{(+)} \end{pmatrix} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{U}^T} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \underline{b}_1 \\ \underline{b}_2 \end{pmatrix}}_{\underline{\mathbf{b}}} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} \underline{b}_1 \\ \underline{b}_2 \end{pmatrix}}_{\underline{\mathbf{b}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{U}} \cdot \begin{pmatrix} \underline{b}^{(-)} \\ \underline{b}^{(+)} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die hier auftretende orthogonale Transformationsmatrix  $\mathbf{U}$  entspricht der  $2 \times 2$ -Hadamard-Matrix.

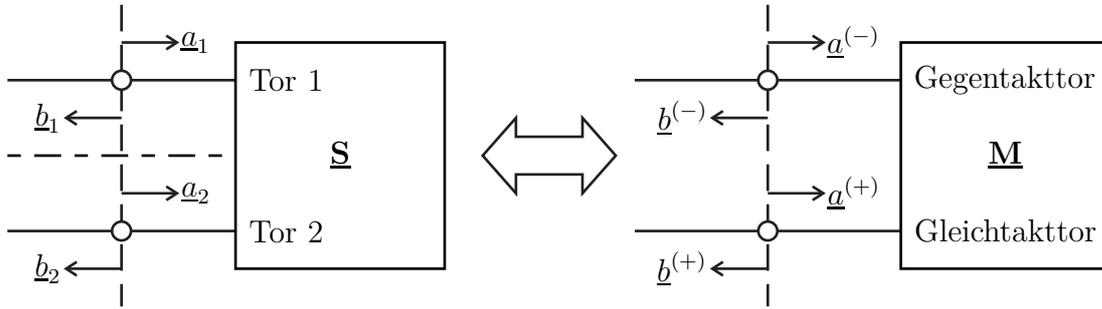


Abbildung 9.8.: Symmetrisches Torpaar

Das Zweitore kann durch seine Streumatrix  $\underline{\mathbf{S}}$  beschrieben werden, siehe (9.4). Durch Einsetzen ergibt sich für die Gegentaktwellen und die Gleichtaktwellen

$$\begin{pmatrix} \underline{b}^{(-)} \\ \underline{b}^{(+)} \end{pmatrix} = \mathbf{U}^T \cdot \underline{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{U} \cdot \begin{pmatrix} \underline{a}^{(-)} \\ \underline{a}^{(+)} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \underline{M}^{(--)} & \underline{M}^{(-+)} \\ \underline{M}^{(+-)} & \underline{M}^{(++)} \end{pmatrix}}_{\underline{\mathbf{M}}} \cdot \begin{pmatrix} \underline{a}^{(-)} \\ \underline{a}^{(+)} \end{pmatrix}.$$

Es folgt die modale Streumatrix

$$\underline{\mathbf{M}} = \mathbf{U}^T \cdot \underline{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{U}. \quad (9.27)$$

Mit (9.4) erhält man die modalen Streuparameter:

$$\underline{M}^{(--)} = \frac{1}{2} (\underline{S}_{1,1} - \underline{S}_{2,1} - \underline{S}_{1,2} + \underline{S}_{2,2}), \quad (9.28)$$

$$\underline{M}^{(-+)} = \frac{1}{2} (\underline{S}_{1,1} - \underline{S}_{2,1} + \underline{S}_{1,2} - \underline{S}_{2,2}), \quad (9.29)$$

$$\underline{M}^{(+-)} = \frac{1}{2} (\underline{S}_{1,1} + \underline{S}_{2,1} - \underline{S}_{1,2} - \underline{S}_{2,2}), \quad (9.30)$$

$$\underline{M}^{(++)} = \frac{1}{2} (\underline{S}_{1,1} + \underline{S}_{2,1} + \underline{S}_{1,2} + \underline{S}_{2,2}). \quad (9.31)$$

Die konventionellen Streuparameter  $\underline{S}_{1,1}$ ,  $\underline{S}_{2,1}$ ,  $\underline{S}_{1,2}$  und  $\underline{S}_{2,2}$  bezeichnet man auch als nodale Streuparameter. Neben den Eigenparametern  $\underline{M}^{(--)}$  und  $\underline{M}^{(++)}$  gibt es die Konversionsparameter  $\underline{M}^{(-+)}$  und  $\underline{M}^{(+-)}$ , welche eine eventuell auftretende Modenkonzersion beschreiben. Eine solche Modenkonzersion kann auftreten, da das betrachtete Zweitor selbst nicht zwingend symmetrisch aufgebaut ist. Nur das angeschlossene Dreileitersystem, bezüglich dessen die Wellengrößen definiert sind, muss symmetrisch sein. Aufgelöst nach den nodalen Streuparametern erhält man:

$$\underline{S}_{1,1} = \frac{1}{2} \left( \underline{M}^{(--)} + \underline{M}^{(-+)} + \underline{M}^{(+-)} + \underline{M}^{(++)} \right), \quad (9.32)$$

$$\underline{S}_{2,1} = \frac{1}{2} \left( -\underline{M}^{(--)} - \underline{M}^{(-+)} + \underline{M}^{(+-)} + \underline{M}^{(++)} \right), \quad (9.33)$$

$$\underline{S}_{1,2} = \frac{1}{2} \left( -\underline{M}^{(--)} + \underline{M}^{(-+)} - \underline{M}^{(+-)} + \underline{M}^{(++)} \right), \quad (9.34)$$

$$\underline{S}_{2,2} = \frac{1}{2} \left( \underline{M}^{(--)} - \underline{M}^{(-+)} - \underline{M}^{(+-)} + \underline{M}^{(++)} \right). \quad (9.35)$$

Die Ergebnisse lassen sich auf Mehr Tore mit einer geraden Anzahl  $2N$  an Toren erweitern. Wenn man jeweils die Tore  $n$  und  $n + N$  zu einem symmetrischen Torpaar zusammenfasst, erhält man mit der  $N \times N$ -Einheitsmatrix  $\mathbf{E}$  und der in vier  $N \times N$ -Blöcke zerlegten nodale Streumatrix  $\underline{\mathbf{S}}$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{b}}^{(-)} \\ \underline{\mathbf{b}}^{(+)} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \underline{b}_1^{(-)} \\ \vdots \\ \underline{b}_N^{(-)} \\ \underline{b}_1^{(+)} \\ \vdots \\ \underline{b}_N^{(+)} \end{pmatrix} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathbf{E} & -\mathbf{E} \\ \mathbf{E} & \mathbf{E} \end{pmatrix}}_{\mathbf{U}^T} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \underline{\mathbf{S}}_{1,1} & \underline{\mathbf{S}}_{1,2} \\ \underline{\mathbf{S}}_{2,1} & \underline{\mathbf{S}}_{2,2} \end{pmatrix}}_{\underline{\mathbf{S}}} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{E} \\ -\mathbf{E} & \mathbf{E} \end{pmatrix}}_{\mathbf{U}} \cdot \begin{pmatrix} \underline{a}_1^{(-)} \\ \vdots \\ \underline{a}_N^{(-)} \\ \underline{a}_1^{(+)} \\ \vdots \\ \underline{a}_N^{(+)} \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{pmatrix} \underline{\mathbf{M}}^{(--)} & \underline{\mathbf{M}}^{(-+)} \\ \underline{\mathbf{M}}^{(+-)} & \underline{\mathbf{M}}^{(++)} \end{pmatrix}}_{\underline{\mathbf{M}}} \cdot \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{a}}^{(-)} \\ \underline{\mathbf{a}}^{(+)} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die Matrix  $\mathbf{U}$  ist eine orthogonale Transformationsmatrix. Es folgt die modale Streumatrix

$$\underline{\mathbf{M}} = \mathbf{U}^T \cdot \underline{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{U}. \quad (9.36)$$

Die Systembeschreibung mit modalen Streuparametern ist eine gleichwertige Beschreibung des Systems bezüglich eines anderen Satzes an Basisvektoren. Für die

modalen Streuparameter gilt:

$$\underline{\mathbf{M}}^{(--)} = \frac{1}{2} (\underline{\mathbf{S}}_{1,1} - \underline{\mathbf{S}}_{2,1} - \underline{\mathbf{S}}_{1,2} + \underline{\mathbf{S}}_{2,2}), \quad (9.37)$$

$$\underline{\mathbf{M}}^{(-+)} = \frac{1}{2} (\underline{\mathbf{S}}_{1,1} - \underline{\mathbf{S}}_{2,1} + \underline{\mathbf{S}}_{1,2} - \underline{\mathbf{S}}_{2,2}), \quad (9.38)$$

$$\underline{\mathbf{M}}^{(+-)} = \frac{1}{2} (\underline{\mathbf{S}}_{1,1} + \underline{\mathbf{S}}_{2,1} - \underline{\mathbf{S}}_{1,2} - \underline{\mathbf{S}}_{2,2}), \quad (9.39)$$

$$\underline{\mathbf{M}}^{(++)} = \frac{1}{2} (\underline{\mathbf{S}}_{1,1} + \underline{\mathbf{S}}_{2,1} + \underline{\mathbf{S}}_{1,2} + \underline{\mathbf{S}}_{2,2}). \quad (9.40)$$

Aufgelöst nach den nodalen Streuparametern erhält man:

$$\underline{\mathbf{S}}_{1,1} = \frac{1}{2} (\underline{\mathbf{M}}^{(--)} + \underline{\mathbf{M}}^{(-+)} + \underline{\mathbf{M}}^{(+-)} + \underline{\mathbf{M}}^{(++)}), \quad (9.41)$$

$$\underline{\mathbf{S}}_{2,1} = \frac{1}{2} (-\underline{\mathbf{M}}^{(--)} - \underline{\mathbf{M}}^{(-+)} + \underline{\mathbf{M}}^{(+-)} + \underline{\mathbf{M}}^{(++)}), \quad (9.42)$$

$$\underline{\mathbf{S}}_{1,2} = \frac{1}{2} (-\underline{\mathbf{M}}^{(--)} + \underline{\mathbf{M}}^{(-+)} - \underline{\mathbf{M}}^{(+-)} + \underline{\mathbf{M}}^{(++)}), \quad (9.43)$$

$$\underline{\mathbf{S}}_{2,2} = \frac{1}{2} (\underline{\mathbf{M}}^{(--)} - \underline{\mathbf{M}}^{(-+)} - \underline{\mathbf{M}}^{(+-)} + \underline{\mathbf{M}}^{(++)}). \quad (9.44)$$

**Aufgabe 9.4** Welche Eigenschaft hat die modale Streumatrix  $\underline{\mathbf{M}}$  eines passiven Mehrtors? Welche Eigenschaft hat die modale Streumatrix  $\underline{\mathbf{M}}$  eines reziproken Mehrtors?

## 9.2. Mehrtere mit Quellen

### 9.2.1. Wellenquellen

Es wird ein lineares Mehrter betrachtet, das in seinem Inneren eine beliebige Anzahl an Quellen enthält. Der Antwort  $\underline{\mathbf{S}} \cdot \underline{\mathbf{a}}$  auf die zulaufenden Wellen mit den komplexen Wellenamplituden  $\underline{\mathbf{a}}$  sind dann noch die durch die Quellen verursachten Urwellen mit den komplexen Wellenamplituden

$$\underline{\mathbf{b}}_Q = \begin{pmatrix} \underline{b}_{Q1} \\ \vdots \\ \underline{b}_{QN} \end{pmatrix} \quad (9.45)$$

gemäß

$$\underline{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} \underline{b}_1 \\ \vdots \\ \underline{b}_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{S}_{1,1} & \cdots & \underline{S}_{1,N} \\ \vdots & & \vdots \\ \underline{S}_{N,1} & \cdots & \underline{S}_{N,N} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{a}_1 \\ \vdots \\ \underline{a}_N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \underline{b}_{Q1} \\ \vdots \\ \underline{b}_{QN} \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{S}} \cdot \underline{\mathbf{a}} + \underline{\mathbf{b}}_Q \quad (9.46)$$

zu überlagern, vergleiche (9.4). Unabhängig von der Anzahl der physikalischen Quellen im Inneren des Mehrtors ist im Modell im Allgemeinen an jedem Tor  $n$  genau eine Urwelle mit der komplexen Wellenamplitude  $\underline{b}_{Qn}$  zu berücksichtigen. Für ein quellenhaltiges Zweitor erhält man beispielsweise den in Abbildung 9.9 dargestellten Signalfussgraphen.

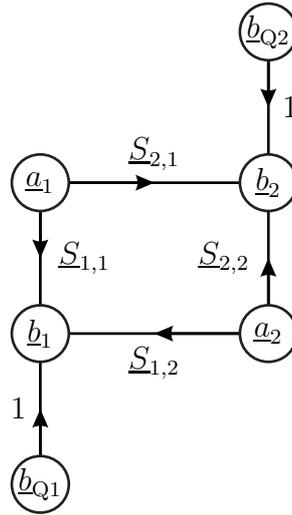


Abbildung 9.9.: Modell eines Zweitors mit Quellen

### 9.2.2. Spannungsquellen

Das Berücksichtigen von Quellen durch Spannungsquellen an den Toren gemäß

$$\underline{\mathbf{U}} = \underline{\mathbf{Z}} \cdot \underline{\mathbf{I}} + \underline{\mathbf{U}}_Q \quad (9.47)$$

ist eine natürliche Erweiterung des Impedanzmatrixmodells (9.12) von Mehrteren, siehe Abbildung 9.10.

Es wird ein spezieller Betriebszustand mit  $\underline{\mathbf{a}} = \mathbf{0}$  betrachtet. Dann ist  $\underline{\mathbf{b}} = \underline{\mathbf{b}}_Q$  und es folgt mit (7.18) und (7.19) unter Verwenden der Einheitsmatrix  $\mathbf{E}$ :

$$\underbrace{\underline{\mathbf{b}}_Q \sqrt{R_B}}_{\underline{\mathbf{U}}} = \underline{\mathbf{Z}} \cdot \underbrace{\frac{-\underline{\mathbf{b}}_Q}{\sqrt{R_B}}}_{\underline{\mathbf{I}}} + \underline{\mathbf{U}}_Q,$$

$$\underline{\mathbf{U}}_Q = \frac{\underline{\mathbf{Z}} + R_B \mathbf{E}}{\sqrt{R_B}} \cdot \underline{\mathbf{b}}_Q, \quad (9.48)$$

$$\underline{\mathbf{b}}_Q = (\underline{\mathbf{Z}} + R_B \mathbf{E})^{-1} \cdot \sqrt{R_B} \underline{\mathbf{U}}_Q. \quad (9.49)$$

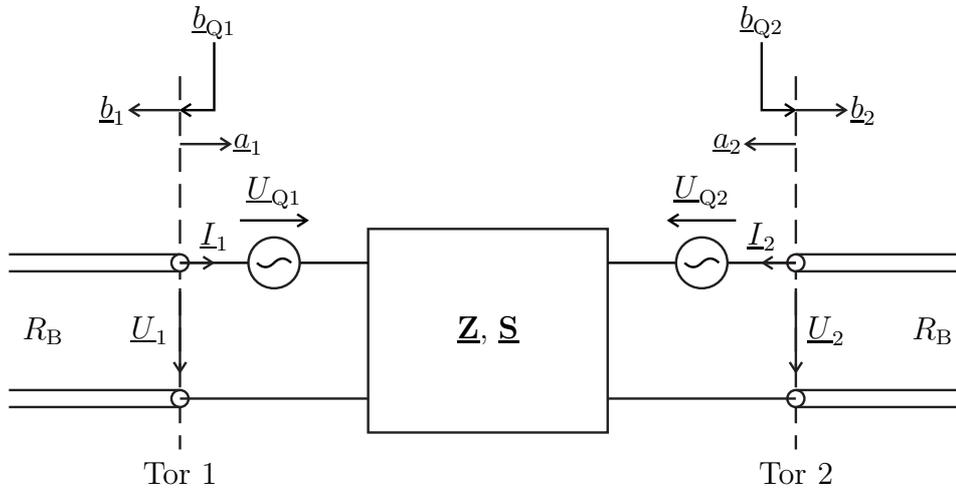


Abbildung 9.10.: Vierpol mit durch Spannungsquellen an den Toren modellierten Quellen

Im Betriebszustand  $\underline{\mathbf{I}} = \mathbf{0}$  ist  $\underline{\mathbf{U}} = \underline{\mathbf{U}}_Q$  und man erhält mit (7.20) und (7.21):

$$\underbrace{\frac{\underline{\mathbf{U}}_Q}{2\sqrt{R_B}}}_{\underline{\mathbf{b}}} = \underline{\mathbf{S}} \cdot \underbrace{\frac{\underline{\mathbf{U}}_Q}{2\sqrt{R_B}}}_{\underline{\mathbf{a}}} + \underline{\mathbf{b}}_Q,$$

$$\underline{\mathbf{b}}_Q = \frac{1}{2\sqrt{R_B}} (\underline{\mathbf{E}} - \underline{\mathbf{S}}) \cdot \underline{\mathbf{U}}_Q, \quad (9.50)$$

$$\underline{\mathbf{U}}_Q = 2\sqrt{R_B} (\underline{\mathbf{E}} - \underline{\mathbf{S}})^{-1} \cdot \underline{\mathbf{b}}_Q. \quad (9.51)$$

### 9.2.3. Stromquellen

Das Berücksichtigen von Quellen durch Stromquellen an den Toren gemäß

$$\underline{\mathbf{I}} = \underline{\mathbf{Y}} \cdot \underline{\mathbf{U}} - \underline{\mathbf{I}}_Q \quad (9.52)$$

ist eine natürliche Erweiterung des Admittanzmatrixmodells (9.13) von Mehrteren, siehe Abbildung 9.11.

Es wird ein spezieller Betriebszustand mit  $\underline{\mathbf{a}} = \mathbf{0}$  betrachtet. Dann ist  $\underline{\mathbf{b}} = \underline{\mathbf{b}}_Q$

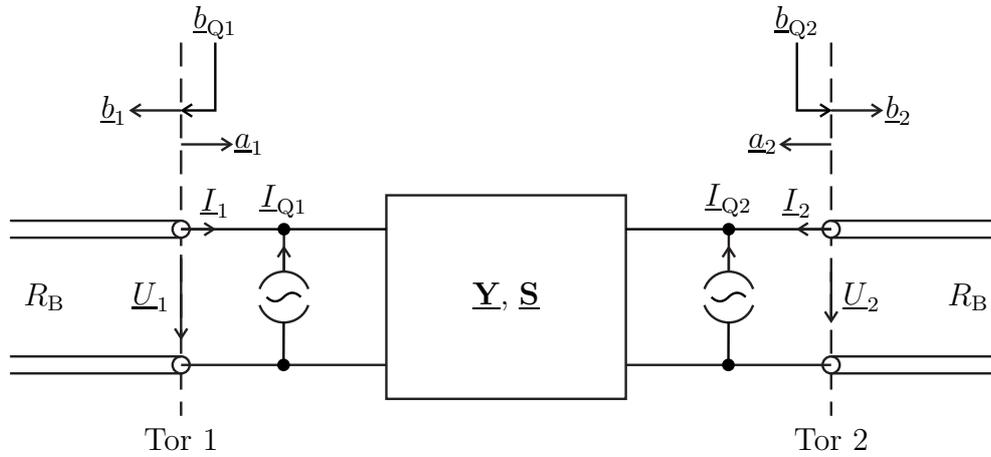


Abbildung 9.11.: Vierpol mit durch Stromquellen an den Toren modellierten Quellen

und es folgt mit (7.18) und (7.19):

$$\underbrace{\frac{-\mathbf{b}_Q}{\sqrt{R_B}}}_{\mathbf{I}} = \mathbf{Y} \cdot \underbrace{\mathbf{b}_Q \sqrt{R_B}}_{\mathbf{U}} - \mathbf{I}_Q,$$

$$\mathbf{I}_Q = \frac{R_B \mathbf{Y} + \mathbf{E}}{\sqrt{R_B}} \cdot \mathbf{b}_Q, \quad (9.53)$$

$$\mathbf{b}_Q = (R_B \mathbf{Y} + \mathbf{E})^{-1} \cdot \sqrt{R_B} \mathbf{I}_Q. \quad (9.54)$$

Im Betriebszustand  $\mathbf{U} = \mathbf{0}$  ist  $\mathbf{I} = -\mathbf{I}_Q$  und man erhält mit (7.20) und (7.21):

$$\underbrace{\frac{\sqrt{R_B}}{2} \mathbf{I}_Q}_{\mathbf{b}} = \mathbf{S} \cdot \underbrace{\frac{-\sqrt{R_B}}{2} \mathbf{I}_Q}_{\mathbf{a}} + \mathbf{b}_Q,$$

$$\mathbf{b}_Q = \frac{\sqrt{R_B}}{2} (\mathbf{E} + \mathbf{S}) \cdot \mathbf{I}_Q, \quad (9.55)$$

$$\mathbf{I}_Q = \frac{2}{\sqrt{R_B}} (\mathbf{E} + \mathbf{S})^{-1} \cdot \mathbf{b}_Q. \quad (9.56)$$

### 9.3. Analyse komplexer Netzwerke mit Quellen

Es werden aus  $K$  Mehrtoren mit Quellen zusammengesetzte Netzwerke betrachtet. Abbildung 9.12 zeigt ein Beispiel. Das  $k$ -te Mehrtor habe  $N^{(k)}$  Tore und sein

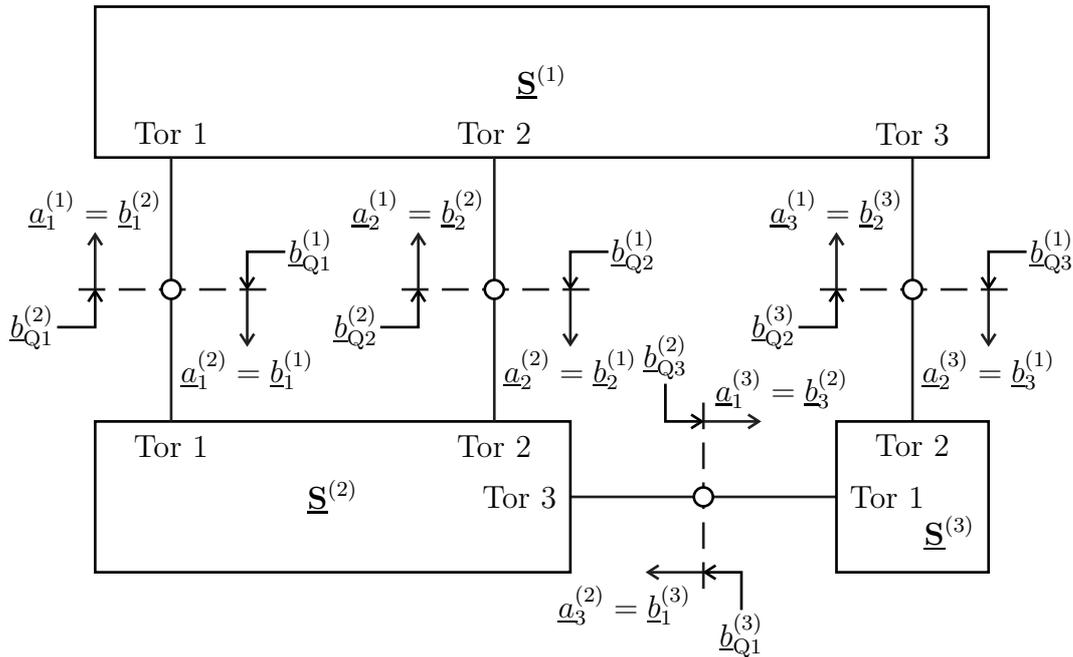


Abbildung 9.12.: Komplexes Netzwerk mit Quellen

Verhalten werde durch die Streumatrix  $\underline{\mathbf{S}}^{(k)}$  und die komplexen Wellenamplituden  $\underline{\mathbf{b}}_Q^{(k)}$  der Urwellen beschrieben.

Für die folgenden Betrachtungen ist es sinnvoll, dass Streumatrixmodell (9.46) eines Mehrtors mit Quellen unter Verwenden der Einheitsmatrix  $\mathbf{E}$  gemäß

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E} & -\underline{\mathbf{S}}^{(k)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{b}}^{(k)} \\ \underline{\mathbf{a}}^{(k)} \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{b}}_Q^{(k)}$$

umzuformulieren. Der Betriebszustand an den  $N^{(k)}$  Toren wird durch die  $2N^{(k)}$  in den Vektoren  $\underline{\mathbf{a}}^{(k)}$  und  $\underline{\mathbf{b}}^{(k)}$  zusammengefassten komplexen Wellenamplituden beschrieben. Das Mehrtor erzwingt das Einhalten von  $N^{(k)}$  inhomogenen linearen Gleichungen, so dass nur noch  $N^{(k)}$  Freiheitsgrade verbleiben. Mehrtore ohne Quellen sind als Spezialfall mit enthalten. Hier ist der Vektor  $\underline{\mathbf{b}}_Q^{(k)}$  der komplexen Wellenamplituden der Urwellen gleich dem Nullvektor und es resultieren  $N^{(k)}$  homogene Gleichungen.

In dem Netzwerk gibt es insgesamt

$$N = \sum_{k=1}^K N^{(k)}$$

Tore. Man definiert den  $N$ -dimensionalen Vektor

$$\underline{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{a}}^{(1)} \\ \vdots \\ \underline{\mathbf{a}}^{(K)} \end{pmatrix} \quad (9.57)$$

der komplexen Wellenamplituden aller zulaufenden Wellen und den  $N$ -dimensionalen Vektor

$$\underline{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{b}}^{(1)} \\ \vdots \\ \underline{\mathbf{b}}^{(K)} \end{pmatrix} \quad (9.58)$$

der komplexen Wellenamplituden aller ablaufenden Wellen. Weiterhin definiert man den  $N$ -dimensionalen Vektor

$$\underline{\mathbf{b}}_Q = \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{b}}_Q^{(1)} \\ \vdots \\ \underline{\mathbf{b}}_Q^{(K)} \end{pmatrix} \quad (9.59)$$

der komplexen Wellenamplituden aller Urwellen.

Jedes Tor sei mit genau einem anderen Tor verbunden. Dann entspricht jede komplexe Wellenamplitude  $[\underline{\mathbf{a}}]_n$  einer zulaufenden Welle genau einer komplexen Wellenamplitude  $[\underline{\mathbf{b}}]_m$  einer ablaufenden Welle und umgekehrt. Die Topologie des Netzwerks kann durch eine  $N \times N$  Topologiematrix  $\mathbf{K}$  mit den Elementen

$$[\mathbf{K}]_{m,n} = \begin{cases} 1 & \text{falls } [\underline{\mathbf{b}}]_m = [\underline{\mathbf{a}}]_n, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \quad m, n = 1 \dots N, \quad (9.60)$$

beschrieben werden.  $[\cdot]_{m,n}$  bezeichnet hierbei das Element in der  $m$ -ten Zeile und  $n$ -ten Spalte der Matrix und  $[\cdot]_n$  bezeichnet das  $n$ -te Element des Vektors. Es gilt

$$\underline{\mathbf{b}} = \mathbf{K} \cdot \underline{\mathbf{a}}. \quad (9.61)$$

Die Topologiematrix  $\mathbf{K}$  ist eine Permutationsmatrix. Da Permutationsmatrizen stets orthogonal sind, gilt

$$\mathbf{K}^T \cdot \mathbf{K} = \mathbf{E}. \quad (9.62)$$

Beim Verbinden zweier Tore sind immer zwei Paare von komplexen Wellenamplituden gleichzusetzen, das heißt aus

$$[\underline{\mathbf{b}}]_m = [\underline{\mathbf{a}}]_n$$

folgt auch

$$[\underline{\mathbf{a}}]_m = [\underline{\mathbf{b}}]_n.$$

Die Topologiematrix ist folglich symmetrisch:

$$\mathbf{K}^T = \mathbf{K}. \quad (9.63)$$

Weiterhin folgt mit der Orthogonalität der Topologiematrix, dass die Topologiematrix selbstinvers ist:

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{K} = \mathbf{E}. \quad (9.64)$$

Zusammengefasst erhält man mit

$$\underline{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{S}}^{(1)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \underline{\mathbf{S}}^{(K)} \end{pmatrix} \quad (9.65)$$

folgendes aus  $2N$  Gleichungen bestehendes, das Netzwerk beschreibendes, inhomogenes lineares Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E} & -\underline{\mathbf{S}} \\ \mathbf{E} & -\mathbf{K} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{b}} \\ \underline{\mathbf{a}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{b}}_Q \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}. \quad (9.66)$$

Dieses Gleichungssystem ist die Grundlage von Programmen zur Simulation von Schaltungen [Hor85; MT74].

Es gibt insgesamt  $2N$  zu bestimmende komplexe Wellenamplituden in den Vektoren  $\underline{\mathbf{a}}$  und  $\underline{\mathbf{b}}$ , das heißt es gibt genau so viele Gleichungen wie Unbekannte. Das lineare Gleichungssystem (9.66) hat daher die Lösung<sup>3</sup>

$$\begin{pmatrix} \underline{\mathbf{b}} \\ \underline{\mathbf{a}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{E} & -\underline{\mathbf{S}} \\ \mathbf{E} & -\mathbf{K} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{b}}_Q \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Die spezielle Struktur der Matrix ausnutzend, erhält man

$$\underline{\mathbf{a}} = (\mathbf{K} - \underline{\mathbf{S}})^{-1} \cdot \underline{\mathbf{b}}_Q \quad (9.67)$$

und

$$\underline{\mathbf{b}} = \mathbf{K} \cdot (\mathbf{K} - \underline{\mathbf{S}})^{-1} \cdot \underline{\mathbf{b}}_Q = (\mathbf{E} - \underline{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{K})^{-1} \cdot \underline{\mathbf{b}}_Q, \quad (9.68)$$

was man durch Einsetzen leicht überprüft.

---

<sup>3</sup>Beispielsweise in verlustfreien Schaltungen wie idealen Schwingkreisen kann es auch unendlich viele Lösungen geben, da das quellenfreie Netzwerk, das heißt das homogene Gleichungssystem nicht nur die triviale Lösung hat.



# Kapitel 10.

## Komponenten

### 10.1. Eintore

#### 10.1.1. Quellenfreies Eintor

Der einzige Streuparameter des Eintors aus Abbildung 10.1 entspricht dem bekannten Reflexionsfaktor

$$\underline{S}_{1,1} = \frac{\underline{Z} - R_B}{\underline{Z} + R_B}, \quad (10.1)$$

siehe (7.24).

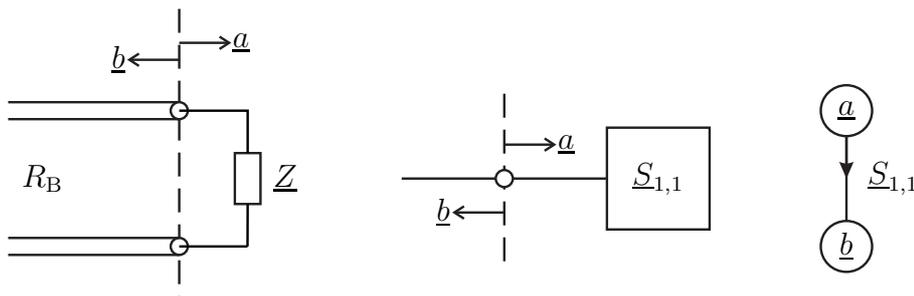


Abbildung 10.1.: Eintor

#### 10.1.2. Eintorquelle

Der Reflexionsfaktor der Eintorquelle aus Abbildung 10.2 ist

$$\underline{S}_{1,1} = \frac{\underline{Z}_Q - R_B}{\underline{Z}_Q + R_B} = \frac{1 - R_B \underline{Y}_Q}{1 + R_B \underline{Y}_Q}, \quad (10.2)$$

siehe (7.24). Mit (9.49) und (9.49) ergibt sich die komplexe Wellenamplitude der Urwelle zu

$$\underline{b}_Q = \frac{\sqrt{R_B} \underline{U}_Q}{\underline{Z}_Q + R_B} = \frac{\sqrt{R_B} \underline{I}_Q}{1 + R_B \underline{Y}_Q}. \quad (10.3)$$

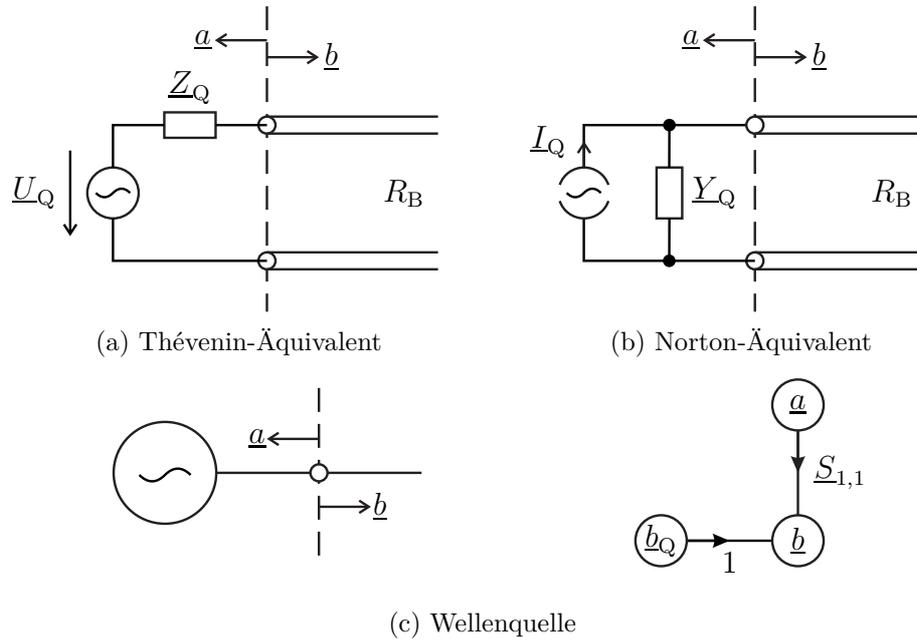


Abbildung 10.2.: Eintorquelle

## 10.2. Zweitore

### 10.2.1. Symmetrisch aufgebaute Zweitore

Aufgrund des symmetrischen Aufbaus des Zweitores muss für die nodalen Streuparameter

$$\underline{S}_{1,1} = \underline{S}_{2,2} \quad (10.4)$$

und

$$\underline{S}_{1,2} = \underline{S}_{2,1} \quad (10.5)$$

gelten, siehe Abbildung 10.3. Insbesondere sind symmetrisch aufgebaute Zweitore immer reziprok und eigenreflexionssymmetrisch, siehe (9.8) und (9.9).

Interessante weitere Eigenschaften erkennt man, wenn man die beiden Tore als ein einziges symmetrisches Torpaar auffasst und die modalen Streuparameter betrachtet. Aus (9.28) bis (9.31) erhält man:

$$\underline{M}^{(--)} = \underline{S}_{1,1} - \underline{S}_{1,2}, \quad (10.6)$$

$$\underline{M}^{(-+)} = 0, \quad (10.7)$$

$$\underline{M}^{(+-)} = 0, \quad (10.8)$$

$$\underline{M}^{(++)} = \underline{S}_{1,1} + \underline{S}_{1,2}. \quad (10.9)$$

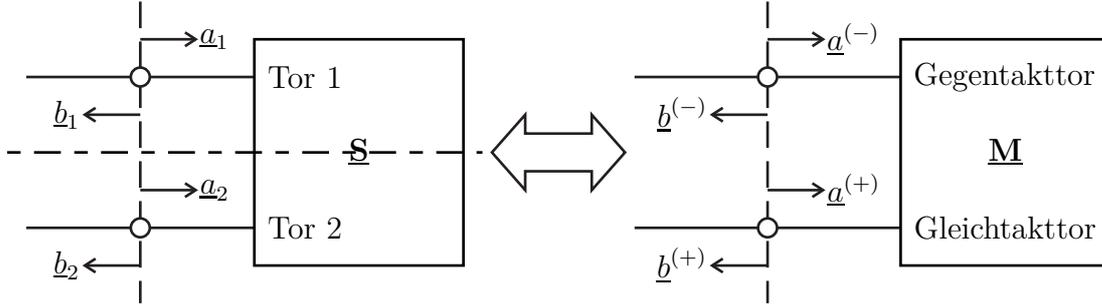


Abbildung 10.3.: Symmetrisch aufgebautes Zweitor

Insbesondere tritt in symmetrisch aufgebauten Zweitoren niemals Modenkonversion auf, das heißt der Gegentakmode und der Gleichtakmode sind Eigenmoden des symmetrisch aufgebauten Zweitores. Mit der für den Gegentakmode sichtbaren Impedanz  $\underline{Z}^{(-)}$  gilt

$$\underline{M}^{(--)} = \frac{\underline{Z}^{(-)} - R_B}{\underline{Z}^{(-)} + R_B}$$

und mit der für den Gleichtakmode sichtbaren Impedanz  $\underline{Z}^{(+)}$  gilt

$$\underline{M}^{(++)} = \frac{\underline{Z}^{(+)} - R_B}{\underline{Z}^{(+)} + R_B},$$

siehe (7.51), (7.54) und (3.72).

Speziell für symmetrisch aufgebaute, eigenreflexionsfreie Zweitore mit  $\underline{S}_{1,1} = \underline{S}_{2,2} = 0$  gilt

$$\underline{S}_{1,2} = -\underline{M}^{(--)} = \underline{M}^{(++)},$$

siehe (9.5). Daraus folgt

$$\underline{Z}^{(-)} = R_B \frac{1 - \underline{S}_{1,2}}{1 + \underline{S}_{1,2}}, \quad (10.10)$$

$$\underline{Z}^{(+)} = R_B \frac{1 + \underline{S}_{1,2}}{1 - \underline{S}_{1,2}} \quad (10.11)$$

und schließlich

$$\sqrt{\underline{Z}^{(-)} \underline{Z}^{(+)}} = R_B. \quad (10.12)$$

Wenn man zusätzlich auch noch Verlustfreiheit fordert, müssen die Streumatrizen  $\underline{S}$  und  $\underline{M}$  gemäß (9.7) und Aufgabe 9.4 unitär sein. Daraus folgt

$$|\underline{M}^{(--)}| = |\underline{M}^{(++)}| = |\underline{S}_{1,2}| = 1. \quad (10.13)$$

Symmetrisch aufgebaute, eigenreflexionsfreie und verlustfreie Zweitore sind Phasenschieber.

### 10.2.2. Serienimpedanz

Aus Abbildung 10.4 liest man die Admittanzmatrix

$$\underline{\mathbf{Y}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\underline{Z}} & -\frac{1}{\underline{Z}} \\ -\frac{1}{\underline{Z}} & \frac{1}{\underline{Z}} \end{pmatrix}$$

der Serienimpedanz  $\underline{Z}$  ab. Mit (9.19) erhält man hieraus die Streumatrix

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{S}} &= \begin{pmatrix} 1 + \frac{R_B}{\underline{Z}} & -\frac{R_B}{\underline{Z}} \\ -\frac{R_B}{\underline{Z}} & 1 + \frac{R_B}{\underline{Z}} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 - \frac{R_B}{\underline{Z}} & \frac{R_B}{\underline{Z}} \\ \frac{R_B}{\underline{Z}} & 1 - \frac{R_B}{\underline{Z}} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{1 + 2\frac{R_B}{\underline{Z}}} \begin{pmatrix} 1 + \frac{R_B}{\underline{Z}} & \frac{R_B}{\underline{Z}} \\ \frac{R_B}{\underline{Z}} & 1 + \frac{R_B}{\underline{Z}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 - \frac{R_B}{\underline{Z}} & \frac{R_B}{\underline{Z}} \\ \frac{R_B}{\underline{Z}} & 1 - \frac{R_B}{\underline{Z}} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\underline{Z} + 2R_B} \begin{pmatrix} \underline{Z} & 2R_B \\ 2R_B & \underline{Z} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (10.14)$$

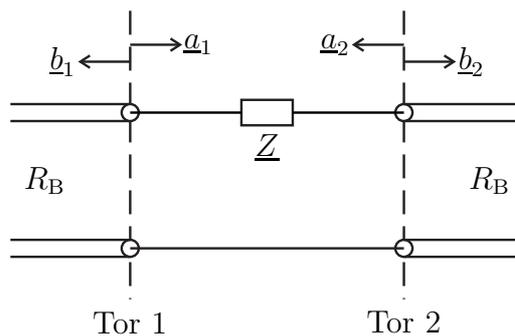


Abbildung 10.4.: Serienimpedanz  $\underline{Z}$

### 10.2.3. Paralleladmittanz

Aus Abbildung 10.5 liest man die Impedanzmatrix

$$\underline{\mathbf{Z}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\underline{Y}} & \frac{1}{\underline{Y}} \\ \frac{1}{\underline{Y}} & \frac{1}{\underline{Y}} \end{pmatrix}$$

der Paralleladmittanz  $\underline{Y}$  ab. Mit (9.16) erhält man hieraus die Streumatrix

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{S}} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\underline{Y}} + R_B & \frac{1}{\underline{Y}} \\ \frac{1}{\underline{Y}} & \frac{1}{\underline{Y}} + R_B \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\underline{Y}} - R_B & \frac{1}{\underline{Y}} \\ \frac{1}{\underline{Y}} & \frac{1}{\underline{Y}} - R_B \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2\frac{R_B}{\underline{Y}} + R_B^2} \begin{pmatrix} \frac{1}{\underline{Y}} + R_B & -\frac{1}{\underline{Y}} \\ -\frac{1}{\underline{Y}} & \frac{1}{\underline{Y}} + R_B \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\underline{Y}} - R_B & \frac{1}{\underline{Y}} \\ \frac{1}{\underline{Y}} & \frac{1}{\underline{Y}} - R_B \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2 + \underline{Y}R_B} \begin{pmatrix} -\underline{Y}R_B & 2 \\ 2 & -\underline{Y}R_B \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (10.15)$$

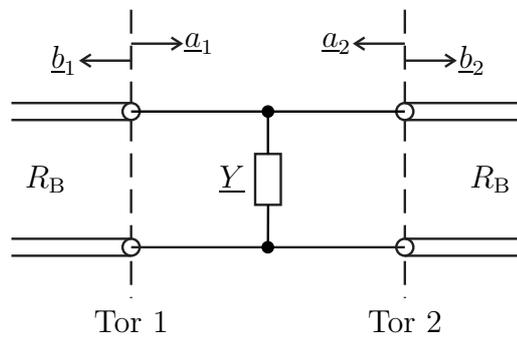


Abbildung 10.5.: Paralleladmittanz  $\underline{Y}$

**Aufgabe 10.1** Der in Abbildung 10.6 gezeigte RC-Tiefpass kann als Kaskade eines Serienwiderstands  $R$  und einer Parallelkapazität  $C$  aufgefasst werden. Berechnen Sie die Übertragungsfunktion, das heißt den Streuparameter  $\underline{S}_{2,1}$  des RC-Tiefpasses, abhängig von Kreisfrequenz  $\omega$ , Widerstand  $R$ , Kapazität  $C$  und Bezugswiderstand  $R_B$ !

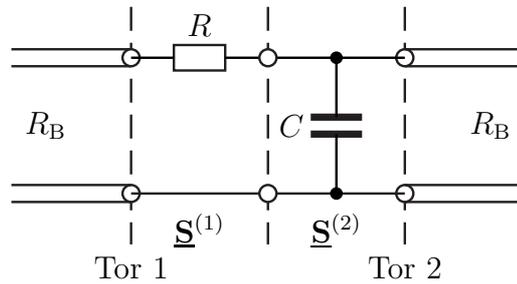


Abbildung 10.6.: RC-Tiefpass

### 10.2.4. Dämpfungsglied

Die in Abbildung 10.7 gezeigte überbrückte T-Schaltung eines Dämpfungsglieds ist symmetrisch aufgebaut.

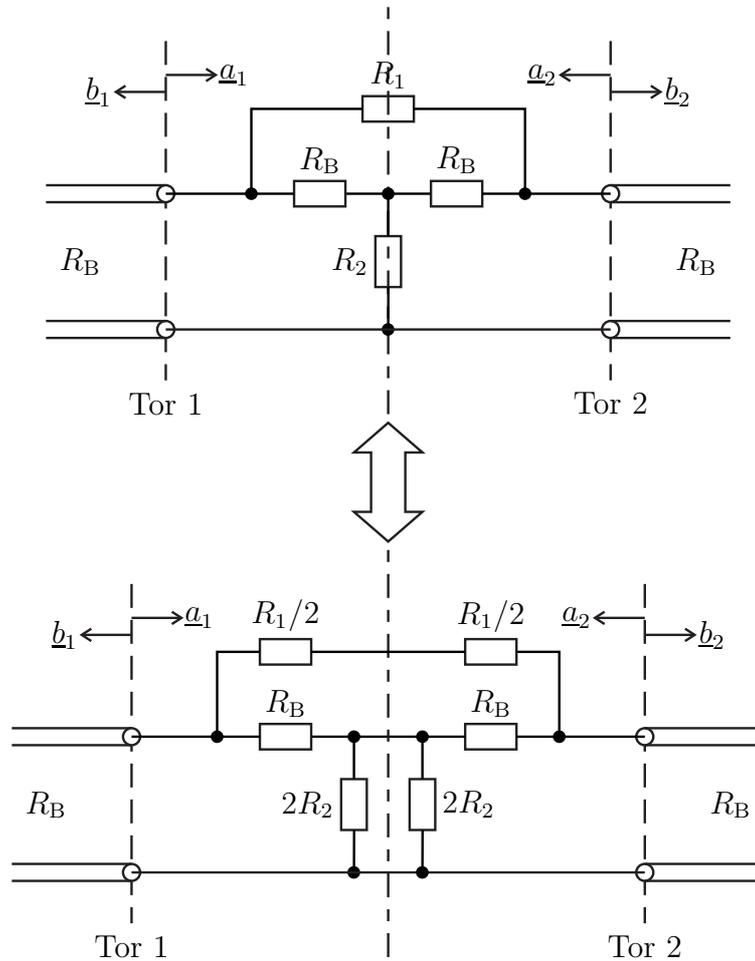


Abbildung 10.7.: Dämpfungsglied

Die für den Gegentaktmode sichtbare Impedanz ist

$$\underline{Z}^{(-)} = \frac{R_1 R_B}{R_1 + 2R_B}.$$

Hieraus folgt mit (7.51) und (3.72)

$$\underline{M}^{(--)} = -\frac{R_B}{R_1 + R_B}.$$

Die für den Gleichtaktmode sichtbare Impedanz ist

$$\underline{Z}^{(+)} = 2R_2 + R_B.$$

Hieraus folgt mit (7.54) und (3.72)

$$\underline{M}^{(++)} = \frac{R_2}{R_2 + R_B}.$$

Das Dämpfungsglied soll eigenreflexionsfrei sein, siehe (9.5). Mit (10.6) und (10.9) folgt

$$\begin{aligned} 0 = \underline{S}_{1,1} = \underline{S}_{2,2} &= \frac{\underline{M}^{(--)} + \underline{M}^{(++)}}{2} \\ &= \frac{R_1 R_2 - R_B^2}{2(R_1 + R_B)(R_2 + R_B)}, \\ R_B^2 &= R_1 R_2. \end{aligned}$$

Mit dem Parameter  $\sqrt{G}$  schreibt man ohne Beschränkung der Allgemeinheit:

$$R_1 = R_B (\sqrt{G} - 1), \quad (10.16)$$

$$R_2 = \frac{R_B}{\sqrt{G} - 1}. \quad (10.17)$$

Mit (10.6) und (10.9) erhält man schließlich

$$\begin{aligned} \underline{S}_{1,2} = \underline{S}_{2,1} &= \frac{\underline{M}^{(++)} - \underline{M}^{(--)}}{2} \\ &= \frac{R_2 + R_B}{R_1 + R_2 + 2R_B} \\ &= \frac{\frac{1}{\sqrt{G}-1} + 1}{\frac{1}{\sqrt{G}-1} + \sqrt{G} - 1 + 2} = \frac{1}{\sqrt{G}}. \end{aligned} \quad (10.18)$$

Das Dämpfungsglied hat den Gewinn  $G$ .

**Aufgabe 10.2** Berechnen Sie die Streumatrix der in Abbildung 10.8 gezeigten symmetrischen Kreuzschaltung mit dualen Zweigimpedanzen!<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Die Kreuzschaltung ist das Analogon zum Wave Digital Lattice Filter [Fet86].

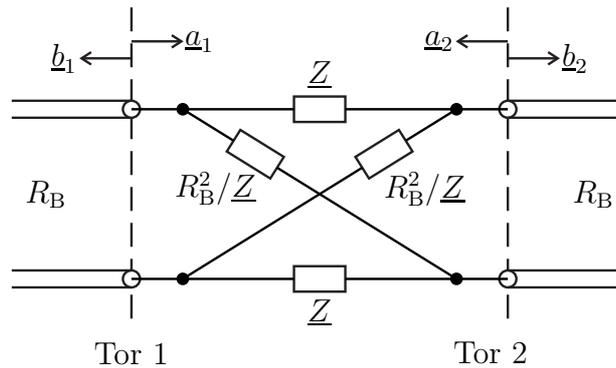


Abbildung 10.8.: Symmetrische Kreuzschaltung mit dualen Zweigimpedanzen

### 10.2.5. Leitungsstück

Zunächst wird der Sonderfall, dass der Wellenwiderstand  $Z_L$  des Leitungsstücks dem Bezugswiderstand  $R_B$  entspricht, betrachtet. Bei reflexionsfreiem Abschluss von Tor 2 mit dem Bezugswiderstand  $R_B$ , siehe (7.23), ist der an Tor 1 sichtbare Reflexionsfaktor (7.9) gemäß (9.4) gleich dem Eigenreflexionsfaktor

$$\underline{S}_{1,1} = 0.$$

Weiterhin gilt wegen (7.5) in diesem Betriebszustand

$$\underline{b}_2 = e^{-j\beta l} \underline{a}_1.$$

Mit (9.4) folgt

$$\underline{S}_{2,1} = \frac{\underline{b}_2}{\underline{a}_1} = e^{-j\beta l}.$$

Aufgrund des symmetrischen Aufbaus des Zweitores ergibt sich mit (10.4) und (10.5) die Streumatrix

$$\underline{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} 0 & e^{-j\beta l} \\ e^{-j\beta l} & 0 \end{pmatrix}. \quad (10.19)$$

Wie man leicht überprüft, ist die Streumatrix  $\underline{\mathbf{S}}$  unitär und das Leitungsstück somit wie erwartet verlustfrei, siehe (9.7).

Nun soll der allgemeine Fall eines vom Bezugswiderstand  $R_B$  abweichenden Wellenwiderstands  $Z_L$  betrachtet werden, siehe Abbildung 10.9. Hierzu führt man eine Renormalisierung der Streumatrix durch.

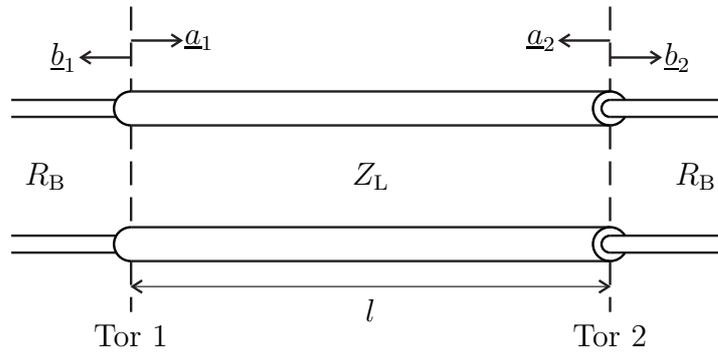


Abbildung 10.9.: Leitung

Aus der Streumatrix bezüglich dem Wellenwiderstand  $Z_L$  gemäß (10.19) berechnet man zunächst mit (9.17) die Impedanzmatrix<sup>2</sup>

$$\begin{aligned}
 \underline{\mathbf{Z}} &= Z_L \begin{pmatrix} 1 & e^{-j\beta l} \\ e^{-j\beta l} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -e^{-j\beta l} \\ -e^{-j\beta l} & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\
 &= Z_L \begin{pmatrix} 1 & e^{-j\beta l} \\ e^{-j\beta l} & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{1 - e^{-j2\beta l}} \begin{pmatrix} 1 & e^{-j\beta l} \\ e^{-j\beta l} & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{Z_L}{e^{j\beta l} - e^{-j\beta l}} \begin{pmatrix} e^{j\beta l} + e^{-j\beta l} & 2 \\ 2 & e^{j\beta l} + e^{-j\beta l} \end{pmatrix} \\
 &= -j \frac{Z_L}{\sin(\beta l)} \begin{pmatrix} \cos(\beta l) & 1 \\ 1 & \cos(\beta l) \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Aus dieser Impedanzmatrix  $\underline{\mathbf{Z}}$  ergibt sich mit (9.16) die Streumatrix mit dem

<sup>2</sup>Es wird die Eulersche Formel  $e^{j\alpha} = \cos(\alpha) + j \sin(\alpha)$  verwendet.

Bezugswiderstand  $R_B$  zu<sup>3</sup>

$$\begin{aligned}
 \underline{\mathbf{S}} &= \begin{pmatrix} \cos(\beta l) + j\frac{R_B}{Z_L} \sin(\beta l) & 1 \\ 1 & \cos(\beta l) + j\frac{R_B}{Z_L} \sin(\beta l) \end{pmatrix}^{-1} \\
 &\cdot \begin{pmatrix} \cos(\beta l) - j\frac{R_B}{Z_L} \sin(\beta l) & 1 \\ 1 & \cos(\beta l) - j\frac{R_B}{Z_L} \sin(\beta l) \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{\cos^2(\beta l) + j2\frac{R_B}{Z_L} \cos(\beta l) \sin(\beta l) - \left(\frac{R_B}{Z_L}\right)^2 \sin^2(\beta l) - 1} \\
 &\begin{pmatrix} \cos(\beta l) + j\frac{R_B}{Z_L} \sin(\beta l) & -1 \\ -1 & \cos(\beta l) + j\frac{R_B}{Z_L} \sin(\beta l) \end{pmatrix} \\
 &\cdot \begin{pmatrix} \cos(\beta l) - j\frac{R_B}{Z_L} \sin(\beta l) & 1 \\ 1 & \cos(\beta l) - j\frac{R_B}{Z_L} \sin(\beta l) \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{2R_B Z_L \cos(\beta l) + j(R_B^2 + Z_L^2) \sin(\beta l)} \\
 &\begin{pmatrix} -j(R_B^2 - Z_L^2) \sin(\beta l) & 2R_B Z_L \\ 2R_B Z_L & -j(R_B^2 - Z_L^2) \sin(\beta l) \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{10.20}$$

Für den  $\lambda/4$ -Transformator erhält man mit  $\beta l = \pi/2$ , siehe (2.38), die Streumatrix

$$\underline{\mathbf{S}} = \frac{1}{Z_L^2 + R_B^2} \begin{pmatrix} Z_L^2 - R_B^2 & -2jR_B Z_L \\ -2jR_B Z_L & Z_L^2 - R_B^2 \end{pmatrix}. \tag{10.21}$$

Für den  $\lambda/2$ -Transformator erhält man mit  $\beta l = \pi$ , siehe (2.38), die Streumatrix

$$\underline{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{10.22}$$

**Aufgabe 10.3** Berechnen Sie die Admittanzmatrix  $\underline{\mathbf{Y}}$  eines  $\lambda/4$ -Transformators mit dem vom Bezugswiderstand  $R_B$  abweichenden Wellenwiderstand  $Z_L$  abhängig vom Bezugswiderstand  $R_B$ !

---

<sup>3</sup>Es gilt  $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$ .

## 10.3. Dreitore

### 10.3.1. Zirkulator

Die Streumatrix eines eigenreflexionsfreien Dreitors hat die Struktur

$$\underline{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} 0 & \underline{S}_{1,2} & \underline{S}_{1,3} \\ \underline{S}_{2,1} & 0 & \underline{S}_{2,3} \\ \underline{S}_{3,1} & \underline{S}_{3,2} & 0 \end{pmatrix},$$

siehe (9.5). Die Streumatrix  $\underline{\mathbf{S}}$  eines verlustfreien Dreitors ist gemäß (9.7) unitär. Hieraus folgt für eigenreflexionsfreie, verlustfreie Dreitore:

$$\begin{aligned} \underline{S}_{3,1}^* \underline{S}_{3,2} &= 0, \\ \underline{S}_{2,1}^* \underline{S}_{2,3} &= 0, \\ \underline{S}_{1,2}^* \underline{S}_{1,3} &= 0, \\ |\underline{S}_{2,1}|^2 + |\underline{S}_{3,1}|^2 &= 1, \\ |\underline{S}_{1,2}|^2 + |\underline{S}_{3,2}|^2 &= 1, \\ |\underline{S}_{1,3}|^2 + |\underline{S}_{2,3}|^2 &= 1. \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem kann durch

$$\underline{S}_{1,2} = \underline{S}_{2,3} = \underline{S}_{3,1} = 0$$

und

$$|\underline{S}_{2,1}| = |\underline{S}_{3,2}| = |\underline{S}_{1,3}| = 1$$

erfüllt werden. Es gibt noch eine weitere, sich nur in der Nummerierung der Tore unterscheidende Lösung, die hier nicht weiter betrachtet wird. Ein an einem Tor eingespeistes Signal wird zum jeweils nächsten Tor weitergeleitet. Derartige Dreitore bezeichnet man als Zirkulatoren. Abbildung 10.10 zeigt das Symbol und den Signalflussgraphen eines Zirkulators mit der Streumatrix

$$\underline{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (10.23)$$

Zirkulatoren sind offensichtlich nicht reziprok, siehe (9.8).

Wenn man einen Zirkulator am dritten Tor reflexionsfrei abschließt, erhält man eine Einwegleitung, siehe Abbildung 10.11. Die Streumatrix der Einwegleitung ist

$$\underline{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (10.24)$$

Die Einwegleitung ist wie der Zirkulator nicht reziprok, siehe (9.8).

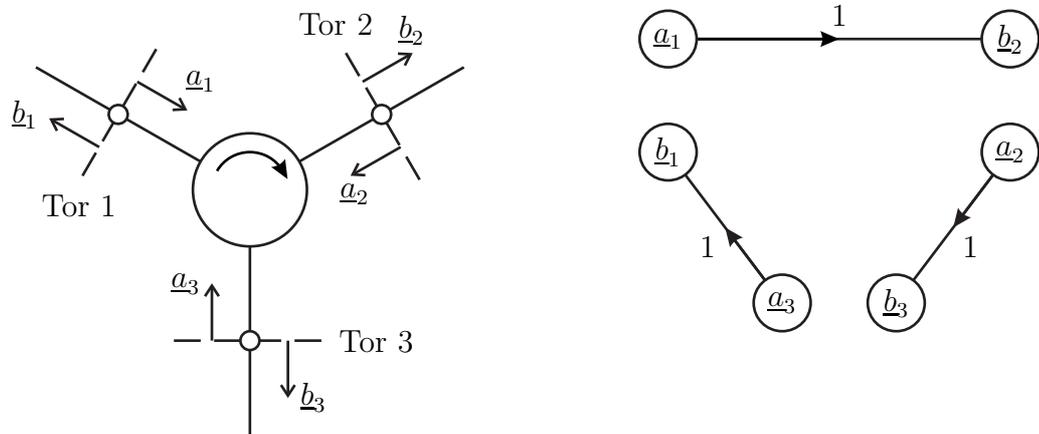


Abbildung 10.10.: Zirkulator

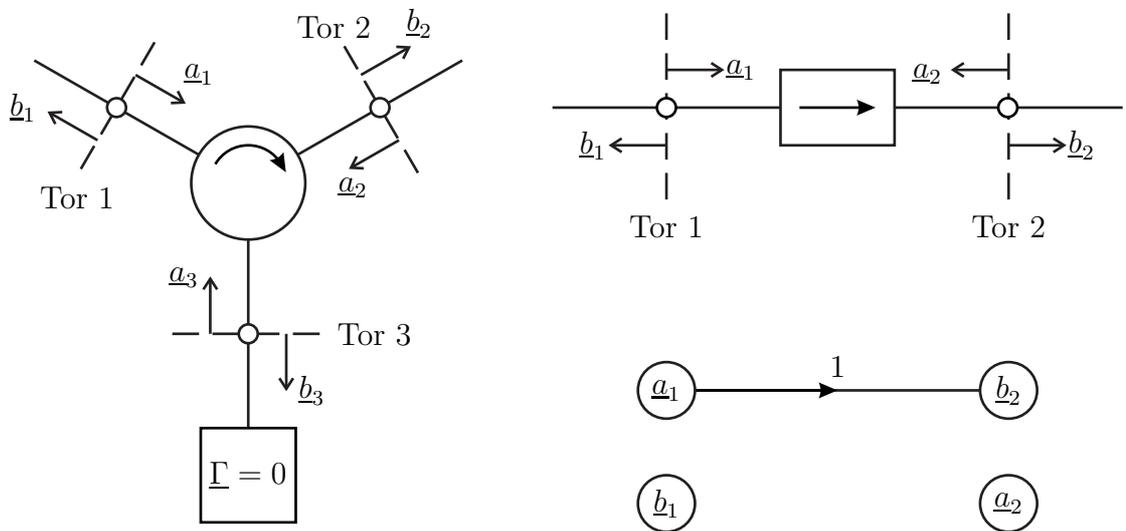


Abbildung 10.11.: Einwegleitung

### 10.3.2. Verzweigung

Bei reflexionsfreiem Abschluss von Tor 2 und Tor 3 der in Abbildung 10.12 gezeigten Verzweigung mit dem Bezugswiderstand  $R_B$  sieht man an Tor 1 eine Impedanz von  $R_B/2$ . Der Reflexionsfaktor (7.24) entspricht in diesem Betriebszustand dem Eigenreflexionsfaktor

$$\underline{S}_{1,1} = \frac{\frac{R_B}{2} - R_B}{\frac{R_B}{2} + R_B} = -\frac{1}{3},$$

siehe (9.4). Da weiterhin die Spannungen an allen Toren gleich sind, folgt mit (7.18) und (9.4):

$$\begin{aligned} \underbrace{\sqrt{R_B}(\underline{a}_1 + \underline{b}_1)}_{\underline{U}_1} &= \underbrace{\sqrt{R_B}\underline{b}_2}_{\underline{U}_2}, \\ (1 + \underline{S}_{1,1})\underline{a}_1 &= \underline{b}_2, \\ \underline{S}_{2,1} = \frac{\underline{b}_2}{\underline{a}_1} &= 1 + \underline{S}_{1,1} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

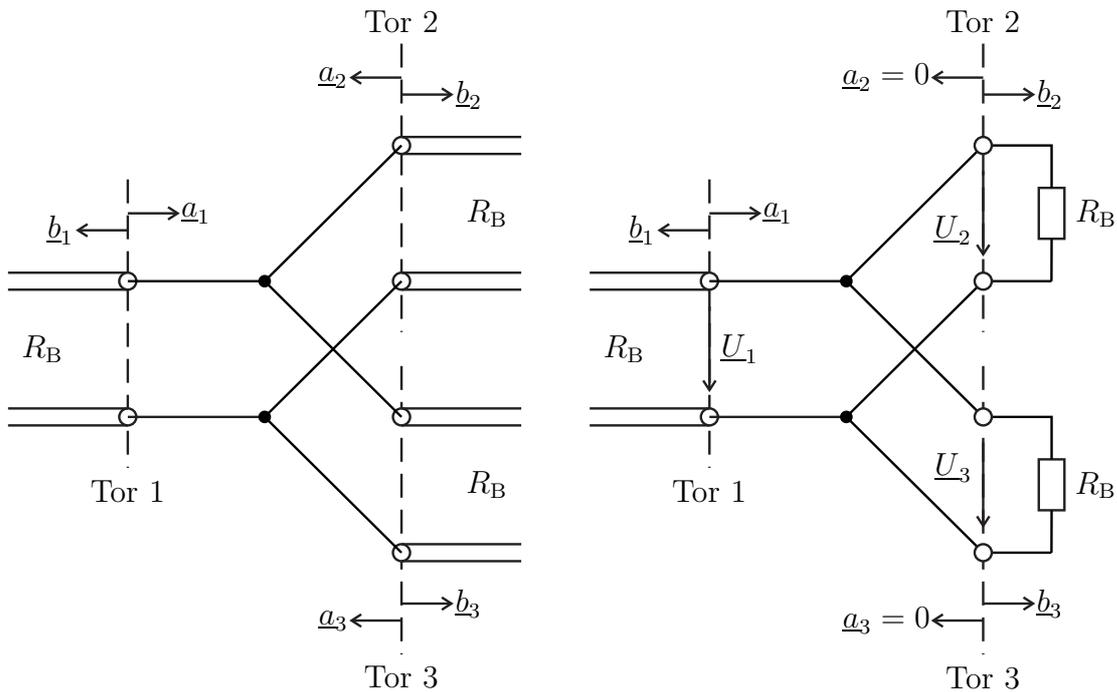


Abbildung 10.12.: Verzweigung. Rechts spezieller Betriebszustand  $\underline{a}_2 = \underline{a}_3 = 0$

Unter Berücksichtigen des symmetrischen Aufbaus der Verzweigung erhält man schließlich die Streumatrix

$$\underline{\mathbf{S}} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}. \quad (10.25)$$

Die Verzweigung ist verlustfrei und reziprok, aber keines der Tore ist eigenreflexionsfrei, siehe (9.7), (9.8) und (9.5). Die Verzweigung hat daher in der Hochfrequenztechnik keine praktische Bedeutung.

### 10.3.3. Allseitig angepasster Leistungsteiler

Es wird der in Abbildung 10.13 gezeigte allseitig angepasste Leistungsteiler betrachtet. Um Eigenreflexionsfreiheit gemäß (9.5) zu erreichen, muss bei reflexionsfreiem Abschluss von Tor 2 und Tor 3 mit dem Bezugswiderstand  $R_B$  die an Tor 1 sichtbare Impedanz gemäß (7.23) gleich dem Bezugswiderstand  $R_B$  sein:

$$R + \frac{1}{2}(R + R_B) = R_B,$$

$$R = \frac{R_B}{3}.$$

Aus Symmetriegründen teilt sich der in Tor 1 hineinfließende Strom gleichmäßig auf Tor 2 und Tor 3 auf. Mit (7.19) und (9.4) folgt:

$$\underbrace{\frac{a_1}{\sqrt{R_B}}}_{L_1} = -2 \underbrace{\frac{-b_2}{\sqrt{R_B}}}_{L_2},$$

$$b_2 = \frac{1}{2}a_1,$$

$$S_{2,1} = \frac{b_2}{a_1} = \frac{1}{2}.$$

Unter Berücksichtigen des symmetrischen Aufbaus des allseitig angepassten Leistungsteilers erhält man schließlich die Streumatrix

$$\underline{\mathbf{S}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (10.26)$$

Der allseitig angepasste Leistungsteiler ist eigenreflexionsfrei und reziprok aber nicht verlustfrei, siehe (9.5), (9.8) und (9.7). Aufgrund der Reziprozität lässt sich der allseitig angepasste Leistungsteiler auch zum Überlagern Signalen verwenden.

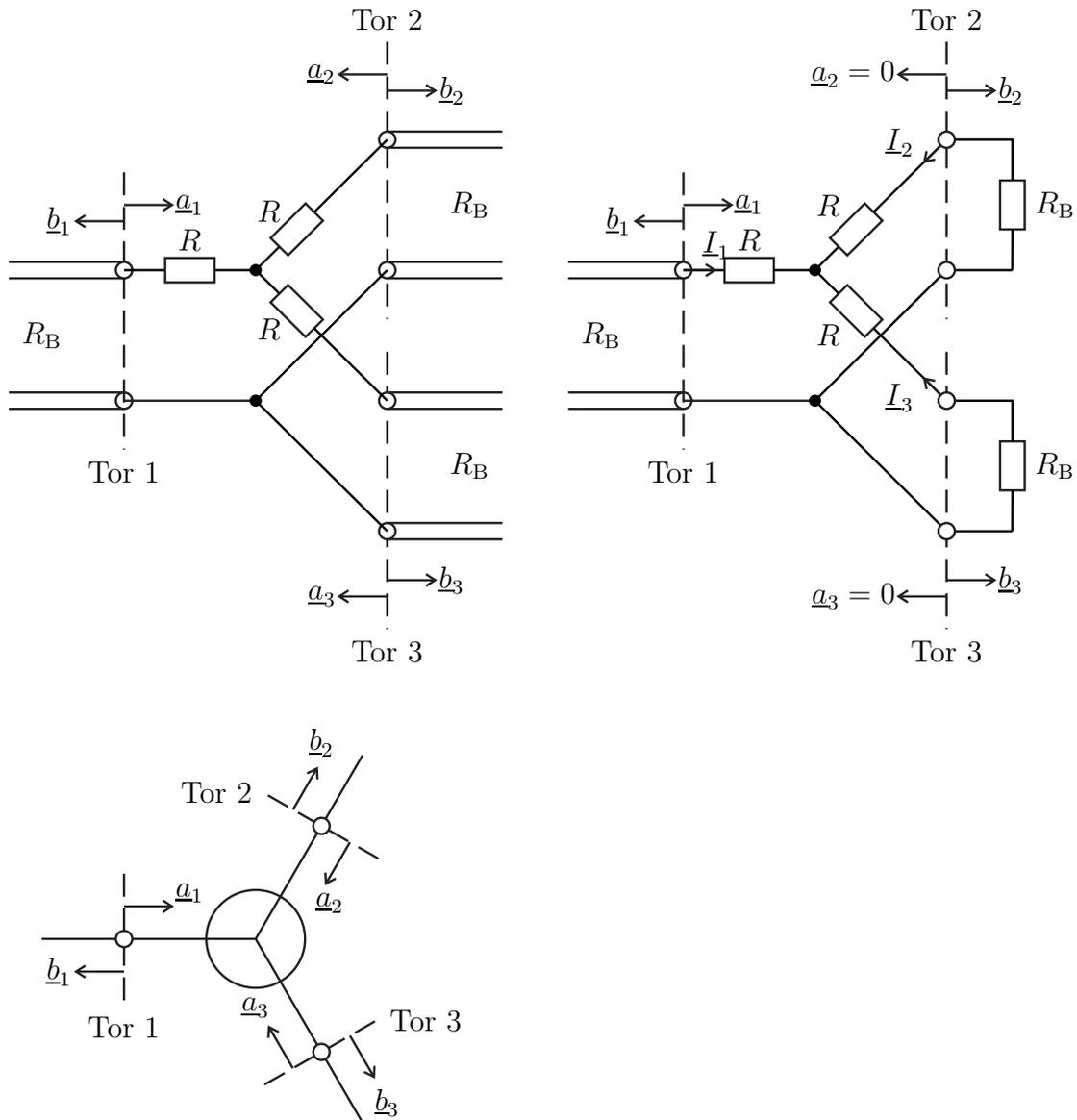


Abbildung 10.13.: Allseitig angepasster Leistungsteiler. Rechts oben spezieller Betriebszustand  $\underline{a}_2 = \underline{a}_3 = 0$

**Aufgabe 10.4** Es wird der in Abbildung 10.14 gezeigte eingangsseitig angepasste Leistungsteiler betrachtet. Wie muss der Widerstand  $R$  gewählt werden, damit  $\underline{S}_{1,1} = 0$  gilt? Berechnen Sie die Streumatrix  $\underline{S}$  des bei dieser speziellen Wahl des Widerstands  $R$  erhaltenen eingangsseitig angepassten Leistungsteilers!

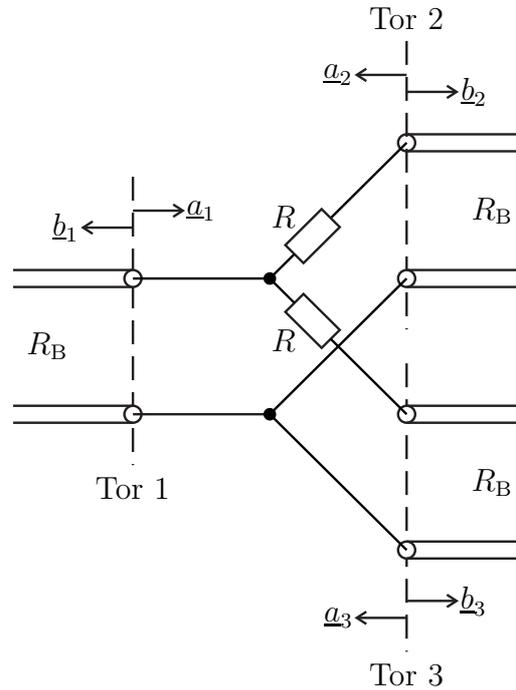


Abbildung 10.14.: Eingangsseitig angepasster Leistungsteiler

## 10.4. Viertore

### 10.4.1. Symmetrisch aufgebaute Viertore

Aufgrund des symmetrischen Aufbaus des Viertors gilt für die nodalen Streuparameter

$$\begin{aligned}
 \underline{S}_{1,1} &= \underline{S}_{3,3}, \\
 \underline{S}_{2,2} &= \underline{S}_{4,4}, \\
 \underline{S}_{1,3} &= \underline{S}_{3,1}, \\
 \underline{S}_{2,4} &= \underline{S}_{4,2}, \\
 \underline{S}_{1,2} &= \underline{S}_{3,4}, \\
 \underline{S}_{2,1} &= \underline{S}_{4,3}, \\
 \underline{S}_{1,4} &= \underline{S}_{3,2}, \\
 \underline{S}_{4,1} &= \underline{S}_{2,3},
 \end{aligned}$$

siehe Abbildung 10.15.

Man kann wieder symmetrische Torpaare bilden und die modalen Streupara-

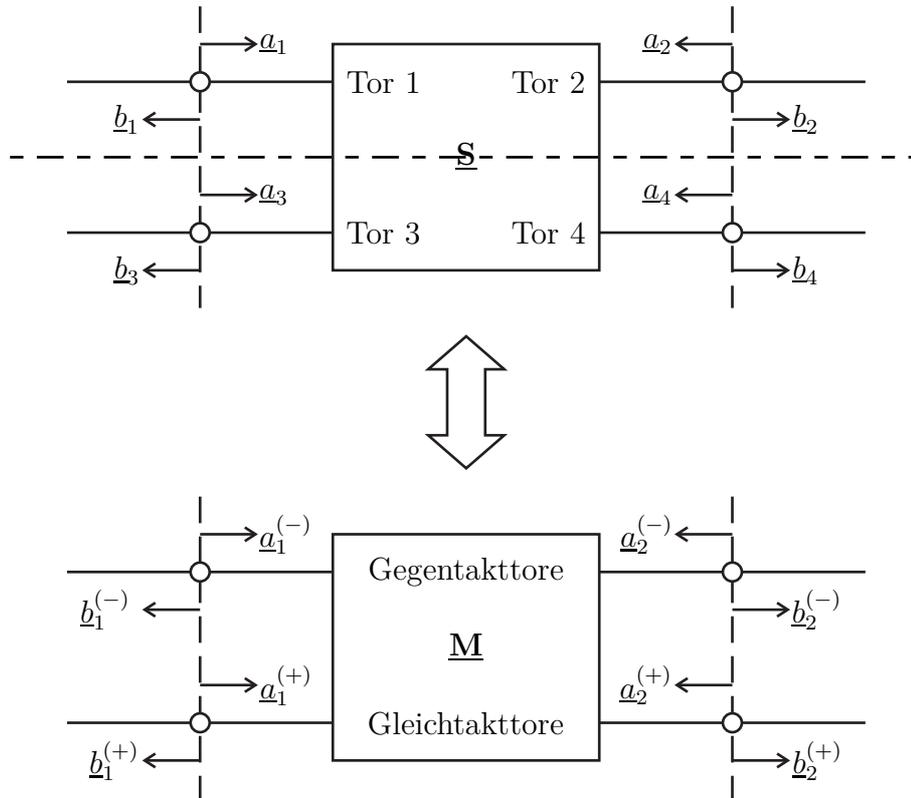


Abbildung 10.15.: Einfach symmetrisch aufgebautes Viertor

meter betrachten. Aus (9.37) bis (9.40) erhält man:

$$\underline{\mathbf{M}}^{(--)} = \begin{pmatrix} \underline{\mathcal{S}}_{1,1} - \underline{\mathcal{S}}_{1,3} & \underline{\mathcal{S}}_{1,2} - \underline{\mathcal{S}}_{1,4} \\ \underline{\mathcal{S}}_{2,1} - \underline{\mathcal{S}}_{2,3} & \underline{\mathcal{S}}_{2,2} - \underline{\mathcal{S}}_{2,4} \end{pmatrix}, \quad (10.27)$$

$$\underline{\mathbf{M}}^{(++)} = \begin{pmatrix} \underline{\mathcal{S}}_{1,1} + \underline{\mathcal{S}}_{1,3} & \underline{\mathcal{S}}_{1,2} + \underline{\mathcal{S}}_{1,4} \\ \underline{\mathcal{S}}_{2,1} + \underline{\mathcal{S}}_{2,3} & \underline{\mathcal{S}}_{2,2} + \underline{\mathcal{S}}_{2,4} \end{pmatrix}, \quad (10.28)$$

$$\underline{\mathbf{M}}^{(-+)} = \underline{\mathbf{M}}^{(+-)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (10.29)$$

Insbesondere tritt in einem symmetrisch aufgebauten Viertor niemals Modenkongression auf.

In einem nächsten Schritt sollen doppelt symmetrisch aufgebaute Viertore betrachtet werden, siehe Abbildung 10.16. Für die nodalen Streuparameter folgen

weitere Übereinstimmungen:

$$\underline{S}_{1,1} = \underline{S}_{3,3} = \underline{S}_{2,2} = \underline{S}_{4,4},$$

$$\underline{S}_{1,3} = \underline{S}_{3,1} = \underline{S}_{2,4} = \underline{S}_{4,2},$$

$$\underline{S}_{1,2} = \underline{S}_{3,4} = \underline{S}_{2,1} = \underline{S}_{4,3},$$

$$\underline{S}_{1,4} = \underline{S}_{3,2} = \underline{S}_{4,1} = \underline{S}_{2,3}.$$

Insbesondere sind doppelt symmetrisch aufgebaute Viertore immer reziprok und eigenreflexionssymmetrisch, siehe (9.8) und (9.9). Für die modalen Streuparameter folgt:

$$\underline{\mathbf{M}}^{(--)} = \begin{pmatrix} \underline{S}_{1,1} - \underline{S}_{1,3} & \underline{S}_{1,2} - \underline{S}_{1,4} \\ \underline{S}_{1,2} - \underline{S}_{1,4} & \underline{S}_{1,1} - \underline{S}_{1,3} \end{pmatrix}, \quad (10.30)$$

$$\underline{\mathbf{M}}^{(++)} = \begin{pmatrix} \underline{S}_{1,1} + \underline{S}_{1,3} & \underline{S}_{1,2} + \underline{S}_{1,4} \\ \underline{S}_{1,2} + \underline{S}_{1,4} & \underline{S}_{1,1} + \underline{S}_{1,3} \end{pmatrix}, \quad (10.31)$$

$$\underline{\mathbf{M}}^{(-+)} = \underline{\mathbf{M}}^{(+-)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (10.32)$$

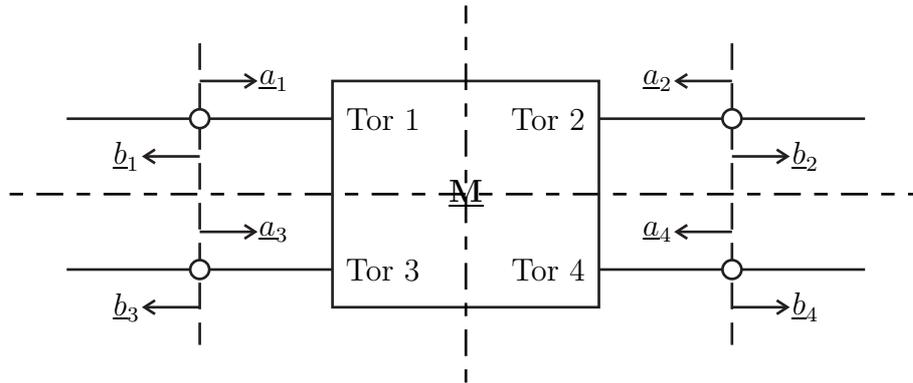


Abbildung 10.16.: Doppelt symmetrisch aufgebautes Viertor

### 10.4.2. Richtkoppler

Die Streumatrix eines doppelt symmetrisch aufgebauten, eigenreflexionsfreien Viertors hat die Struktur

$$\underline{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} 0 & \underline{S}_{1,2} & \underline{S}_{1,3} & \underline{S}_{1,4} \\ \underline{S}_{1,2} & 0 & \underline{S}_{1,4} & \underline{S}_{1,3} \\ \underline{S}_{1,3} & \underline{S}_{1,4} & 0 & \underline{S}_{1,2} \\ \underline{S}_{1,4} & \underline{S}_{1,3} & \underline{S}_{1,2} & 0 \end{pmatrix},$$

siehe (9.5) Die Streumatrix  $\underline{\mathbf{S}}$  eines verlustfreien Viertors ist gemäß (9.7) unitär. Hieraus folgt für doppelt symmetrisch aufgebaute, eigenreflexionsfreie, verlustfreie Viertore:

$$\begin{aligned} |\underline{\mathcal{S}}_{1,2}|^2 + |\underline{\mathcal{S}}_{1,3}|^2 + |\underline{\mathcal{S}}_{1,4}|^2 &= 1, \\ \underline{\mathcal{S}}_{1,3}^* \underline{\mathcal{S}}_{1,4} + \underline{\mathcal{S}}_{1,4}^* \underline{\mathcal{S}}_{1,3} &= 0, \\ \underline{\mathcal{S}}_{1,2}^* \underline{\mathcal{S}}_{1,4} + \underline{\mathcal{S}}_{1,4}^* \underline{\mathcal{S}}_{1,2} &= 0, \\ \underline{\mathcal{S}}_{1,2}^* \underline{\mathcal{S}}_{1,3} + \underline{\mathcal{S}}_{1,3}^* \underline{\mathcal{S}}_{1,2} &= 0. \end{aligned}$$

Aus der letzten Gleichung folgt:<sup>4</sup>

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\underline{\mathcal{S}}_{1,2}^* \underline{\mathcal{S}}_{1,3}) &= 0, \\ \arg(\underline{\mathcal{S}}_{1,2}) - \arg(\underline{\mathcal{S}}_{1,3}) &= \pm \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Analoges gilt auch für die beiden anderen Paare von Streuparametern:

$$\begin{aligned} \arg(\underline{\mathcal{S}}_{1,2}) - \arg(\underline{\mathcal{S}}_{1,4}) &= \pm \frac{\pi}{2}, \\ \arg(\underline{\mathcal{S}}_{1,3}) - \arg(\underline{\mathcal{S}}_{1,4}) &= \pm \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Alle drei Streuparameter  $\underline{\mathcal{S}}_{1,2}$ ,  $\underline{\mathcal{S}}_{1,3}$  und  $\underline{\mathcal{S}}_{1,4}$  müssen in der komplexen Ebene paarweise orthogonal zueinander sein. Dies erfordert, dass einer der drei Streuparameter  $\underline{\mathcal{S}}_{1,2}$ ,  $\underline{\mathcal{S}}_{1,3}$  und  $\underline{\mathcal{S}}_{1,4}$  Null ist. Willkürlich wird die Variante

$$\underline{\mathcal{S}}_{1,4} = 0$$

weiter betrachtet. Es folgen

$$\arg(\underline{\mathcal{S}}_{1,2}) - \arg(\underline{\mathcal{S}}_{1,3}) = \pm \frac{\pi}{2} \quad (10.33)$$

und

$$|\underline{\mathcal{S}}_{1,2}|^2 + |\underline{\mathcal{S}}_{1,3}|^2 = 1. \quad (10.34)$$

Die resultierende Streumatrix hat die Gestalt

$$\underline{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} 0 & \underline{\mathcal{S}}_{1,2} & \underline{\mathcal{S}}_{1,3} & 0 \\ \underline{\mathcal{S}}_{1,2} & 0 & 0 & \underline{\mathcal{S}}_{1,3} \\ \underline{\mathcal{S}}_{1,3} & 0 & 0 & \underline{\mathcal{S}}_{1,2} \\ 0 & \underline{\mathcal{S}}_{1,3} & \underline{\mathcal{S}}_{1,2} & 0 \end{pmatrix}, \quad (10.35)$$

das heißt doppelt symmetrisch aufgebaute, eigenreflexionsfreie, verlustfreie Viertore sind Richtkoppler. Abbildung 10.17 zeigt Symbol und Signalfussgraph eines Richtkopplers.

<sup>4</sup>Der Realteil einer komplexen Größe berechnet sich zu  $\operatorname{Re}(\underline{x}) = \frac{1}{2}(\underline{x} + \underline{x}^*)$ .

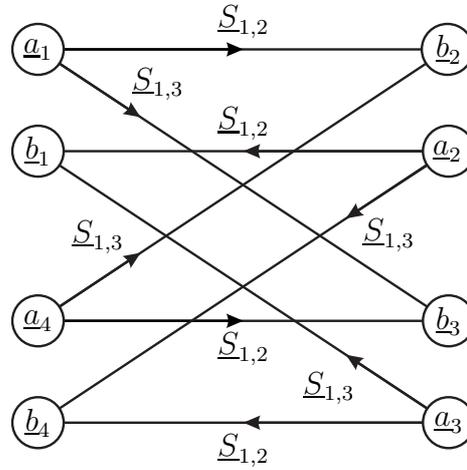
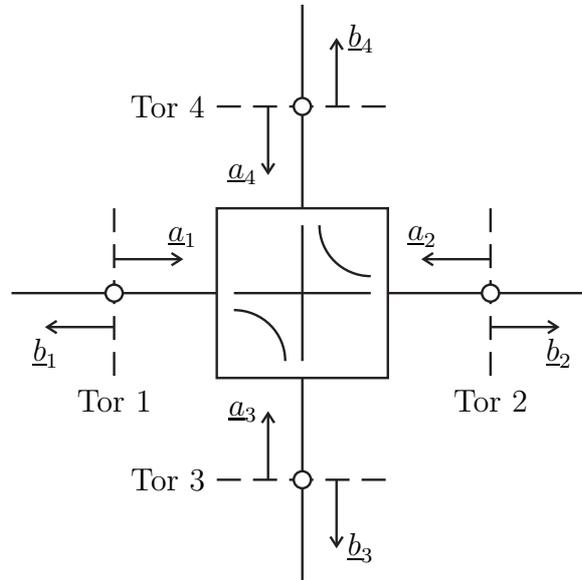


Abbildung 10.17.: Richtkoppler

### 10.4.3. Paralleleitungs-koppler

Der Paralleleitungs-koppler ist ein doppelt symmetrisches Dreileitersystem mit Koppelfaktor  $k$ , siehe Abbildung 10.18. Der Wellenwiderstand  $Z_L^{(-)}$  des Gegentaktmodes und der Wellenwiderstand  $Z_L^{(+)}$  des Gleichtaktmodes weichen im Allgemeinen vom Bezugswiderstand  $R_B$  ab. Mit (10.20) erhält man die modalen Streuparameter:

$$\underline{M}_{1,1}^{(--)} = \frac{-j \left( R_B^2 - Z_L^{(-)2} \right) \sin(\beta l)}{2R_B Z_L^{(-)} \cos(\beta l) + j \left( R_B^2 + Z_L^{(-)2} \right) \sin(\beta l)}, \quad (10.36)$$

$$\underline{M}_{1,1}^{(++)} = \frac{-j \left( R_B^2 - Z_L^{(+2)} \right) \sin(\beta l)}{2R_B Z_L^{(+)} \cos(\beta l) + j \left( R_B^2 + Z_L^{(+2)} \right) \sin(\beta l)}, \quad (10.37)$$

$$\underline{M}_{1,2}^{(--)} = \frac{2R_B Z_L^{(-)}}{2R_B Z_L^{(-)} \cos(\beta l) + j \left( R_B^2 + Z_L^{(-)2} \right) \sin(\beta l)}, \quad (10.38)$$

$$\underline{M}_{1,2}^{(++)} = \frac{2R_B Z_L^{(+)}}{2R_B Z_L^{(+)} \cos(\beta l) + j \left( R_B^2 + Z_L^{(+2)} \right) \sin(\beta l)}. \quad (10.39)$$

Wegen des symmetrischen Aufbaus gilt für den Eigenreflexionsfaktor

$$\underline{S}_{1,1} = \frac{\underline{M}_{1,1}^{(--)} + \underline{M}_{1,1}^{(++)}}{2}, \quad (10.40)$$

siehe (10.30) und (10.31). Der Paralleleitungs-koppler ist gemäß (9.5) eigenreflexionsfrei, falls die Bedingung

$$\begin{aligned} 0 &= 2\underline{S}_{1,1} = \underline{M}_{1,1}^{(--)} + \underline{M}_{1,1}^{(++)} \\ &= \frac{-j \left( R_B^2 - Z_L^{(-)2} \right) \sin(\beta l)}{2R_B Z_L^{(-)} \cos(\beta l) + j \left( R_B^2 + Z_L^{(-)2} \right) \sin(\beta l)} \\ &\quad + \frac{-j \left( R_B^2 - Z_L^{(+2)} \right) \sin(\beta l)}{2R_B Z_L^{(+)} \cos(\beta l) + j \left( R_B^2 + Z_L^{(+2)} \right) \sin(\beta l)} \end{aligned}$$

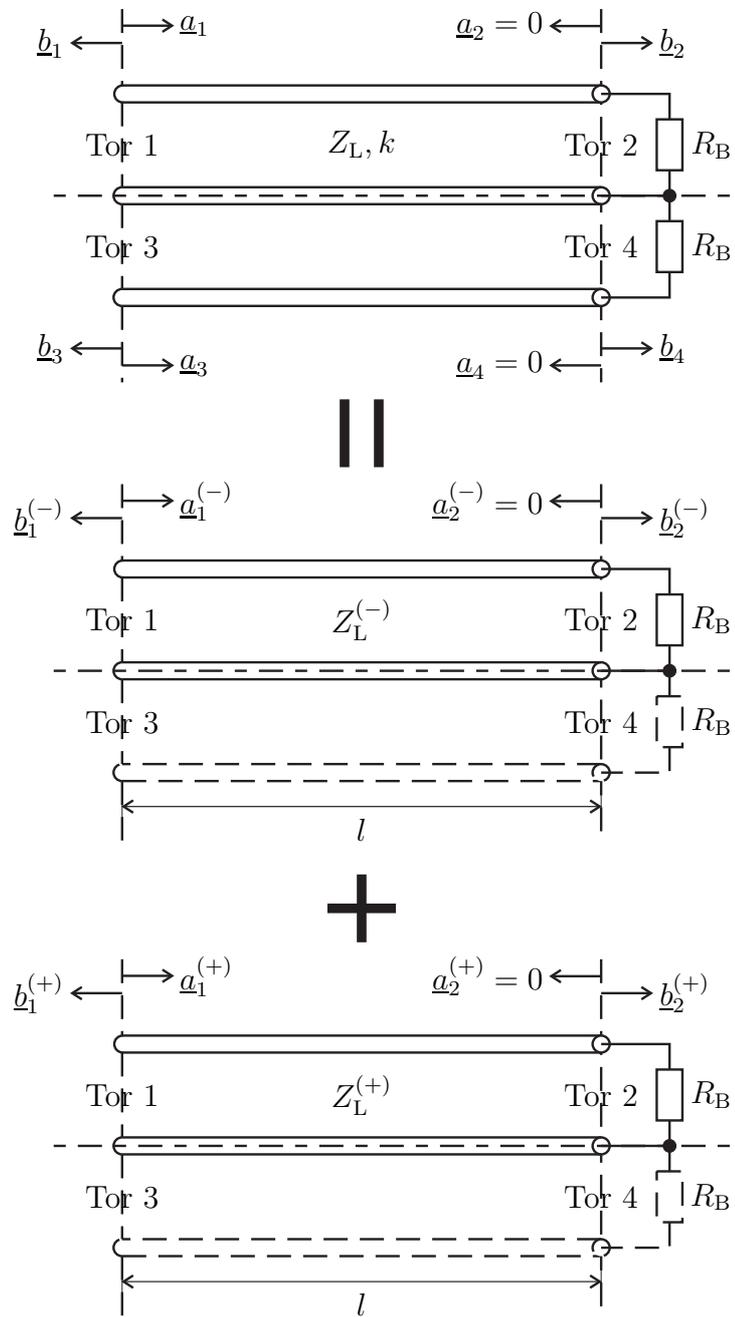


Abbildung 10.18.: Parallelleitungskoppler. Spezieller Betriebszustand  $\underline{a}_2 = \underline{a}_4 = 0$

erfüllt ist. Diese Bedingung ist erfüllt, falls die Leitungslänge  $l$  ein ganzzahliges Vielfaches von  $\lambda/2$  ist, siehe (2.38), oder

$$\begin{aligned} 0 &= \left( R_B^2 - Z_L^{(-)2} \right) \left( 2R_B Z_L^{(+)} \cos(\beta l) + j \left( R_B^2 + Z_L^{(+)^2} \right) \sin(\beta l) \right) \\ &\quad + \left( R_B^2 - Z_L^{(+)^2} \right) \left( 2R_B Z_L^{(-)} \cos(\beta l) + j \left( R_B^2 + Z_L^{(-)2} \right) \sin(\beta l) \right), \\ &= 2R_B \cos(\beta l) \left( Z_L^{(-)} + Z_L^{(+)} \right) \left( R_B^2 - Z_L^{(-)} Z_L^{(+)} \right) + j 2 \sin(\beta l) \left( R_B^4 - Z_L^{(-)2} Z_L^{(+)^2} \right) \end{aligned}$$

gilt. Dies ist der Fall, falls

$$R_B = \sqrt{Z_L^{(-)} Z_L^{(+)}} \quad (10.41)$$

gilt. Im Folgenden werden nur diese speziellen Werte der Wellenwiderstände weiter betrachtet. Mit (3.59), (3.60) und (3.61) folgen die modalen Streuparameter:

$$\underline{M}_{1,1}^{(--)} = \frac{-jk \sin(\beta l)}{\sqrt{1 - k^2} \cos(\beta l) + j \sin(\beta l)}, \quad (10.42)$$

$$\underline{M}_{1,1}^{(-+)} = 0, \quad (10.43)$$

$$\underline{M}_{1,1}^{(+-)} = 0, \quad (10.44)$$

$$\underline{M}_{1,1}^{(++)} = \frac{jk \sin(\beta l)}{\sqrt{1 - k^2} \cos(\beta l) + j \sin(\beta l)}, \quad (10.45)$$

$$\underline{M}_{1,2}^{(--)} = \frac{\sqrt{1 - k^2}}{\sqrt{1 - k^2} \cos(\beta l) + j \sin(\beta l)}, \quad (10.46)$$

$$\underline{M}_{1,2}^{(-+)} = 0, \quad (10.47)$$

$$\underline{M}_{1,2}^{(+-)} = 0, \quad (10.48)$$

$$\underline{M}_{1,2}^{(++)} = \frac{\sqrt{1 - k^2}}{\sqrt{1 - k^2} \cos(\beta l) + j \sin(\beta l)}. \quad (10.49)$$

Die nodalen Streuparameter ergeben sich mit (9.41) bis (9.44) zu:

$$\underline{S}_{1,1} = \frac{\underline{M}_{1,1}^{(--)} + \underline{M}_{1,1}^{(++)}}{2} = 0, \quad (10.50)$$

$$\underline{S}_{1,2} = \frac{\underline{M}_{1,2}^{(--)} + \underline{M}_{1,2}^{(++)}}{2} = \frac{\sqrt{1 - k^2}}{\sqrt{1 - k^2} \cos(\beta l) + j \sin(\beta l)}, \quad (10.51)$$

$$\underline{S}_{1,3} = \frac{-\underline{M}_{1,1}^{(--)} + \underline{M}_{1,1}^{(++)}}{2} = \frac{jk \sin(\beta l)}{\sqrt{1 - k^2} \cos(\beta l) + j \sin(\beta l)}, \quad (10.52)$$

$$\underline{S}_{1,4} = \frac{-\underline{M}_{1,2}^{(--)} + \underline{M}_{1,2}^{(++)}}{2} = 0. \quad (10.53)$$

Es folgen

$$|\underline{S}_{1,2}|^2 = \frac{1 - k^2}{1 - k^2 \cos^2(\beta l)} \quad (10.54)$$

und

$$|\underline{S}_{1,3}|^2 = \frac{k^2 \sin^2(\beta l)}{1 - k^2 \cos^2(\beta l)}. \quad (10.55)$$

Das Nahnebensprechen

$$\underline{S}_{1,3} = \frac{jk \sin(\beta l)}{\sqrt{1 - k^2} \cos(\beta l) + j \sin(\beta l)} = \frac{k}{1 - j\sqrt{1 - k^2} \cot(\beta l)} \quad (10.56)$$

wird für  $l = \lambda/4$  maximal, siehe (2.38). Der bei dieser Leitungslänge erzielte Maximalwert des Nahnebensprechens ist

$$\underline{S}_{1,3} = k. \quad (10.57)$$

Das Fernnebensprechen  $\underline{S}_{1,4}$  ist unabhängig von der Leitungslänge  $l$  immer Null. Weiterhin gilt für  $l = \lambda/4$

$$\underline{S}_{1,2} = -j\sqrt{1 - k^2}. \quad (10.58)$$

Zum Veranschaulichen der Ergebnisse wird der in Abbildung 10.18 gezeigte spezielle Betriebszustand mit reflexionsfreiem Abschluss an Tor 2 und Tor 4 betrachtet. Man beachte, dass der Abschluss bezüglich der an den Toren angeschlossenen Zweileitersysteme, nicht aber bezüglich des gekoppelten Dreileitersystems im Inneren des Viertors reflexionsfrei ist. Nur an Tor 1 liege eine zulaufende Welle an, das heißt an Tor 1 überlagern sich zulaufende Gegentaktwelle und zulaufende Gleichtaktwelle konstruktiv und an Tor 3 löschen sich zulaufende Gegentaktwelle und zulaufende Gleichtaktwelle destruktiv aus. Für Gegentaktmode und Gleichtaktmode ist die gleiche Abschlussimpedanz  $R_B$  sichtbar. Diese Abschlussimpedanz  $R_B$  wird jedoch aufgrund der unterschiedlichen Wellenwiderstände von Gegentaktmode und Gleichtaktmode in unterschiedliche Eingangsimpedanzen transformiert, so dass auch die eingangsseitigen Reflexionsfaktoren für Gegentaktmode und Gleichtaktmode unterschiedlich sind. Die ablaufende Gegentaktwelle und die ablaufende Gleichtaktwelle löschen sich daher an Tor 3 nicht mehr vollständig aus. Es kommt zu Nahnebensprechen. Nur wenn die Leitungslänge ein ganzzahliges Vielfaches von  $\lambda/2$  ist, wird unabhängig vom Wellenwiderstand die Abschlussimpedanz  $R_B$  stets in sich selbst transformiert und es treten keine Reflexionen und insbesondere kein Nahnebensprechen auf. Speziell mit den Wellenwiderständen gemäß (10.41) unterscheiden sich die Reflexionsfaktoren von Gegentaktmode und Gleichtaktmode nur im Vorzeichen. Dann löschen sich die ablaufende Gegentaktwelle und die ablaufende Gleichtaktwelle an Tor 1, nicht aber an Tor 3 gegenseitig aus.

# Kapitel 11.

## Vektorielle Netzwerkanalyse

### 11.1. Reflektometer

#### 11.1.1. Aufbau eines Reflektometers

Das Reflektometer dient dem Messen des Reflexionsfaktors  $\underline{\Gamma}_{\text{DUT}}$  eines Messobjekts (Device under Test, DUT). Da nicht nur der Betrag des Reflexionsfaktors  $\underline{\Gamma}_{\text{DUT}}$ , sondern auch das Argument gemessen wird, spricht man von einer vektoriellen Messung. Wenn es gelänge, die komplexe Wellenamplitude  $\underline{a}$  der auf das Messobjekt zulaufenden Welle und die komplexe Wellenamplitude  $\underline{b}$  der ablaufenden Welle getrennt zu erfassen, so könnte man den Reflexionsfaktor mit

$$\underline{\Gamma}_{\text{DUT}} = \frac{\underline{b}}{\underline{a}} \quad (11.1)$$

direkt berechnen, siehe (7.7).

Für eine praktische Realisierung des Reflektometers sind direktive Elemente wie Richtkoppler verfügbar, die im Idealfall zu den gesuchten Wellen proportionale Wellen an getrennten Toren auskoppeln. Zum Messen der komplexen Wellenamplituden kann man beispielsweise Quadraturdemodulatoren verwenden, siehe Anhang B.6.5. Die resultierenden Gleichspannungen in den Inphasekanälen und Quadraturkanälen entsprechen den Realteilen beziehungsweise den Imaginärteilen der zu messenden komplexen Wellenamplituden. Zum Unterdrücken von Rauschen führt man eine Mittelung über eine gewisse Integrationsdauer durch, was im Frequenzbereich einer Filterung mit einer zur Integrationsdauer umgekehrt proportionalen Auflösungsbreite (Resolution Bandwidth, RBW) entspricht. Wegen der unbekanntenen Nullphase des Oszillatorsignals geht die absolute Phaseninformation zunächst verloren. Wenn man in beiden Messkanalempfängern das selbe Oszillatorsignal verwendet, bleibt die hier relevante relative Phaseninformation jedoch erhalten. Man erhält im Idealfall zu den komplexen Wellenamplituden proportionale Messgrößen

$$\underline{a}' \sim \underline{a}$$

und

$$\underline{b}' \sim \underline{b}.$$

Die Proportionalitätsfaktoren des direktiven Elements und die Verstärkungen und Phasenverschiebungen der Messkanalempfänger sind im Idealfall für beide Messgrößen gleich, so dass man den Reflexionsfaktor des Messobjekts direkt als Verhältnis der Messgrößen berechnen kann:

$$\underline{\Gamma}'_{\text{DUT}} = \frac{\underline{b}'}{\underline{a}'}. \quad (11.2)$$

In der Realität treten signifikante Fehler auf. Neben Imperfektionen des direktiven Elements sind dies insbesondere Phasenverschiebungen und Dämpfungen der Verbindungsleitungen zwischen Messgerät und Messobjekt. Man modelliert dieses reale Reflektometer durch ein Viertor an dessen vier Toren

1. das Messobjekt mit Reflexionsfaktor  $\underline{\Gamma}_{\text{DUT}}$ ,
2. die Testsignalquelle,
3. die Messstelle für die komplexe Wellenamplitude  $\underline{a}'$  der hinlaufenden Welle mit Reflexionsfaktor  $\underline{\Gamma}_{\text{a}}$  und
4. die Messstelle für die komplexe Wellenamplitude  $\underline{b}'$  der rücklaufenden Welle mit Reflexionsfaktor  $\underline{\Gamma}_{\text{b}}$

angeschlossen sind, siehe Abbildung 11.1.

Mit den Reflexionsfaktoren der Messstellen folgen

$$\underline{a}_4 = \underline{\Gamma}_{\text{a}} \underline{a}' \quad (11.3)$$

und

$$\underline{a}_3 = \underline{\Gamma}_{\text{b}} \underline{b}', \quad (11.4)$$

siehe (7.7). Das Viertor kann gemäß (9.4) durch seine Streuparameter beschrieben werden:

$$\underline{a} = \underline{S}_{1,1} \underline{b} + \underline{S}_{1,2} \underline{a}_2 + \underline{S}_{1,3} \underline{a}_3 + \underline{S}_{1,4} \underline{a}_4, \quad (11.5)$$

$$\underline{b}_2 = \underline{S}_{2,1} \underline{b} + \underline{S}_{2,2} \underline{a}_2 + \underline{S}_{2,3} \underline{a}_3 + \underline{S}_{2,4} \underline{a}_4, \quad (11.6)$$

$$\underline{b}' = \underline{S}_{3,1} \underline{b} + \underline{S}_{3,2} \underline{a}_2 + \underline{S}_{3,3} \underline{a}_3 + \underline{S}_{3,4} \underline{a}_4, \quad (11.7)$$

$$\underline{a}' = \underline{S}_{4,1} \underline{b} + \underline{S}_{4,2} \underline{a}_2 + \underline{S}_{4,3} \underline{a}_3 + \underline{S}_{4,4} \underline{a}_4. \quad (11.8)$$

Diese Gleichungen stellen ein lineares Gleichungssystem mit sechs Gleichungen und den sechs Unbekannten  $\underline{a}$ ,  $\underline{b}'$ ,  $\underline{a}_2$ ,  $\underline{a}_3$ ,  $\underline{a}_4$  und  $\underline{b}_2$  dar, das heißt man kann  $\underline{a}$

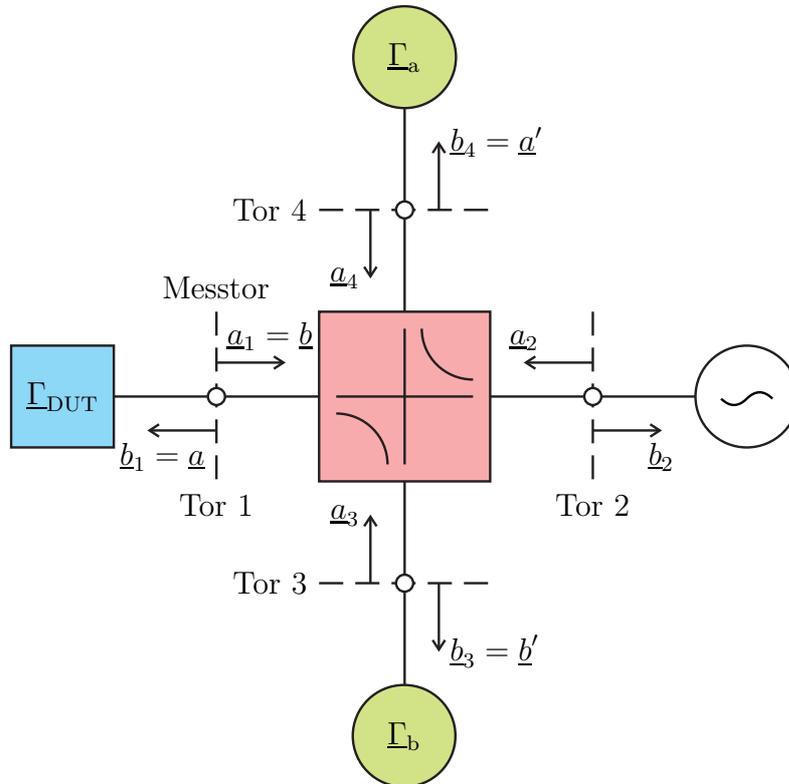


Abbildung 11.1.: Reflektometer

und  $\underline{b}'$  als Funktionen von  $\underline{b}$  und  $\underline{a}'$  berechnen. Unter Verwenden von (11.3) und (11.4) erhält man aus (11.8)

$$\begin{aligned} \underline{a}_2 &= \frac{1}{\underline{S}_{4,2}} \underline{a}' - \frac{\underline{S}_{4,1}}{\underline{S}_{4,2}} \underline{b} - \frac{\underline{S}_{4,3}}{\underline{S}_{4,2}} \underline{a}_3 - \frac{\underline{S}_{4,4}}{\underline{S}_{4,2}} \underline{a}_4 \\ &= \left( \frac{1}{\underline{S}_{4,2}} - \frac{\underline{S}_{4,4} \Gamma_a}{\underline{S}_{4,2}} \right) \underline{a}' - \frac{\underline{S}_{4,1}}{\underline{S}_{4,2}} \underline{b} - \frac{\underline{S}_{4,3} \Gamma_b}{\underline{S}_{4,2}} \underline{b}'. \end{aligned} \quad (11.9)$$

Mit (11.3), (11.4) und (11.9) eliminiert man  $\underline{a}_2$ ,  $\underline{a}_3$  und  $\underline{a}_4$  in (11.5) und (11.7) und erhält schließlich  $\underline{a}$  und  $\underline{b}'$  als lineare Funktionen von  $\underline{b}$  und  $\underline{a}'$  gemäß

$$\begin{pmatrix} \underline{a} \\ \underline{b}' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \underline{F}_{0,0} & \underline{F}_{0,1} \\ \underline{F}_{1,0} & \underline{F}_{1,1} \end{pmatrix}}_{\mathbf{F}} \cdot \begin{pmatrix} \underline{b} \\ \underline{a}' \end{pmatrix}. \quad (11.10)$$

Abbildung 11.2 zeigt das so erhaltene Modell des imperfekten Reflektometers. Die Fehler werden durch ein zwischen virtuelles ideales Reflektometer und Mesobjekt geschaltetes Fehlerzweitor mit der Streumatrix  $\mathbf{F}$  berücksichtigt. Dieses

Fehlerzweitor entspricht keinem direkt physikalisch vorhandenem Zweitor und ist daher im Allgemeinen auch nicht reziprok. Das hier geschilderte Vorgehen wird als Viertor-Zweitor-Reduktion bezeichnet [ES91].

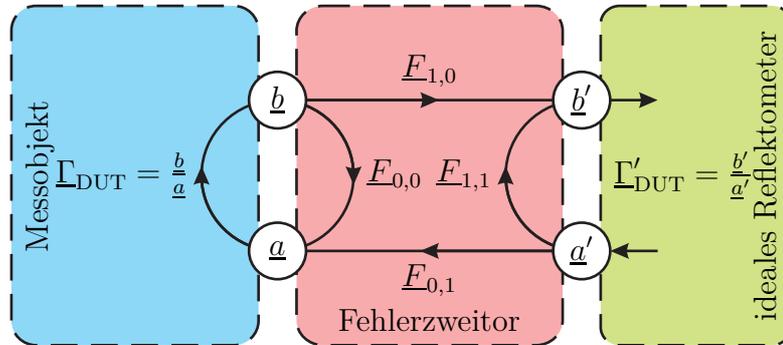


Abbildung 11.2.: Modell des imperfekten Reflektometers

**Aufgabe 11.1** Berechnen Sie die Streuparameter  $\underline{E}_{0,0}$ ,  $\underline{E}_{0,1}$ ,  $\underline{E}_{1,0}$  und  $\underline{E}_{1,1}$  des Fehlerzweitors als Funktionen der Streuparameter des Viertors und der Reflexionsfaktoren der Messstellen! Wie vereinfachen sich die Ergebnisse, wenn das Viertor ein Richtkoppler ist, siehe Abschnitt 10.4.2? Wie vereinfachen sich die Ergebnisse im Falle reflexionsfreier Messstellen  $\underline{\Gamma}_a = 0$  und  $\underline{\Gamma}_b = 0$ ?

### 11.1.2. Reflektometerfehlerkorrektur

Mit der Transmissionsmatrix (9.21) des Fehlerzweitors mit den Streuparametern gemäß (11.10), siehe Abbildung 11.2, kann man die am Messobjekt anliegenden komplexen Wellenamplituden aus den vom virtuellen idealen Reflektometer gemessenen komplexen Wellenamplituden berechnen:

$$\begin{pmatrix} \underline{a} \\ \underline{b} \end{pmatrix} = \frac{1}{\underline{E}_{1,0}} \begin{pmatrix} -\det(\underline{\mathbf{E}}) & \underline{E}_{0,0} \\ -\underline{E}_{1,1} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{a}' \\ \underline{b}' \end{pmatrix}. \quad (11.11)$$

Man beachte, dass die Vektorelemente und entsprechend auch die Matrixelemente gegenüber der Definition der Transmissionsmatrix in (9.20) vertauscht sind, was sich später in (11.24) als vorteilhaft erweisen wird.

Für den Reflexionsfaktor (11.1) des Messobjekts folgt

$$\underline{\Gamma}_{\text{DUT}} = \frac{\underline{b}}{\underline{a}} = \frac{\underline{b}' - \underline{E}_{1,1}\underline{a}'}{\underline{E}_{0,0}\underline{b}' - \det(\underline{\mathbf{E}})\underline{a}'} = \frac{\underline{\Gamma}'_{\text{DUT}} - \underline{E}_{1,1}}{\underline{E}_{0,0}\underline{\Gamma}'_{\text{DUT}} - \det(\underline{\mathbf{E}})}, \quad (11.12)$$

das heißt bei Kenntnis der drei Fehlerterme  $\det(\underline{\mathbf{F}})$ ,  $\underline{E}_{0,0}$  und  $\underline{E}_{1,1}$  kann man den Reflexionsfaktor  $\underline{\Gamma}_{\text{DUT}}$  des Messobjekts aus den gemessenen komplexen Wellenamplituden  $\underline{a}'$  und  $\underline{b}'$  oder dem gemessenen Reflexionsfaktor  $\underline{\Gamma}'_{\text{DUT}}$  gemäß (11.2) berechnen. Man spricht daher auch vom 3-Term-Fehlermodell. In der Literatur [Hie11] wird der Anschauung wegen üblicherweise statt  $\det(\underline{\mathbf{F}})$  der bei Kenntnis der übrigen Fehlerterme  $\underline{E}_{0,0}$  und  $\underline{E}_{1,1}$  äquivalente Fehlerterm

$$\underline{E}_{0,1}\underline{E}_{1,0} = \underline{E}_{0,0}\underline{E}_{1,1} - \det(\underline{\mathbf{F}})$$

verwendet. Die Fehlerterme werden dann wie folgt bezeichnet:

**Reflexionsgleichlauf:**  $\underline{E}_{0,1}\underline{E}_{1,0}$

**Direktivität:**  $\underline{E}_{1,1}$

**Messtoranpassung:**  $\underline{E}_{0,0}$

Bemerkenswert ist, dass nur das Produkt  $\underline{E}_{0,1}\underline{E}_{1,0}$ , nicht aber  $\underline{E}_{0,1}$  und  $\underline{E}_{1,0}$  für die Korrekturrechnung (11.12) benötigt werden.

Die drei Fehlerterme bestimmt man durch Messungen an drei Kalibrierstandards exakt bekannten Reflexionsfaktors. Beim OSM-Verfahren verwendet man folgende Kalibrierstandards:

**Leerlauf (OPEN):** wahrer Reflexionsfaktor  $\underline{\Gamma}_{\text{O}}$ , gemessener Reflexionsfaktor  $\underline{\Gamma}'_{\text{O}}$

**Kurzschluss (SHORT):** wahrer Reflexionsfaktor  $\underline{\Gamma}_{\text{S}}$ , gemessener Reflexionsfaktor  $\underline{\Gamma}'_{\text{S}}$

**Abschluss (MATCH):** wahrer Reflexionsfaktor  $\underline{\Gamma}_{\text{M}}$ , gemessener Reflexionsfaktor  $\underline{\Gamma}'_{\text{M}}$

Reale Kalibrierstandards wie die in Abbildung 11.3 gezeigten haben in nicht vernachlässigbarer Weise von den Reflexionsfaktoren eines idealen Leerlaufs, Kurzschlusses beziehungsweise Abschlusses abweichende Reflexionsfaktoren. Neben einer gewissen Leitungslänge zwischen der Bezugsebene im Steckverbinder und dem eigentlichen Kalibrierstandard sind insbesondere Streukapazitäten des offenen Leitungsendes im Leerlauf signifikant. Hersteller von Kalibrierstandards legen daher für jeden Kalibrierstandard individuell mit geeichten Messgeräten bei verschiedenen Kreisfrequenzen  $\omega$  gemessene Kalibrierdaten bei. Das im Folgenden beschriebene Verfahren zum Ermitteln der Fehlerterme ist von den konkreten Kalibrierstandards unabhängig und kann somit Imperfektionen der Kalibrierstandards berücksichtigen.



Abbildung 11.3.: Kalibrierkit bestehend aus Leerlauf, Kurzschluss, Abschluss und Durchverbindung jeweils als Buchse und als Stecker und einem Drehmomentschlüssel zum definierten Anziehen der Steckverbinder

Aus (11.12) folgt

$$\underline{\Gamma}' \underline{\Gamma} \underline{E}_{0,0} - \underline{\Gamma} \det(\underline{\mathbf{F}}) = \underline{\Gamma}' - \underline{E}_{1,1}. \quad (11.13)$$

Dies ist eine lineare Gleichung für die drei Fehlerterme  $\det(\underline{\mathbf{F}})$ ,  $\underline{E}_{0,0}$  und  $\underline{E}_{1,1}$ , in welcher der wahre Reflexionsfaktor  $\underline{\Gamma}$  und der zugehörige gemessene Reflexionsfaktor  $\underline{\Gamma}'$  vorkommen. Durch Einsetzen der drei Paare wahrer und gemessener Reflexionsfaktoren der drei Kalibrierstandards erhält man ein eindeutig lösbares lineares Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \underline{\Gamma}'_O \\ \underline{\Gamma}'_S \\ \underline{\Gamma}'_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \underline{\Gamma}'_O \underline{\Gamma}_O & -\underline{\Gamma}_O \\ 1 & \underline{\Gamma}'_S \underline{\Gamma}_S & -\underline{\Gamma}_S \\ 1 & \underline{\Gamma}'_M \underline{\Gamma}_M & -\underline{\Gamma}_M \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{E}_{1,1} \\ \underline{E}_{0,0} \\ \det(\underline{\mathbf{F}}) \end{pmatrix}.$$

Die Lösung ist

$$\begin{pmatrix} \underline{E}_{1,1} \\ \underline{E}_{0,0} \\ \det(\underline{\mathbf{F}}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \underline{\Gamma}'_O \underline{\Gamma}_O & -\underline{\Gamma}_O \\ 1 & \underline{\Gamma}'_S \underline{\Gamma}_S & -\underline{\Gamma}_S \\ 1 & \underline{\Gamma}'_M \underline{\Gamma}_M & -\underline{\Gamma}_M \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \underline{\Gamma}'_O \\ \underline{\Gamma}'_S \\ \underline{\Gamma}'_M \end{pmatrix}. \quad (11.14)$$

Falls mehr als die minimal erforderlichen drei Kalibrierstandards verwendet werden, kann man die zusätzlichen Messwerte im Rahmen einer Ausgleichsrechnung zur Messfehlerreduktion nutzen.

**Aufgabe 11.2** *Wie vereinfachen sich die Gleichungen (11.14) zum Berechnen der drei Fehlerterme  $\det(\underline{\mathbf{E}})$ ,  $\underline{E}_{0,0}$  und  $\underline{E}_{1,1}$ , falls ideale Kalibrierstandards  $\underline{\Gamma}_O = 1$ ,  $\underline{\Gamma}_S = -1$  und  $\underline{\Gamma}_M = 0$  verwendet werden?*

## 11.2. Vektornetzwerkanalysator

### 11.2.1. Aufbau eines Vektornetzwerkanalysators

Ein Vektornetzwerkanalysator zum Messen der Streuparameter eines Zweitorts besteht im Wesentlichen aus zwei Reflektometern mit insgesamt vier Messstellen, siehe Abbildung 11.4. Man spricht von einem vollwertigen Vektornetzwerkanalysator. Es gibt auch vereinfachte Vektornetzwerkanalysatoren mit weniger Messstellen [Mar97], siehe Abschnitt 11.2.4. Hier ergeben sich jedoch Einschränkungen bei den Fehlerkorrekturmöglichkeiten. Zunächst wird nur der vollwertige Vektornetzwerkanalysator mit zwei Messtoren betrachtet. Heutige Vektornetzwerkanalysatoren enthalten darüber hinaus einen Rechner, der die Messwerte verarbeitet, siehe Abbildung 11.5. Außer einer graphischen Darstellung der Messergebnisse wird insbesondere die Fehlerkorrektur vollautomatisch durchgeführt. Auch weiterführende Messwertverarbeitungen wie Berechnen der modalen Streuparameter und Berechnen der Impedanzmatrizen und der Admittanzmatrizen, siehe Kapitel 9.1, sind heute Standard.

Der Umschalter in Abbildung 11.4 dient dazu, zwei verschiedene Testsignale zu erzeugen. Im Idealfall würde in der gezeigten Schalterstellung I nur an Messtor 1 ein Testsignal anliegen und nach Umschalten in Stellung II würde nur an Messtor 2 ein Testsignal anliegen. Das heißt man würde das Messobjekt einmal in Vorwärtsrichtung und einmal in Rückwärtsrichtung messen. Wären neben dem Umschalter auch die direktiven Elemente perfekt, so könnte man aus den Ergebnissen der Messung in Vorwärtsrichtung die Streuparameter

$$\underline{S}'_{1,1} = \frac{\underline{b}'_{11}}{\underline{a}'_{11}}$$

und

$$\underline{S}'_{2,1} = \frac{\underline{b}'_{12}}{\underline{a}'_{11}}$$

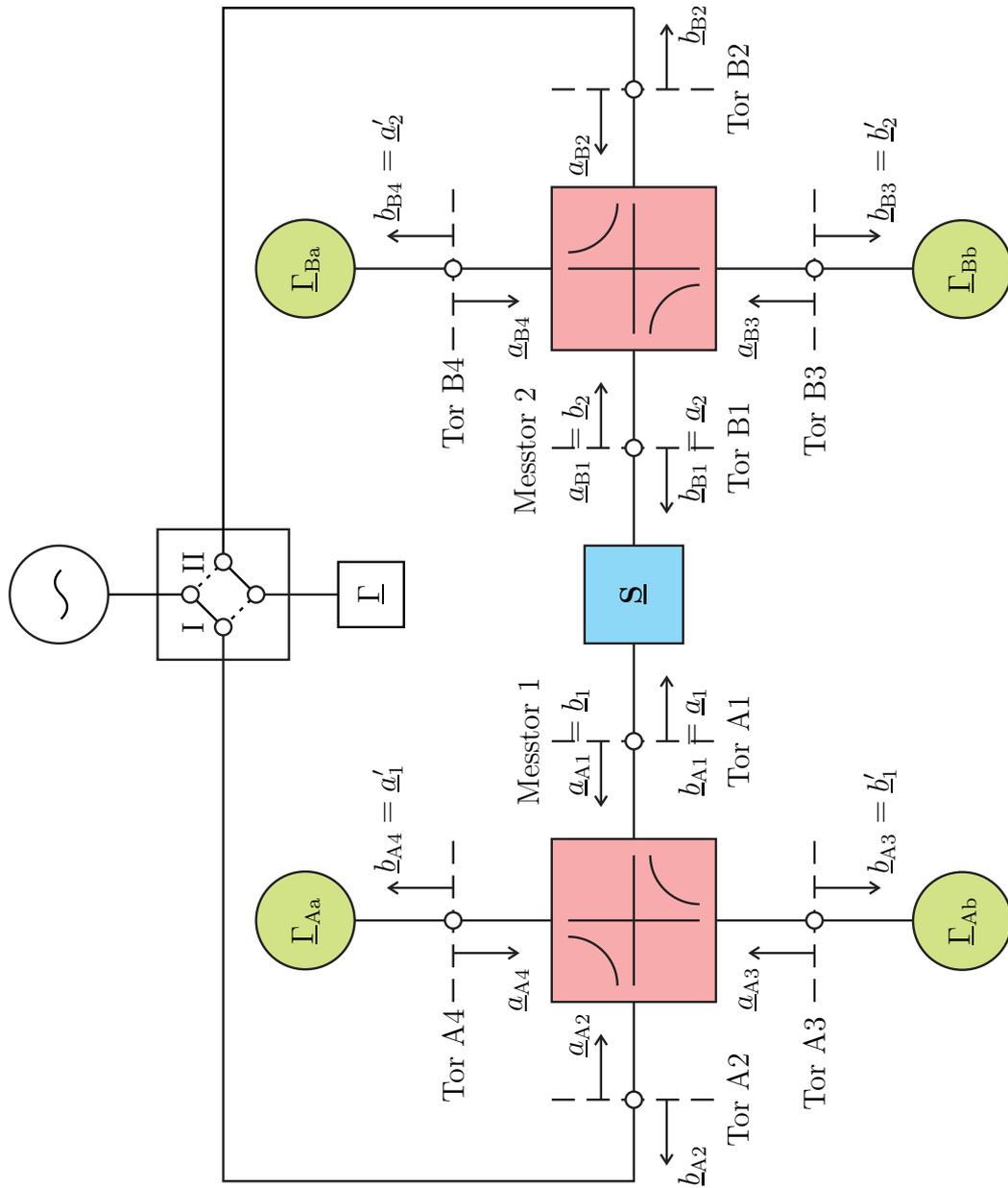


Abbildung 11.4.: Vollwertiger Vektornetzwerkanalysator mit zwei Messtoren und vier Messstellen



Abbildung 11.5.: Vektornetzwerkanalysator mit vier Messtoren

berechnen, siehe (9.4). Dual erhalte man aus den Ergebnissen der Messung in Rückwärtsrichtung die Streuparameter

$$\underline{S}'_{2,2} = \frac{b'_{112}}{a'_{112}}$$

und

$$\underline{S}'_{1,2} = \frac{b'_{111}}{a'_{112}}.$$

In der Realität gibt es ein Übersprechen am Umschalter, so dass immer an beiden Messtoren Testsignale anliegen. Für das im Folgenden beschriebene Messverfahren ist dies kein Problem, da keine speziellen Annahmen über die Art der Testsignale gemacht werden. Weiterhin sind die direktiven Elemente nicht perfekt. Für jedes Reflektometer kann man wieder wie in Abschnitt 11.1.1 beschrieben eine Viertor-Zweitorduktion durchführen. Man erhält als Ergebnis das in Abbildung 11.6 dargestellte Modell des imperfekten Vektornetzwerkanalysators. Zwischen die beiden Messtore eines virtuellen idealen Vektornetzwerkanalysators und die Tore des Messobjekts ist jeweils ein Fehlerzweitord geschaltet.

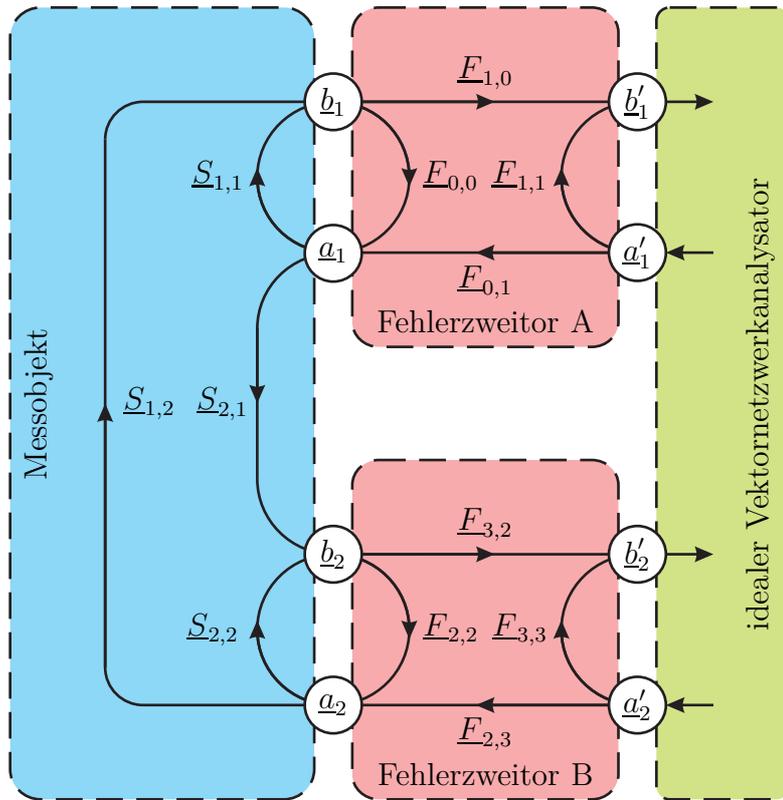


Abbildung 11.6.: Modell des imperfekten Vektornetzwerkanalysators

Die Determinanten der Streumatrizen der Fehlerzweige sind

$$\det(\underline{\mathbf{F}}_A) = \underline{F}_{0,0}\underline{F}_{1,1} - \underline{F}_{0,1}\underline{F}_{1,0}$$

und

$$\det(\underline{\mathbf{F}}_B) = \underline{F}_{2,2}\underline{F}_{3,3} - \underline{F}_{2,3}\underline{F}_{3,2}.$$

Mit den Transmissionsmatrizen der Fehlerzweige erhält man

$$\begin{pmatrix} \underline{a}_1 \\ \underline{b}_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\underline{F}_{1,0}} \underbrace{\begin{pmatrix} -\det(\underline{\mathbf{F}}_A) & \underline{F}_{0,0} \\ -\underline{F}_{1,1} & 1 \end{pmatrix}}_{\underline{\mathbf{A}}} \cdot \begin{pmatrix} \underline{a}'_1 \\ \underline{b}'_1 \end{pmatrix} \quad (11.15)$$

und

$$\begin{pmatrix} \underline{b}_2 \\ \underline{a}_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\underline{F}_{3,2}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -\underline{F}_{3,3} \\ \underline{F}_{2,2} & -\det(\underline{\mathbf{F}}_B) \end{pmatrix}}_{\underline{\mathbf{B}}} \cdot \begin{pmatrix} \underline{b}'_2 \\ \underline{a}'_2 \end{pmatrix}, \quad (11.16)$$

vergleiche (11.11). Die Fehlerzweitoren entsprechen wieder keinen direkt physikalisch vorhandenen Zweitoren und sind daher im Allgemeinen auch nicht reziprok.

Das Verhalten des Messobjekts wird gemäß (9.4) durch seine Streumatrix beschrieben:

$$\begin{pmatrix} \underline{b}_1 \\ \underline{b}_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \underline{S}_{1,1} & \underline{S}_{1,2} \\ \underline{S}_{2,1} & \underline{S}_{2,2} \end{pmatrix}}_{\underline{\mathbf{S}}_{\text{DUT}}} \cdot \begin{pmatrix} \underline{a}_1 \\ \underline{a}_2 \end{pmatrix}. \quad (11.17)$$

### 11.2.2. Vektornetzwerkanalysatorfehlerkorrektur

Mit Hilfe der Transmissionsmatrizen kann man die am Messobjekt anliegenden komplexen Wellenamplituden aus den vom virtuellen idealen Vektornetzwerkanalysator gemessenen komplexen Wellenamplituden berechnen. Nach Multiplikation aller Gleichungen in (11.15) und (11.16) mit  $\underline{F}_{1,0}$  erhält man:

$$\underline{F}_{1,0}\underline{a}_1 = -\det(\underline{\mathbf{F}}_{\text{A}}) \underline{a}'_1 + \underline{F}_{0,0}\underline{b}'_1, \quad (11.18)$$

$$\underline{F}_{1,0}\underline{b}_1 = -\underline{F}_{1,1}\underline{a}'_1 + \underline{b}'_1, \quad (11.19)$$

$$\underline{F}_{1,0}\underline{b}_2 = \frac{\underline{F}_{1,0}}{\underline{F}_{3,2}}\underline{b}'_2 - \frac{\underline{F}_{1,0}\underline{F}_{3,3}}{\underline{F}_{3,2}}\underline{a}'_2, \quad (11.20)$$

$$\underline{F}_{1,0}\underline{a}_2 = \frac{\underline{F}_{1,0}\underline{F}_{2,2}}{\underline{F}_{3,2}}\underline{b}'_2 - \frac{\underline{F}_{1,0}\det(\underline{\mathbf{F}}_{\text{B}})}{\underline{F}_{3,2}}\underline{a}'_2. \quad (11.21)$$

Beim Messen in Schalterstellung I erhält man die Messwerte  $\underline{a}'_{\text{I1}}$ ,  $\underline{b}'_{\text{I1}}$ ,  $\underline{a}'_{\text{I2}}$  und  $\underline{b}'_{\text{I2}}$  und beim Messen in Schalterstellung II erhält man die Messwerte  $\underline{a}'_{\text{II1}}$ ,  $\underline{b}'_{\text{II1}}$ ,  $\underline{a}'_{\text{II2}}$  und  $\underline{b}'_{\text{II2}}$ . Aus diesen Messwerten berechnet man die zugehörigen, am Messobjekt anliegenden und mit  $\underline{F}_{1,0}$  skalierten komplexen Wellenamplituden  $\underline{F}_{1,0}\underline{a}_{\text{I1}}$ ,  $\underline{F}_{1,0}\underline{b}_{\text{I1}}$ ,  $\underline{F}_{1,0}\underline{a}_{\text{I2}}$ ,  $\underline{F}_{1,0}\underline{b}_{\text{I2}}$ ,  $\underline{F}_{1,0}\underline{a}_{\text{II1}}$ ,  $\underline{F}_{1,0}\underline{b}_{\text{II1}}$ ,  $\underline{F}_{1,0}\underline{a}_{\text{II2}}$  und  $\underline{F}_{1,0}\underline{b}_{\text{II2}}$ . Durch Kombination der Ergebnisse aus beiden Messungen erhält man mit (11.17)

$$\begin{pmatrix} \underline{F}_{1,0}\underline{b}_{\text{I1}} & \underline{F}_{1,0}\underline{b}_{\text{II1}} \\ \underline{F}_{1,0}\underline{b}_{\text{I2}} & \underline{F}_{1,0}\underline{b}_{\text{II2}} \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{S}}_{\text{DUT}} \cdot \begin{pmatrix} \underline{F}_{1,0}\underline{a}_{\text{I1}} & \underline{F}_{1,0}\underline{a}_{\text{II1}} \\ \underline{F}_{1,0}\underline{a}_{\text{I2}} & \underline{F}_{1,0}\underline{a}_{\text{II2}} \end{pmatrix} \quad (11.22)$$

und schließlich

$$\underline{\mathbf{S}}_{\text{DUT}} = \begin{pmatrix} \underline{F}_{1,0}\underline{b}_{\text{I1}} & \underline{F}_{1,0}\underline{b}_{\text{II1}} \\ \underline{F}_{1,0}\underline{b}_{\text{I2}} & \underline{F}_{1,0}\underline{b}_{\text{II2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{F}_{1,0}\underline{a}_{\text{I1}} & \underline{F}_{1,0}\underline{a}_{\text{II1}} \\ \underline{F}_{1,0}\underline{a}_{\text{I2}} & \underline{F}_{1,0}\underline{a}_{\text{II2}} \end{pmatrix}^{-1}. \quad (11.23)$$

Zum Berechnen der Streumatrix  $\underline{\mathbf{S}}_{\text{DUT}}$  des Messobjekts aus den Messergebnissen werden die sieben Fehlerterme  $\det(\underline{\mathbf{F}}_{\text{A}})$ ,  $\underline{F}_{0,0}$ ,  $\underline{F}_{1,1}$ ,  $\underline{F}_{1,0}\det(\underline{\mathbf{F}}_{\text{B}})/\underline{F}_{3,2}$ ,  $\underline{F}_{1,0}\underline{F}_{2,2}/\underline{F}_{3,2}$ ,  $\underline{F}_{1,0}\underline{F}_{3,3}/\underline{F}_{3,2}$  und  $\underline{F}_{1,0}/\underline{F}_{3,2}$  benötigt. Man spricht auch vom 7-Term-Fehlermodell. In der Literatur [Hie11] werden der Anschauung wegen die folgenden sieben äquivalenten Fehlerterme verwendet:

**Reflexionsgleichlauf:**  $\underline{F}_{0,1}\underline{F}_{1,0}$  und  $\underline{F}_{2,3}\underline{F}_{3,2}$

**Transmissionsgleichlauf:**  $\underline{F}_{0,1}\underline{F}_{3,2}$

**Direktivität:**  $\underline{F}_{1,1}$  und  $\underline{F}_{2,2}$

**Messtoranpassung:**  $\underline{F}_{0,0}$  und  $\underline{F}_{3,3}$

Sofern die Transmissionsmatrix  $\mathbf{T}_{\text{DUT}}$  des Messobjekts gemäß (9.21) existiert, das heißt  $\underline{S}_{2,1}$  nicht Null ist, sind die Messwerte an Messtor 1 und an Messtor 2 durch

$$\begin{pmatrix} \underline{a}'_1 \\ \underline{b}'_1 \end{pmatrix} = \underbrace{\frac{\underline{F}_{1,0}}{\underline{F}_{3,2}} \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{T}_{\text{DUT}} \cdot \mathbf{B}}_{\mathbf{T}'_{\text{DUT}}} \cdot \begin{pmatrix} \underline{b}'_2 \\ \underline{a}'_2 \end{pmatrix} \quad (11.24)$$

miteinander verknüpft, siehe (11.15), (11.16) und (9.20). Kombinieren der Ergebnisse beider Messungen ergibt

$$\begin{pmatrix} \underline{a}'_{\text{I1}} & \underline{a}'_{\text{II1}} \\ \underline{b}'_{\text{I1}} & \underline{b}'_{\text{II1}} \end{pmatrix} = \mathbf{T}'_{\text{DUT}} \cdot \begin{pmatrix} \underline{b}'_{\text{I2}} & \underline{b}'_{\text{II2}} \\ \underline{a}'_{\text{I2}} & \underline{a}'_{\text{II2}} \end{pmatrix}.$$

Hieraus kann man die gemessene Transmissionsmatrix

$$\mathbf{T}'_{\text{DUT}} = \begin{pmatrix} \underline{a}'_{\text{I1}} & \underline{a}'_{\text{II1}} \\ \underline{b}'_{\text{I1}} & \underline{b}'_{\text{II1}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{b}'_{\text{I2}} & \underline{b}'_{\text{II2}} \\ \underline{a}'_{\text{I2}} & \underline{a}'_{\text{II2}} \end{pmatrix}^{-1} \quad (11.25)$$

berechnen. Bei Kenntnis der Fehlerterme kann man die korrigierte Messung mittels Deembedding berechnen:

$$\mathbf{T}_{\text{DUT}} = \frac{\underline{F}_{3,2}}{\underline{F}_{1,0}} \mathbf{A} \cdot \mathbf{T}'_{\text{DUT}} \cdot \mathbf{B}^{-1}. \quad (11.26)$$

Die Fehlerterme sind durch Messungen an bekannten Kalibrierstandards zu bestimmen. Eine Messung an einem Zweitor bekannter Streumatrix  $\mathbf{S}$  ergibt gemäß (11.22) vier lineare Gleichungen

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} -\underline{F}_{1,1}\underline{a}'_{\text{I1}} + \underline{b}'_{\text{I1}} & -\underline{F}_{1,1}\underline{a}'_{\text{II1}} + \underline{b}'_{\text{II1}} \\ \frac{\underline{F}_{1,0}}{\underline{F}_{3,2}}\underline{b}'_{\text{I2}} - \frac{\underline{F}_{1,0}\underline{F}_{3,3}}{\underline{F}_{3,2}}\underline{a}'_{\text{I2}} & \frac{\underline{F}_{1,0}}{\underline{F}_{3,2}}\underline{b}'_{\text{II2}} - \frac{\underline{F}_{1,0}\underline{F}_{3,3}}{\underline{F}_{3,2}}\underline{a}'_{\text{II2}} \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{S} \cdot \begin{pmatrix} -\det(\mathbf{F}_A)\underline{a}'_{\text{I1}} + \underline{F}_{0,0}\underline{b}'_{\text{I1}} & -\det(\mathbf{F}_A)\underline{a}'_{\text{II1}} + \underline{F}_{0,0}\underline{b}'_{\text{II1}} \\ \frac{\underline{F}_{1,0}\underline{F}_{2,2}}{\underline{F}_{3,2}}\underline{b}'_{\text{I2}} - \frac{\underline{F}_{1,0}\det(\mathbf{F}_B)}{\underline{F}_{3,2}}\underline{a}'_{\text{I2}} & \frac{\underline{F}_{1,0}\underline{F}_{2,2}}{\underline{F}_{3,2}}\underline{b}'_{\text{II2}} - \frac{\underline{F}_{1,0}\det(\mathbf{F}_B)}{\underline{F}_{3,2}}\underline{a}'_{\text{II2}} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (11.27)$$

für die unbekanntes Fehlerterme. Eine Messung an einem Eintor bekannten Reflexionsfaktors  $\underline{\Gamma}$  an Messtor 1 oder Messtor 2 ergibt eine lineare Gleichung

$$-\underline{F}_{1,1}\underline{a}'_{I1} + \underline{b}'_{I1} = \underline{\Gamma} \left( -\det(\underline{\mathbf{F}}_A) \underline{a}'_{I1} + \underline{F}_{0,0}\underline{b}'_{I1} \right) \quad (11.28)$$

beziehungsweise

$$\frac{\underline{F}_{1,0}}{\underline{F}_{3,2}}\underline{b}'_{II2} - \frac{\underline{F}_{1,0}\underline{F}_{3,3}}{\underline{F}_{3,2}}\underline{a}'_{II2} = \underline{\Gamma} \left( \frac{\underline{F}_{1,0}\underline{F}_{2,2}}{\underline{F}_{3,2}}\underline{b}'_{II2} - \frac{\underline{F}_{1,0}\det(\underline{\mathbf{F}}_B)}{\underline{F}_{3,2}}\underline{a}'_{II2} \right) \quad (11.29)$$

für die unbekanntes Fehlerterme. Man beachte, dass (11.28) exakt der Grundgleichung (11.13) der Reflektometerkalibrierung entspricht. Durch Messungen an hinreichend vielen bekannten Kalibrierstandards sind sieben linear unabhängige Gleichungen zu gewinnen. Aus dem so erhaltenen linearen Gleichungssystem können dann die Fehlerterme berechnet werden. Falls mehr als die minimal erforderliche Anzahl an Gleichungen gewonnen wird, kann man die zusätzlichen Messwerte im Rahmen einer Ausgleichsrechnung zur Messfehlerreduktion nutzen. Je nach der Art der verwendeten Kalibrierstandards erhält man so eine Vielfalt unterschiedlicher Kalibrierverfahren. Ein bekanntes Beispiel ist das TOSM-Verfahren. Hier werden zunächst durch OSM-Messungen an beiden Toren insgesamt sechs Gleichungen gewonnen. Durch Messungen in Vorwärtsrichtung und in Rückwärtsrichtung an einem bekannten

**Verbindungsstück (THROUGH):** mit der wahren Streumatrix  $\underline{\mathbf{S}}_T$

können vier weitere Gleichungen gewonnen werden.

### 11.2.3. Verwenden teilweise unbekannter Kalibrierstandards

Als Selbstkalibrierung bezeichnet man Verfahren mit teilweise unbekanntes Kalibrierstandards. Vorteilhafterweise setzt man nur die zuverlässig reproduzierbaren Eigenschaften der Kalibrierstandards als bekannt voraus. Ein bekanntes Verfahren mit teilweise unbekanntes Kalibrierstandards ist das UOSM-Verfahren [FP92]. Zunächst bestimmt man mit einer Reflektometerkalibrierung an Messtor 1 die in (11.15) eingeführte Matrix  $\underline{\mathbf{A}}$ . Als nächstes bestimmt man mit einer Reflektometerkalibrierung an Messtor 2 die in (11.16) eingeführte Matrix  $\underline{\mathbf{B}}$ . Zum Berechnen der korrigierten Messung mit (11.26) fehlt jetzt nur noch die Kenntnis des Fehlerterms  $\underline{F}_{1,0}/\underline{F}_{3,2}$ . Zum Bestimmen dieses Fehlerterms  $\underline{F}_{1,0}/\underline{F}_{3,2}$  führt man eine Kalibriermessung mit einem weiteren, teilweise unbekanntes aber reziproken Kalibrierstandard durch:

**Unbekanntes Verbindungsstück (UNKNOWN THROUGH):** Für die wahre Transmissionsmatrix gilt aufgrund der Reziprozität  $\det(\underline{\mathbf{T}}_U) = 1$ , siehe (9.23). Die gemessene Transmissionsmatrix ist  $\underline{\mathbf{T}}'_U$ .

Mit (11.26) folgt<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} 1 = \det(\underline{\mathbf{T}}_U) &= \det\left(\frac{F_{3,2}}{F_{1,0}} \underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\mathbf{T}}'_U \cdot \underline{\mathbf{B}}^{-1}\right) = \left(\frac{F_{3,2}}{F_{1,0}}\right)^2 \det(\underline{\mathbf{A}}) \det(\underline{\mathbf{T}}'_U) \det(\underline{\mathbf{B}}^{-1}) \\ &= \left(\frac{F_{3,2}}{F_{1,0}}\right)^2 \frac{\det(\underline{\mathbf{A}}) \det(\underline{\mathbf{T}}'_U)}{\det(\underline{\mathbf{B}})} \end{aligned}$$

und schließlich der Fehlerterm

$$\frac{F_{1,0}}{F_{3,2}} = \pm \sqrt{\frac{\det(\underline{\mathbf{A}}) \det(\underline{\mathbf{T}}'_U)}{\det(\underline{\mathbf{B}})}}.$$

Damit folgt für die korrigierte Messung des Kalibrierstandards

$$\underline{\mathbf{T}}_U = \pm \sqrt{\frac{\det(\underline{\mathbf{B}})}{\det(\underline{\mathbf{A}}) \det(\underline{\mathbf{T}}'_U)}} \underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\mathbf{T}}'_U \cdot \underline{\mathbf{B}}^{-1}. \quad (11.30)$$

Das Vorzeichen des Fehlerterms  $F_{1,0}/F_{3,2}$  kann man anhand einer groben Kenntnis des für die Kalibriermessung verwendeten Verbindungsstücks ermitteln. Aus (9.21) folgt

$$\underline{S}_{U2,1} = \frac{1}{\underline{T}_{Ua,b}} = \pm \sqrt{\frac{\det(\underline{\mathbf{A}}) \det(\underline{\mathbf{T}}'_U)}{\det(\underline{\mathbf{B}})}} \frac{1}{[\underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\mathbf{T}}'_U \cdot \underline{\mathbf{B}}^{-1}]_{1,1}}. \quad (11.31)$$

Wenn man nun weiß, dass das Verbindungsstück kurz ist und die Phasenverschiebung somit gering sein sollte, so muss das Vorzeichen so gewählt werden, dass der Realteil von  $\underline{S}_{U2,1}$  positiv ist.

#### 11.2.4. Vereinfachter Vektornetzwerkanalysator

Abbildung 11.7 zeigt eine häufig eingesetzte vereinfachte Vektornetzwerkanalysatorarchitektur mit zwei Messtoren und drei Messstellen. Dem reduzierten Aufwand durch Entfall einer Messstelle, des Umschalters und des zweiten direktiven Elements steht der Nachteil gegenüber, dass das Messobjekt zwischen Messung in

---

<sup>1</sup>Für quadratische Matrizen  $\underline{\mathbf{A}}$  und  $\underline{\mathbf{B}}$  gilt  $\det(\underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\mathbf{B}}) = \det(\underline{\mathbf{A}}) \det(\underline{\mathbf{B}})$ .

Vorwärtsrichtung und Messung in Rückwärtsrichtung manuell umgedreht werden muss. Ohne eine Messung in Vorwärtsrichtung und eine Messung in Rückwärtsrichtung können nicht alle Streuparameter bestimmt werden und insbesondere ist keine vollständige Fehlerkorrektur möglich. Das heißt, selbst wenn man sich nur für die Streuparameter  $\underline{S}_{1,1}$  und  $\underline{S}_{2,1}$  in Vorwärtsrichtung interessiert, ist für die vollständige Fehlerkorrektur trotzdem auch eine Messung in Rückwärtsrichtung erforderlich.

Mit der Viertor-Zweitor-Reduktion erhält man die in Abbildung 11.8 gezeigten Modelle. In der Abbildung ist sowohl das Modell für die Messung in Vorwärtsrichtung als auch das Modell für die Messung in Rückwärtsrichtung gezeigt. Man beachte, dass die Modelle bei der Messung in Vorwärtsrichtung und bei der Messung in Rückwärtsrichtung die selben sind.

Aus (11.18), (11.19), (11.20) und (11.21) erhält man durch Nullsetzen von  $\underline{a}'_2$  die am Messobjekt anliegenden komplexen Wellenamplituden für die Messung in Vorwärtsrichtung:

$$\begin{aligned}\underline{F}_{1,0}\underline{a}_{I1} &= -\det(\underline{\mathbf{F}}_A)\underline{a}'_{I1} + \underline{F}_{0,0}\underline{b}'_{I1}, \\ \underline{F}_{1,0}\underline{b}_{I1} &= -\underline{F}_{1,1}\underline{a}'_{I1} + \underline{b}'_{I1}, \\ \underline{F}_{1,0}\underline{b}_{I2} &= \frac{\underline{F}_{1,0}}{\underline{F}_{3,2}}\underline{b}'_{I2}, \\ \underline{F}_{1,0}\underline{a}_{I2} &= \frac{\underline{F}_{1,0}\underline{F}_{2,2}}{\underline{F}_{3,2}}\underline{b}'_{I2}.\end{aligned}$$

Dual dazu erhält man für die Messung in Rückwärtsrichtung:

$$\begin{aligned}\underline{F}_{1,0}\underline{a}_{II2} &= -\det(\underline{\mathbf{F}}_A)\underline{a}'_{II2} + \underline{F}_{0,0}\underline{b}'_{II2}, \\ \underline{F}_{1,0}\underline{b}_{II2} &= -\underline{F}_{1,1}\underline{a}'_{II2} + \underline{b}'_{II2}, \\ \underline{F}_{1,0}\underline{b}_{II1} &= \frac{\underline{F}_{1,0}}{\underline{F}_{3,2}}\underline{b}'_{II1}, \\ \underline{F}_{1,0}\underline{a}_{II1} &= \frac{\underline{F}_{1,0}\underline{F}_{2,2}}{\underline{F}_{3,2}}\underline{b}'_{II1}.\end{aligned}$$

Bei Kenntnis der fünf Fehlerterme  $\det(\underline{\mathbf{F}}_A)$ ,  $\underline{F}_{0,0}$ ,  $\underline{F}_{1,1}$ ,  $\underline{F}_{1,0}\underline{F}_{2,2}/\underline{F}_{3,2}$ , und  $\underline{F}_{1,0}/\underline{F}_{3,2}$  kann man die Streumatrix  $\underline{\mathbf{S}}_{\text{DUT}}$  des Messobjekts wieder mit (11.23) berechnen. Man spricht vom 5-Term-Fehlermodell. In der Literatur [Hie11] werden abweichend die folgenden fünf äquivalenten Fehlerterme verwendet:

**Reflexionsgleichlauf:**  $\underline{F}_{0,1}\underline{F}_{1,0}$

**Transmissionsgleichlauf:**  $\underline{F}_{1,0}\underline{F}_{3,2}$

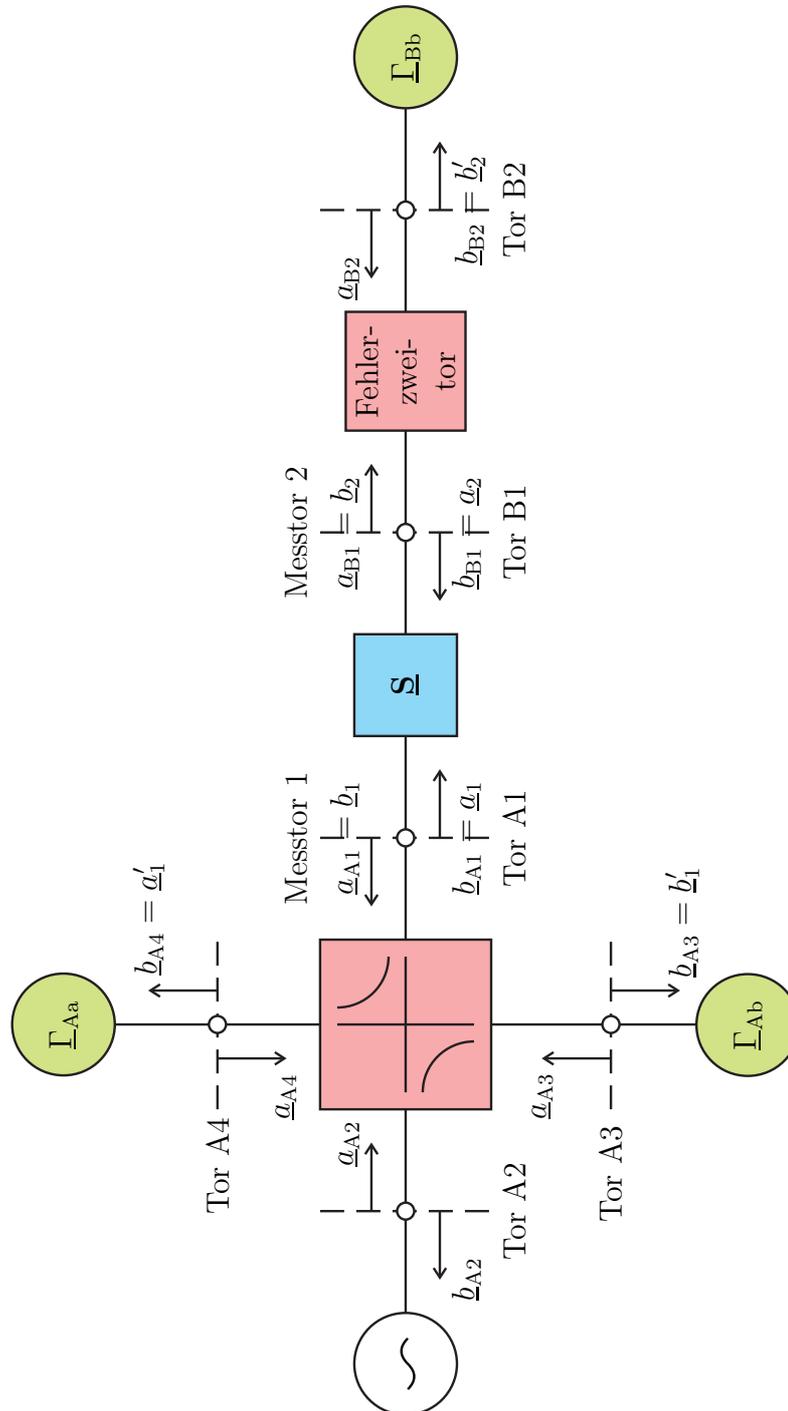
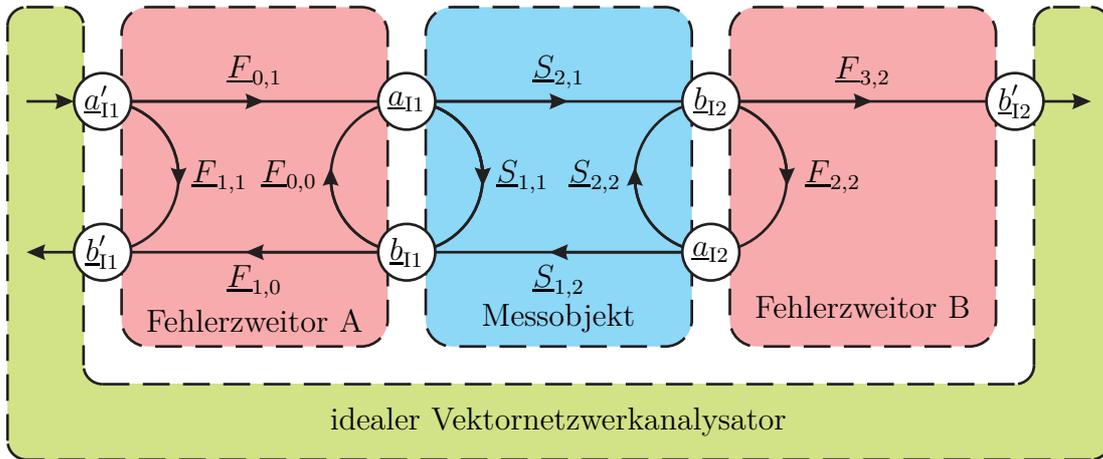
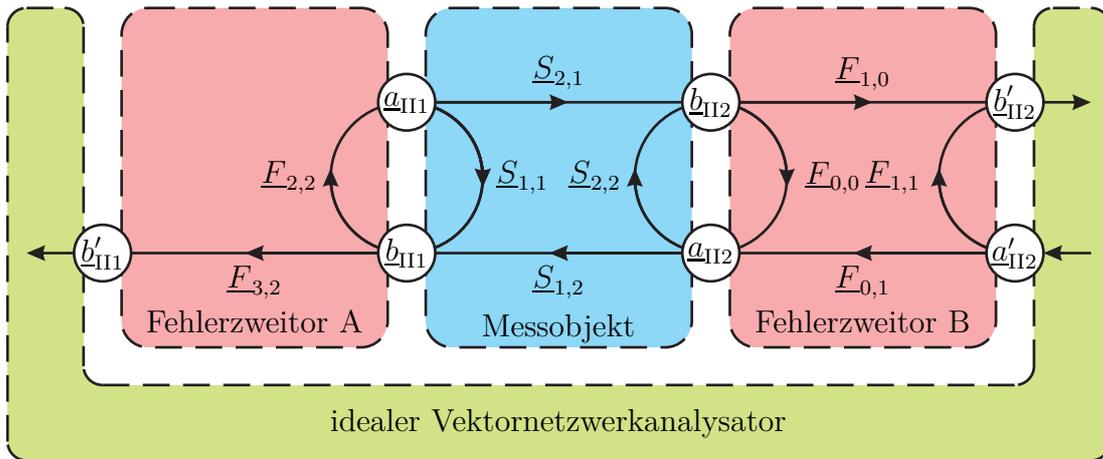


Abbildung 11.7.: Vereinfachter Vektornetzwerkanalysator mit zwei Messtoren und drei Messstellen



(a) Messung in Vorwärtsrichtung



(b) Messung in Rückwärtsrichtung

Abbildung 11.8.: Modell des imperfekten vereinfachten Vektornetzwerkanalysators

**Direktivität:**  $\underline{F}_{1,1}$

**Quelltoranpassung:**  $\underline{F}_{0,0}$

**Lasttoranpassung:**  $\underline{F}_{2,2}$

Die Fehlerterme sind wieder durch Messungen an bekannten Kalibrierstandards zu bestimmen. Eine Messung an einem Eintor bekannten Reflexionsfaktors  $\underline{\Gamma}$  an Messtor 1 ergibt eine lineare Gleichung

$$-\underline{F}_{1,1}\underline{a}'_{11} + \underline{b}'_{11} = \underline{\Gamma} \left( -\det(\underline{\mathbf{F}}_A) \underline{a}'_{11} + \underline{F}_{0,0}\underline{b}'_{11} \right) \quad (11.32)$$

für die unbekanntenen Fehlerterme, siehe (11.28). Man beachte, dass (11.32) wieder exakt der Grundgleichung (11.13) der Reflektometerkalibrierung entspricht. Durch OSM-Messungen kann man die Fehlerterme  $\det(\underline{\mathbf{F}}_A)$ ,  $\underline{F}_{0,0}$  und  $\underline{F}_{1,1}$  bestimmen. Die Messung eines Eintors an Messtor 2 ist wegen des fehlenden Testsignals sinnlos.

Eine Messung in Vorwärtsrichtung an einem Zweitore bekannter Streumatrix  $\underline{\mathbf{S}}$  ergibt nach (11.27) zwei lineare Gleichungen

$$\begin{pmatrix} -\underline{F}_{1,1}\underline{a}'_{11} + \underline{b}'_{11} \\ \frac{\underline{F}_{1,0}}{\underline{F}_{3,2}}\underline{b}'_{12} \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{S}} \cdot \begin{pmatrix} -\det(\underline{\mathbf{F}}_A) \underline{a}'_{11} + \underline{F}_{0,0}\underline{b}'_{11} \\ \frac{\underline{F}_{1,0}\underline{F}_{2,2}}{\underline{F}_{3,2}}\underline{b}'_{12} \end{pmatrix} \quad (11.33)$$

für die unbekanntenen Fehlerterme, wobei  $\underline{a}'_2$  wieder zu Null gesetzt wurde. Beim TOSM-Verfahren werden, nachdem die Fehlerterme  $\det(\underline{\mathbf{F}}_A)$ ,  $\underline{F}_{0,0}$  und  $\underline{F}_{1,1}$  durch OSM-Messungen bestimmt wurden, durch Messung an einer bekannten Durchverbindung die Fehlerterme  $\frac{\underline{F}_{1,0}\underline{F}_{2,2}}{\underline{F}_{3,2}}$  und  $\frac{\underline{F}_{1,0}}{\underline{F}_{3,2}}$  bestimmt. Eine Messung in Rückwärtsrichtung entspricht hier einem Umdrehen des Zweitores und ergibt nur bei nicht vertauschbaren Toren neue Gleichungen, die formal den Gleichungen der Messung in Vorwärtsrichtung entsprechen.

Es gibt auch hier nicht weiter betrachtete Vektornetzwerkanalysatoren mit drei Messstellen und einem internen Messrichtungsumschalter, bei denen in Vorwärtsrichtung und in Rückwärtsrichtung unterschiedliche Fehlermodelle zu berücksichtigen sind. Dies führt zu einem 10-Term-Fehlermodell [Hie11].

**Aufgabe 11.3** Berechnen Sie mit (11.33) und (11.32) die fünf Fehlerterme  $\det(\underline{\mathbf{F}}_A)$ ,  $\underline{F}_{0,0}$ ,  $\underline{F}_{1,1}$ ,  $\frac{\underline{F}_{1,0}\underline{F}_{2,2}}{\underline{F}_{3,2}}$  und  $\frac{\underline{F}_{1,0}}{\underline{F}_{3,2}}$  aus den gemessenen Streuparametern  $\underline{S}'_{T1,1}$  und  $\underline{S}'_{T2,1}$  und den gemessenen Reflexionsfaktoren  $\underline{\Gamma}'_O$ ,  $\underline{\Gamma}'_S$  und  $\underline{\Gamma}'_M$  für den Fall, dass ideale Kalibrierstandards

$$\underline{\mathbf{S}}_T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$\underline{\Gamma}_O = 1$ ,  $\underline{\Gamma}_S = -1$  und  $\underline{\Gamma}_M = 0$  verwendet werden!

# Kapitel 12.

## Hochfrequenzverstärker

### 12.1. Aufbau von Hochfrequenzverstärkern

Hochfrequenzverstärker werden heute überwiegend mit Transistoren realisiert. Es stehen eine Vielzahl von Transistortypen in verschiedenen Grundschaltungen zu Verfügung. Es gibt viele hier nicht diskutierte Möglichkeiten der Arbeitspunkteinstellung und Arbeitspunktstabilisierung [TSG16].

Der in Abbildung 12.1 dargestellte Signalpfad eines Hochfrequenzverstärkers besteht aus dem Transistor und den eingangsseitigen und ausgangseitigen Anpassnetzwerken. Im hier betrachteten Kleinsignalbetrieb können die Eigenschaften des dann näherungsweise linearen Transistors durch eine Streumatrix  $\underline{\mathbf{S}}$  beschrieben werden. Die Streumatrix  $\underline{\mathbf{S}}$  eines Transistors hängt unter anderem von dem Transistortyp, der gewählten Grundschaltung, dem Arbeitspunkt und der Kreisfrequenz  $\omega$  ab.

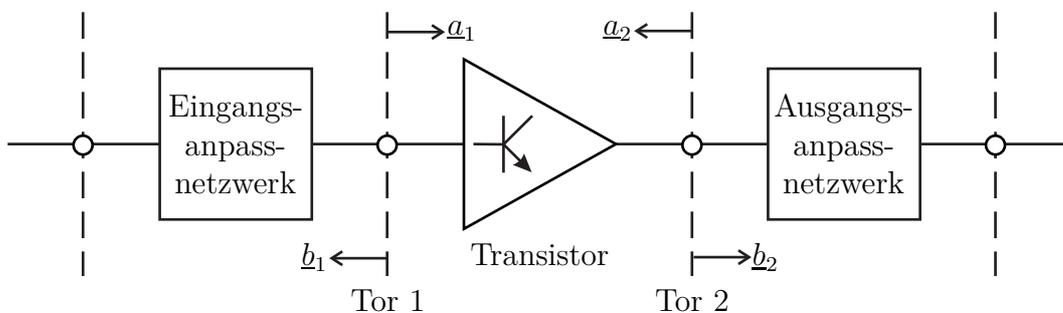


Abbildung 12.1.: Signalpfad eines Hochfrequenzverstärkers

Idealerweise wäre ein Hochfrequenzverstärker eigenreflexionsfrei  $\underline{S}_{1,1} = \underline{S}_{2,2} = 0$ , siehe (9.5), und rückwirkungsfrei  $\underline{S}_{1,2} = 0$ . Die Streumatrix  $\underline{\mathbf{S}}$  eines Transistors weicht üblicherweise von diesem Idealfall ab. Die Aufgabe der Anpassnetzwerke ist es, die Reflexionsfaktoren derart zu transformieren, dass das Gesamtsystem ein günstigeres Verhalten aufweist. Neben der möglichst guten eingangsseitigen und ausgangseitigen Anpassung, das heißt dem Minimieren der an den Toren

des Gesamtsystems sichtbaren Reflexionsfaktoren, ist die Stabilität ein wichtiger Aspekt. Im Gegensatz zur Anpassung, die nur bei der Kreisfrequenz  $\omega$  des zu verstärkenden Signals von Interesse ist, muss die Stabilität bei allen Kreisfrequenzen  $\omega$  gewährleistet sein. Die Anpassung hat einen Einfluss auf den Leistungsgewinn. Abhängig davon, wie Fehlanpassungen berücksichtigt werden, ergeben sich unterschiedliche Definitionen des Leistungsgewinns.

**Aufgabe 12.1** *Einen Transistor kann man zunächst als Dreitor modellieren, siehe Abbildung 12.2. Durch Kurzschließen eines der Tore, zum Beispiel Tor 3, erhält man eine der drei möglichen Grundschaltungen. Ermitteln Sie die Admittanzmatrix des so erhaltenen Zweitors als Funktion der Admittanzmatrix  $\underline{Y}$  des Dreitors! Kann man aus der Admittanzmatrix des Zweitors wieder die Admittanzmatrix  $\underline{Y}$  des Dreitors berechnen, wenn man berücksichtigt, dass der als Dreitor betrachtete Transistor ein massefreies Netzwerk ist?*

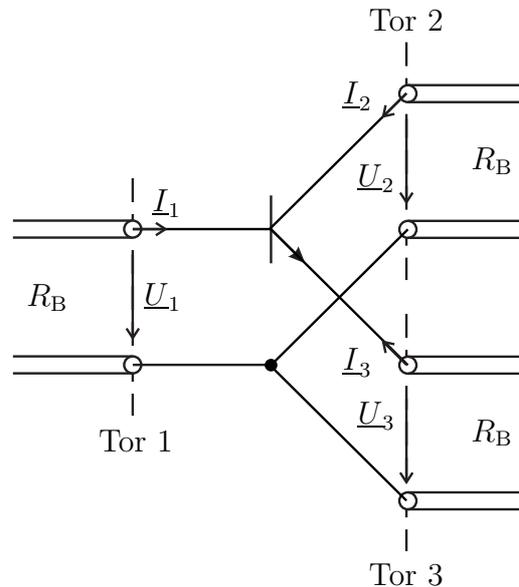


Abbildung 12.2.: Transistor als Dreitor

## 12.2. Leistungsabgabe von Eintorquellen

Als Vorbereitung für die Betrachtung von Zweitoren soll hier die Leistungsabgabe einer Quelle mit dem Quellenreflexionsfaktor  $\underline{\Gamma}_Q$  an eine passive Last mit dem Lastreflexionsfaktor  $\underline{\Gamma}_L$  analysiert werden. Wegen der Passivität gilt für den Betrag des Lastreflexionsfaktors  $|\underline{\Gamma}_L| < 1$ .

Aus dem Signalflussgraphen in Abbildung 12.3 liest man mit der Schleifenregel

$$\underline{b} = \frac{\underline{b}_Q}{1 - \underline{\Gamma}_Q \underline{\Gamma}_L}$$

ab, siehe Abbildung 9.3d. Weiterhin gilt

$$\underline{a} = \underline{\Gamma}_L \underline{b}.$$

Die von der Quelle an die Last abgegebene Leistung berechnet sich mit (7.28) zu

$$P = \frac{1}{2} |\underline{b}_Q|^2 \frac{1 - |\underline{\Gamma}_L|^2}{|1 - \underline{\Gamma}_Q \underline{\Gamma}_L|^2}. \quad (12.1)$$

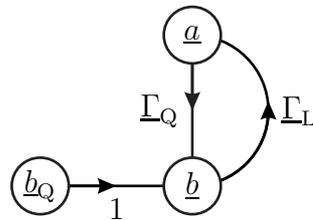


Abbildung 12.3.: Zusammenschalten von Quelle und Last

Für eine reflexionsfreie Last  $\underline{\Gamma}_L = 0$  ist die von der Quelle abgegebene Leistung  $P$  gleich der Leistung der Urwelle

$$P_0 = \frac{1}{2} |\underline{b}_Q|^2. \quad (12.2)$$

Die abgegebene Leistung  $P$  wird unendlich, wenn der Nenner  $|1 - \underline{\Gamma}_Q \underline{\Gamma}_L|^2$  Null wird. In diesem Fall ist das aus Quelle und Last bestehende System instabil. Man bezeichnet die Quelle als stabil, wenn das System für keine passive Last  $|\underline{\Gamma}_L| < 1$  instabil wird. Dies ist genau dann der Fall, wenn für den Quellenreflexionsfaktor

$$|\underline{\Gamma}_Q| < 1 \quad (12.3)$$

gilt. Die Stabilität einer Quelle sollte für alle Kreisfrequenzen  $\omega$  gewährleistet sein und wird im Folgenden vorausgesetzt.

Im Folgenden sollen die Orte konstanter Leistungsabgabe  $P$  in der Ebene des Lastreflexionsfaktors  $\underline{\Gamma}_L$  bestimmt werden. Aus (12.1) erhält man durch quadratische Ergänzung:

$$\begin{aligned}
 2(1 - \underline{\Gamma}_Q \underline{\Gamma}_L)(1 - \underline{\Gamma}_Q \underline{\Gamma}_L)^* P &= |\underline{b}_Q|^2 (1 - \underline{\Gamma}_L \underline{\Gamma}_L^*), \\
 \underline{\Gamma}_L \underline{\Gamma}_L^* (2P \underline{\Gamma}_Q \underline{\Gamma}_Q^* + |\underline{b}_Q|^2) - \underline{\Gamma}_L 2P \underline{\Gamma}_Q - \underline{\Gamma}_L^* 2P \underline{\Gamma}_Q^* &= |\underline{b}_Q|^2 - 2P, \\
 \left| \underline{\Gamma}_L - \frac{2P \underline{\Gamma}_Q^*}{2P \underline{\Gamma}_Q \underline{\Gamma}_Q^* + |\underline{b}_Q|^2} \right|^2 &= \frac{4P^2 \underline{\Gamma}_Q \underline{\Gamma}_Q^*}{(2P \underline{\Gamma}_Q \underline{\Gamma}_Q^* + |\underline{b}_Q|^2)^2} \\
 &\quad + \frac{|\underline{b}_Q|^2 - 2P}{2P \underline{\Gamma}_Q \underline{\Gamma}_Q^* + |\underline{b}_Q|^2}, \\
 \left| \underline{\Gamma}_L - \frac{2P \underline{\Gamma}_Q^*}{\underbrace{2P |\underline{\Gamma}_Q|^2 + |\underline{b}_Q|^2}_{\underline{M}}} \right|^2 &= \frac{|\underline{b}_Q|^2 (|\underline{b}_Q|^2 + 2P (|\underline{\Gamma}_Q|^2 - 1))}{\underbrace{(2P |\underline{\Gamma}_Q|^2 + |\underline{b}_Q|^2)^2}_{R^2}}.
 \end{aligned}$$

Dies ist die Gleichung eines Kreises mit Mittelpunkt

$$\underline{M} = \frac{2P \underline{\Gamma}_Q^*}{2P |\underline{\Gamma}_Q|^2 + |\underline{b}_Q|^2} \quad (12.4)$$

und Radius

$$R = \frac{|\underline{b}_Q| \sqrt{|\underline{b}_Q|^2 + 2P (|\underline{\Gamma}_Q|^2 - 1)}}{2P |\underline{\Gamma}_Q|^2 + |\underline{b}_Q|^2} \quad (12.5)$$

in der Ebene des Lastreflexionsfaktors  $\underline{\Gamma}_L$ , siehe Abbildung 12.4. Der Mittelpunkt  $\underline{M}$  liegt auf der Geraden durch  $\underline{\Gamma}_Q^*$  und den Ursprung, da die Argumente aller Mittelpunkte gleich sind:

$$\arg(\underline{M}) = \arg(\underline{\Gamma}_Q^*).$$

Die abgegebene Leistung  $P$  wird für genau einen optimalen Lastreflexionsfaktor  $\underline{\Gamma}_{\text{Lopt}}$  maximal. Durch Nullsetzen des Radius  $R$  erhält man die dann abgegebene

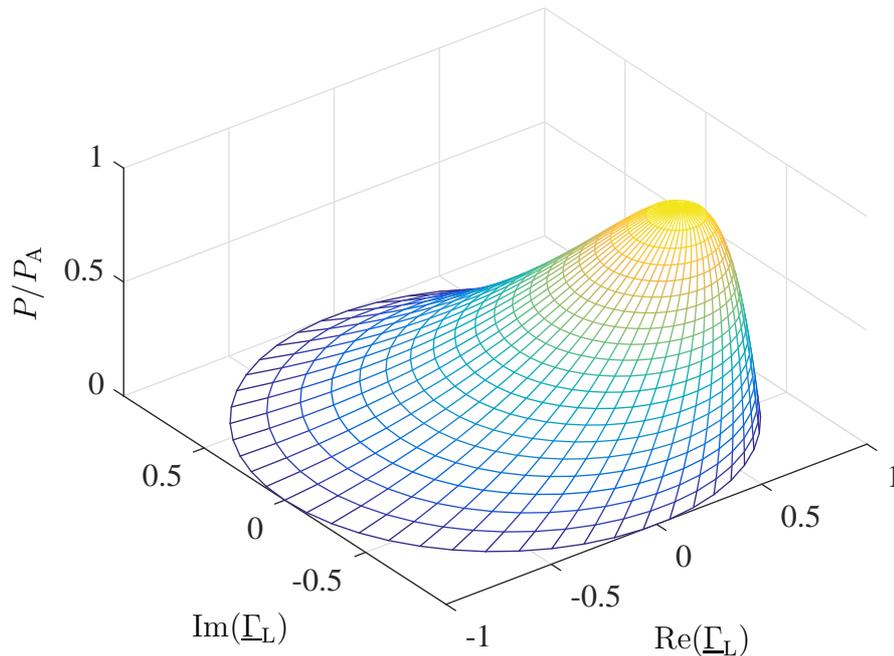


Abbildung 12.4.: Ausnutzungsfaktor als Funktion des Lastreflexionsfaktors  $\Gamma_L$ . Der Quellenreflexionsfaktor ist  $\Gamma_Q = 0,5 + j0,5$ . Die Höhenlinien sind Kreise konstanter Leistungsabgabe

verfügbare Leistung:

$$0 = |b_Q|^2 + 2P_A \left( |\Gamma_Q|^2 - 1 \right),$$

$$P_A = \frac{1}{2} |b_Q|^2 \frac{1}{1 - |\Gamma_Q|^2}. \quad (12.6)$$

Der Mittelpunkt  $\underline{M}$  des zur verfügbaren Leistung  $P_A$  gehörenden Kreises entspricht dem optimalen Lastreflexionsfaktor

$$\Gamma_{Lopt} = \frac{2P_A \Gamma_Q^*}{2P_A |\Gamma_Q|^2 + |b_Q|^2} = \Gamma_Q^*. \quad (12.7)$$

Dieses Ergebnis ist als Leistungsanpassung bekannt. Die bei einem beliebigen Lastreflexionsfaktor  $\Gamma_L$  abgegebene, als Ausnutzungsfaktor bezeichnete, normierte Leistung ergibt sich mit (12.1) zu

$$\frac{P}{P_A} = \frac{(1 - |\Gamma_L|^2)(1 - |\Gamma_Q|^2)}{|1 - \Gamma_Q \Gamma_L|^2}. \quad (12.8)$$

## 12.3. Stabilität von Zweitoren

### 12.3.1. Stabilitätskreise

In Anlehnung an (12.3) bezeichnet man ein Zweitor als an seinem Eingang stabil, wenn für den am Eingang sichtbaren Reflexionsfaktor

$$|\underline{\Gamma}_1| < 1 \quad (12.9)$$

gilt. Weiterhin bezeichnet man ein Zweitor als an seinem Ausgang stabil, wenn für den am Ausgang sichtbaren Reflexionsfaktor

$$|\underline{\Gamma}_2| < 1 \quad (12.10)$$

gilt. Man bezeichnet das Zweitor als stabil, wenn es sowohl am Eingang als auch am Ausgang stabil ist.

Die Analyse ist für beide Tore formal gleich. Hier wird zunächst die Transformation des Lastreflexionsfaktors  $\underline{\Gamma}_L$  durch das Zweitor in den eingangsseitig sichtbaren Reflexionsfaktor  $\underline{\Gamma}_1$  betrachtet. Aus dem Signalflussgraphen in Abbildung 12.5 liest man unter Verwenden der Vereinfachungsregeln aus Abbildung 9.3

$$\underline{\Gamma}_1 = \underline{S}_{1,1} + \frac{\underline{S}_{2,1}\underline{S}_{1,2}\underline{\Gamma}_L}{1 - \underline{S}_{2,2}\underline{\Gamma}_L} = \frac{\underline{S}_{1,1} - \det(\underline{\mathbf{S}})\underline{\Gamma}_L}{1 - \underline{S}_{2,2}\underline{\Gamma}_L} \quad (12.11)$$

ab. Dual erhält man für die Transformation des Quellenreflexionsfaktors  $\underline{\Gamma}_Q$  in den ausgangsseitig sichtbaren Reflexionsfaktor

$$\underline{\Gamma}_2 = \underline{S}_{2,2} + \frac{\underline{S}_{1,2}\underline{S}_{2,1}\underline{\Gamma}_Q}{1 - \underline{S}_{1,1}\underline{\Gamma}_Q} = \frac{\underline{S}_{2,2} - \det(\underline{\mathbf{S}})\underline{\Gamma}_Q}{1 - \underline{S}_{1,1}\underline{\Gamma}_Q}. \quad (12.12)$$

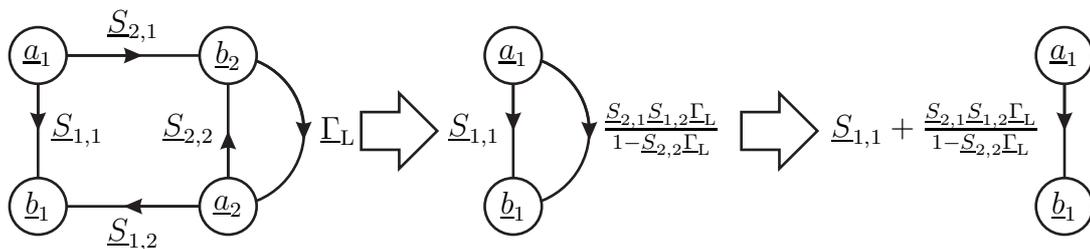


Abbildung 12.5.: Transformation des Lastreflexionsfaktors  $\underline{\Gamma}_L$  durch das Zweitor

Es stellt sich nun die Frage, in welchen Bereichen der Quellenreflexionsfaktor  $\underline{\Gamma}_Q$  und der Lastreflexionsfaktor  $\underline{\Gamma}_L$  liegen dürfen, so dass das Zweitor stabil ist.

Es handelt sich wieder um zwei mathematisch gleichartige Probleme. Zunächst wird der Lastreflexionsfaktor  $\underline{\Gamma}_L$  betrachtet. An den Orten der Stabilitätsgrenze  $|\underline{\Gamma}_1| = 1$  gilt:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\underline{S}_{1,1} - \det(\underline{\mathbf{S}}) \underline{\Gamma}_L}{1 - \underline{S}_{2,2} \underline{\Gamma}_L} \right| &= 1, \\ (\underline{S}_{1,1} - \det(\underline{\mathbf{S}}) \underline{\Gamma}_L) (\underline{S}_{1,1} - \det(\underline{\mathbf{S}}) \underline{\Gamma}_L)^* &= (1 - \underline{S}_{2,2} \underline{\Gamma}_L) (1 - \underline{S}_{2,2} \underline{\Gamma}_L)^*, \\ \underline{\Gamma}_L \underline{\Gamma}_L^* (\underline{S}_{2,2} \underline{S}_{2,2}^* - \det(\underline{\mathbf{S}}) \det(\underline{\mathbf{S}}^*)) & \\ + \underline{\Gamma}_L (\underline{S}_{1,1}^* \det(\underline{\mathbf{S}}) - \underline{S}_{2,2}) + \underline{\Gamma}_L^* (\underline{S}_{1,1} \det(\underline{\mathbf{S}}^*) - \underline{S}_{2,2}^*) &= \underline{S}_{1,1} \underline{S}_{1,1}^* - 1. \end{aligned}$$

Durch quadratische Ergänzung erhält man

$$\begin{aligned} \left| \underline{\Gamma}_L - \frac{\underline{S}_{2,2}^* - \underline{S}_{1,1} \det(\underline{\mathbf{S}}^*)}{\underbrace{\underline{S}_{2,2} \underline{S}_{2,2}^* - \det(\underline{\mathbf{S}}) \det(\underline{\mathbf{S}}^*)}_{\underline{M}_L}} \right|^2 &= \frac{\underline{S}_{1,1} \underline{S}_{1,1}^* - 1}{\underline{S}_{2,2} \underline{S}_{2,2}^* - \det(\underline{\mathbf{S}}) \det(\underline{\mathbf{S}}^*)} \\ &+ \frac{(\underline{S}_{2,2}^* - \underline{S}_{1,1} \det(\underline{\mathbf{S}}^*)) (\underline{S}_{2,2}^* - \underline{S}_{1,1} \det(\underline{\mathbf{S}}^*))^*}{(\underline{S}_{2,2} \underline{S}_{2,2}^* - \det(\underline{\mathbf{S}}) \det(\underline{\mathbf{S}}^*))^2} \\ &= \frac{\underline{S}_{2,1} \underline{S}_{2,1}^* \underline{S}_{1,2} \underline{S}_{1,2}^*}{\underbrace{(\underline{S}_{2,2} \underline{S}_{2,2}^* - \det(\underline{\mathbf{S}}) \det(\underline{\mathbf{S}}^*))^2}_{R_L^2}}. \end{aligned}$$

Man erkennt, dass die Orte der Stabilitätsgrenze  $|\underline{\Gamma}_1| = 1$  auf einem Stabilitätskreis mit Mittelpunkt

$$\underline{M}_L = \frac{\underline{S}_{2,2}^* - \underline{S}_{1,1} \det(\underline{\mathbf{S}}^*)}{|\underline{S}_{2,2}|^2 - |\det(\underline{\mathbf{S}})|^2} \quad (12.13)$$

und Radius

$$R_L = \left| \frac{\underline{S}_{2,1} \underline{S}_{1,2}}{|\underline{S}_{2,2}|^2 - |\det(\underline{\mathbf{S}})|^2} \right| \quad (12.14)$$

in der Ebene des Lastreflexionsfaktors  $\underline{\Gamma}_L$  liegen. Abbildung 12.6 zeigt einen exemplarischen Stabilitätskreis in der Ebene des Lastreflexionsfaktors  $\underline{\Gamma}_L$ . Ob das Innere oder das Äußere des Stabilitätskreises der stabile Bereich ist, überprüft man am einfachsten anhand eines markanten Punktes. Aus  $\underline{\Gamma}_L = 0$  folgt für den eingangsseitig sichtbaren Reflexionsfaktor  $\underline{\Gamma}_1 = \underline{S}_{1,1}$ . Das heißt für  $|\underline{S}_{1,1}| < 1$  liegt

der Ursprung der Ebene des Lastreflexionsfaktors  $\underline{\Gamma}_L$  im stabilen Bereich und für  $|\underline{S}_{1,1}| > 1$  liegt der Ursprung der Ebene des Lastreflexionsfaktors  $\underline{\Gamma}_L$  im instabilen Bereich. Da die Streuparameter im Allgemeinen frequenzabhängig sind, ist auch der Stabilitätskreis frequenzabhängig.

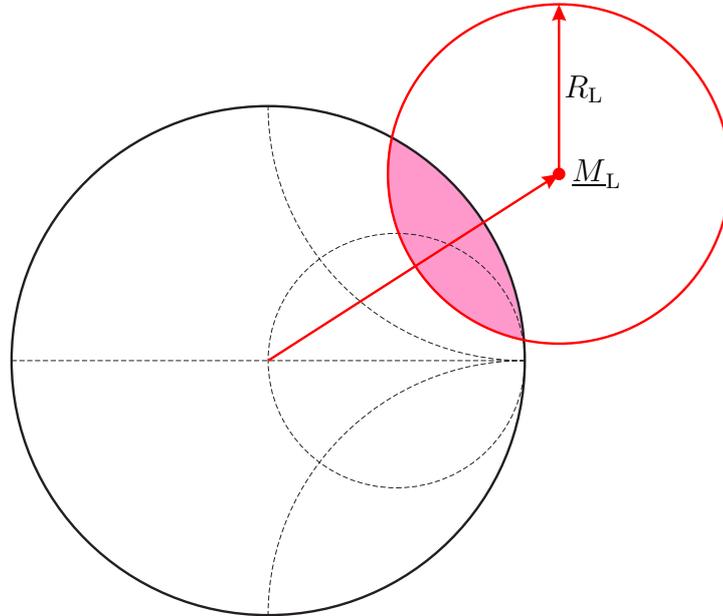


Abbildung 12.6.: Exemplarischer Stabilitätskreis mit eingefärbten instabilen Bereich in der Ebene des Lastreflexionsfaktors  $\underline{\Gamma}_L$ .  $|\underline{S}_{1,1}| < 1$

Dual erhält man den Mittelpunkt

$$\underline{M}_Q = \frac{\underline{S}_{1,1}^* - \underline{S}_{2,2} \det(\underline{\mathbf{S}}^*)}{|\underline{S}_{1,1}|^2 - |\det(\underline{\mathbf{S}})|^2} \quad (12.15)$$

und den Radius

$$R_Q = \left| \frac{\underline{S}_{1,2} \underline{S}_{2,1}}{|\underline{S}_{1,1}|^2 - |\det(\underline{\mathbf{S}})|^2} \right| \quad (12.16)$$

des Stabilitätskreises in der Ebene des Quellenreflexionsfaktors  $\underline{\Gamma}_Q$ . Für  $|\underline{S}_{2,2}| < 1$  liegt der Ursprung der Ebene des Quellenreflexionsfaktors  $\underline{\Gamma}_Q$  im stabilen Bereich und für  $|\underline{S}_{2,2}| > 1$  liegt der Ursprung der Ebene des Quellenreflexionsfaktors  $\underline{\Gamma}_Q$  im instabilen Bereich.

Sowohl der Quellenreflexionsfaktor  $\underline{\Gamma}_Q$  als auch der Lastreflexionsfaktor  $\underline{\Gamma}_L$  sollen im jeweils stabilen Bereich liegen. Da der Quellenreflexionsfaktor  $\underline{\Gamma}_Q$  und der

Lastreflexionsfaktor  $\underline{\Gamma}_L$  auf jeden Fall innerhalb des Einheitskreises liegen, interessieren primär die Schnittmengen der instabilen Bereiche mit dem Inneren des Einheitskreises, siehe Abbildung 12.6.

### 12.3.2. Unbedingte Stabilität

Wünschenswert ist es, dass ein Zweitor für alle passiven Abschlüsse stabil ist. Diese Eigenschaft bezeichnet man als unbedingte Stabilität. Im Folgenden sollen Bedingungen für die unbedingte Stabilität hergeleitet werden.

Zunächst wird wieder der eingangsseitig sichtbare Reflexionsfaktor  $\underline{\Gamma}_1$  als Funktion des Lastreflexionsfaktors  $\underline{\Gamma}_L$  betrachtet. Auflösen von (12.11) nach dem Lastreflexionsfaktor ergibt

$$\underline{\Gamma}_L = \frac{\underline{S}_{1,1} - \underline{\Gamma}_1}{\det(\underline{\mathbf{S}}) - \underline{S}_{2,2}\underline{\Gamma}_1}.$$

Der Einheitskreis  $|\underline{\Gamma}_L| = 1$  ist der Rand des Bereichs passiver Lasten. Dort gilt:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\underline{S}_{1,1} - \underline{\Gamma}_1}{\det(\underline{\mathbf{S}}) - \underline{S}_{2,2}\underline{\Gamma}_1} \right| &= 1, \\ (\underline{S}_{1,1} - \underline{\Gamma}_1) (\underline{S}_{1,1} - \underline{\Gamma}_1)^* &= (\det(\underline{\mathbf{S}}) - \underline{S}_{2,2}\underline{\Gamma}_1) (\det(\underline{\mathbf{S}}) - \underline{S}_{2,2}\underline{\Gamma}_1)^*, \\ \underline{\Gamma}_1 \underline{\Gamma}_1^* (1 - \underline{S}_{2,2}\underline{S}_{2,2}^*) + \underline{\Gamma}_1 (\underline{S}_{2,2} \det(\underline{\mathbf{S}}^*) - \underline{S}_{1,1}^*) & \\ + \underline{\Gamma}_1^* (\underline{S}_{2,2}^* \det(\underline{\mathbf{S}}) - \underline{S}_{1,1}) &= \det(\underline{\mathbf{S}}) \det(\underline{\mathbf{S}}^*) - \underline{S}_{1,1}\underline{S}_{1,1}^*. \end{aligned}$$

Durch quadratische Ergänzung erhält man

$$\begin{aligned} \left| \underline{\Gamma}_1 - \underbrace{\frac{\underline{S}_{1,1} - \underline{S}_{2,2}^* \det(\underline{\mathbf{S}})}{1 - \underline{S}_{2,2}\underline{S}_{2,2}^*}}_{\underline{M}_1} \right|^2 &= \frac{\det(\underline{\mathbf{S}}) \det(\underline{\mathbf{S}}^*) - \underline{S}_{1,1}\underline{S}_{1,1}^*}{1 - \underline{S}_{2,2}\underline{S}_{2,2}^*} \\ &+ \frac{(\underline{S}_{1,1} - \underline{S}_{2,2}^* \det(\underline{\mathbf{S}})) (\underline{S}_{1,1} - \underline{S}_{2,2}^* \det(\underline{\mathbf{S}}))^*}{(1 - \underline{S}_{2,2}\underline{S}_{2,2}^*)^2} \\ &= \underbrace{\frac{\underline{S}_{2,1}\underline{S}_{2,1}^*\underline{S}_{1,2}\underline{S}_{1,2}^*}{(1 - \underline{S}_{2,2}\underline{S}_{2,2}^*)^2}}_{R_1^2}. \end{aligned}$$

Es handelt sich offensichtlich um einen Kreis mit Mittelpunkt

$$\underline{M}_1 = \frac{\underline{S}_{1,1} - \underline{S}_{2,2}^* \det(\underline{\mathbf{S}})}{1 - |\underline{S}_{2,2}|^2} \quad (12.17)$$

und Radius

$$R_1 = \left| \frac{\underline{S}_{2,1}\underline{S}_{1,2}}{1 - |\underline{S}_{2,2}|^2} \right| \quad (12.18)$$

in der  $\underline{\Gamma}_1$ -Ebene. Ob das Innere oder das Äußere des Kreises das Bild des Bereichs der passiven Lasten  $|\underline{\Gamma}_L| < 1$  ist, überprüft man wieder am einfachsten anhand eines markanten Punktes. Aus  $\underline{\Gamma}_L = 0$  folgt für den eingangsseitig sichtbaren Reflexionsfaktor  $\underline{\Gamma}_1 = \underline{S}_{1,1}$ . Es stellt sich nun die Frage, ob  $\underline{S}_{1,1}$  innerhalb oder außerhalb des Kreises liegt. Für den Abstand zum Mittelpunkt gilt

$$|\underline{S}_{1,1} - \underline{M}_1| = \left| \frac{-\underline{S}_{1,1} |\underline{S}_{2,2}|^2 + \underline{S}_{2,2}^* \det(\underline{\mathbf{S}})}{1 - |\underline{S}_{2,2}|^2} \right| = \left| \frac{\underline{S}_{2,2}^* \underline{S}_{2,1} \underline{S}_{1,2}}{1 - |\underline{S}_{2,2}|^2} \right| = |\underline{S}_{2,2}| R_1.$$

Offensichtlich ist genau dann das Innere des Kreises das Bild des Bereichs der passiven Lasten  $|\underline{\Gamma}_L| < 1$ , wenn  $|\underline{S}_{2,2}| < 1$  gilt.

Damit nicht zwingend Teile des Bildes des Bereichs passiver Lasten  $|\underline{\Gamma}_L| < 1$  außerhalb des Einheitskreises in der  $\underline{\Gamma}_1$ -Ebene liegen, muss das Innere des Kreises in der  $\underline{\Gamma}_1$ -Ebene das Bild des Bereichs der passiven Lasten  $|\underline{\Gamma}_L| < 1$  sein und der Kreis muss vollständig im Inneren des Einheitskreises liegen, das heißt es müssen  $|\underline{S}_{2,2}| < 1$  und

$$|\underline{M}_1| + R_1 < 1$$

gelten. Einsetzen von Mittelpunkt  $\underline{M}_1$  und Radius  $R_1$  ergibt

$$\frac{|\underline{S}_{1,1} - \underline{S}_{2,2}^* \det(\underline{\mathbf{S}})| + |\underline{S}_{2,1}\underline{S}_{1,2}|}{|1 - |\underline{S}_{2,2}|^2|} < 1.$$

Man erhält das in der Literatur [ES92] unter dem Namen  $\mu$ -Test bekannte Stabilitätskriterium

$$\mu_1 = \frac{1 - |\underline{S}_{2,2}|^2}{|\underline{S}_{1,1} - \underline{S}_{2,2}^* \det(\underline{\mathbf{S}})| + |\underline{S}_{2,1}||\underline{S}_{1,2}|} > 1. \quad (12.19)$$

Ausgehend von der Betrachtung des ausgangsseitig sichtbaren Reflexionsfaktors  $\underline{\Gamma}_2$  als Funktion des Quellenreflexionsfaktors  $\underline{\Gamma}_Q$  erhält man dual das Stabilitätskriterium

$$\mu_2 = \frac{1 - |\underline{S}_{1,1}|^2}{|\underline{S}_{2,2} - \underline{S}_{1,1}^* \det(\underline{\mathbf{S}})| + |\underline{S}_{1,2}||\underline{S}_{2,1}|} > 1. \quad (12.20)$$

Eine alternative Bedingung für unbedingte Stabilität erhält man durch Umformen des Stabilitätsfaktors  $\mu_1$ . Ausgehend von (12.19) erhält man zunächst

$$\left| \underline{S}_{1,1} - \underline{S}_{2,2}^* \det(\underline{\mathbf{S}}) \right| < 1 - \left| \underline{S}_{2,2} \right|^2 - \left| \underline{S}_{2,1} \right| \left| \underline{S}_{1,2} \right|.$$

Diese Ungleichung kann nur dann erfüllt sein, wenn die rechte Seite größer Null ist. Man erhält die Nebenbedingung

$$\left| \underline{S}_{2,1} \right| \left| \underline{S}_{1,2} \right| < 1 - \left| \underline{S}_{2,2} \right|^2. \quad (12.21)$$

Durch Quadrieren der Ungleichung erhält man weiterhin:

$$\begin{aligned} \left| \underline{S}_{1,1} - \underline{S}_{2,2}^* \det(\underline{\mathbf{S}}) \right|^2 &< \left( 1 - \left| \underline{S}_{2,2} \right|^2 - \left| \underline{S}_{2,1} \right| \left| \underline{S}_{1,2} \right| \right)^2, \\ \left| \underline{S}_{1,1} \right|^2 - \underline{S}_{1,1} \underline{S}_{2,2} \det(\underline{\mathbf{S}}^*) \\ - \underline{S}_{1,1}^* \underline{S}_{2,2}^* \det(\underline{\mathbf{S}}) + \left| \underline{S}_{2,2} \right|^2 \left| \det(\underline{\mathbf{S}}) \right|^2 &< \left( 1 - \left| \underline{S}_{2,2} \right|^2 - \left| \underline{S}_{2,1} \right| \left| \underline{S}_{1,2} \right| \right)^2, \\ \left| \underline{S}_{1,1} \right|^2 - \left| \det(\underline{\mathbf{S}}) \right|^2 + \left| \underline{S}_{2,1} \right|^2 \left| \underline{S}_{1,2} \right|^2 \\ - \left| \underline{S}_{2,2} \right|^2 \left| \underline{S}_{1,1} \right|^2 + \left| \underline{S}_{2,2} \right|^2 \left| \det(\underline{\mathbf{S}}) \right|^2 &< \left( 1 - \left| \underline{S}_{2,2} \right|^2 \right) \left( 1 - \left| \underline{S}_{2,2} \right|^2 - 2 \left| \underline{S}_{2,1} \right| \left| \underline{S}_{1,2} \right| \right) \\ &\quad + \left| \underline{S}_{2,1} \right|^2 \left| \underline{S}_{1,2} \right|^2, \\ \left( 1 - \left| \underline{S}_{2,2} \right|^2 \right) \left( \left| \underline{S}_{1,1} \right|^2 - \left| \det(\underline{\mathbf{S}}) \right|^2 \right) &< \left( 1 - \left| \underline{S}_{2,2} \right|^2 \right) \left( 1 - \left| \underline{S}_{2,2} \right|^2 - 2 \left| \underline{S}_{2,1} \right| \left| \underline{S}_{1,2} \right| \right), \\ \left| \underline{S}_{1,1} \right|^2 - \left| \det(\underline{\mathbf{S}}) \right|^2 &< 1 - \left| \underline{S}_{2,2} \right|^2 - 2 \left| \underline{S}_{2,1} \right| \left| \underline{S}_{1,2} \right|. \end{aligned}$$

Ein Stabilitätskriterium ist somit, dass die Nebenbedingung (12.21) erfüllt ist und der nach Rollett benannte Stabilitätsfaktor größer als eins ist [Rol62]:

$$K = \frac{1 - \left| \underline{S}_{2,2} \right|^2 - \left| \underline{S}_{1,1} \right|^2 + \left| \det(\underline{\mathbf{S}}) \right|^2}{2 \left| \underline{S}_{2,1} \right| \left| \underline{S}_{1,2} \right|} > 1. \quad (12.22)$$

Ausgehend vom Stabilitätsfaktor  $\mu_2$  hätte man auf dualem Weg die Nebendingung

$$\left| \underline{S}_{1,2} \right| \left| \underline{S}_{2,1} \right| < 1 - \left| \underline{S}_{1,1} \right|^2 \quad (12.23)$$

und den gleichen Ausdruck für den Stabilitätsfaktor  $K$  gefunden. Aus diesen Nebenbedingungen folgt für den Betrag der Determinante der Streumatrix  $\underline{\mathbf{S}}$  eines

unbedingt stabilen Zweitoren unter Verwenden der Dreiecksungleichung:

$$\begin{aligned}
 |\det(\mathbf{S})| &= |\underline{S}_{1,1}\underline{S}_{2,2} - \underline{S}_{1,2}\underline{S}_{2,1}| \\
 &\leq |\underline{S}_{1,1}\underline{S}_{2,2}| + |\underline{S}_{1,2}\underline{S}_{2,1}| \\
 &< \sqrt{1 - |\underline{S}_{1,2}| |\underline{S}_{2,1}|} \sqrt{1 - |\underline{S}_{1,2}| |\underline{S}_{2,1}|} + |\underline{S}_{1,2}\underline{S}_{2,1}| = 1.
 \end{aligned} \tag{12.24}$$

Ein verlustfreies Eingangsanpassnetzwerk oder Ausgangsanpassnetzwerk bildet das Innere des Einheitskreises in der Reflexionsfaktorebene auf das vollständige Innere des Einheitskreises ab. Hinzufügen verlustfreier Anpassnetzwerke beeinflusst die Eigenschaft der unbedingten Stabilität daher nicht.

## 12.4. Leistungsgewinn von Zweitoren

### 12.4.1. Klemmenleistungsgewinn

Der Klemmenleistungsgewinn (Power Gain)

$$G = \frac{P_L}{P_Q} \tag{12.25}$$

ist als das Verhältnis aus der an die Last abgegebenen Leistung  $P_L$  und der von der Quelle an das Zweitor abgegebenen Leistung  $P_Q$  definiert.

Aus dem Signalflussgraphen in Abbildung 12.7 folgt analog zu (12.1) für die von der Quelle an das Zweitor abgegebene Leistung

$$\begin{aligned}
 P_Q &= \frac{1}{2} |\underline{b}_Q|^2 \frac{1 - |\underline{\Gamma}_1|^2}{|1 - \underline{\Gamma}_Q \underline{\Gamma}_1|^2} \\
 &= \frac{1}{2} |\underline{b}_Q|^2 \frac{|1 - \underline{S}_{2,2} \underline{\Gamma}_L|^2 - |\underline{S}_{1,1} - \det(\mathbf{S}) \underline{\Gamma}_L|^2}{|1 - \underline{S}_{2,2} \underline{\Gamma}_L - \underline{S}_{1,1} \underline{\Gamma}_Q + \det(\mathbf{S}) \underline{\Gamma}_Q \underline{\Gamma}_L|^2},
 \end{aligned} \tag{12.26}$$

wobei in der letzten Zeile (12.11) eingesetzt wurde.

Aus dem Signalflussgraphen in Abbildung 12.8 liest man mit der Schleifenregel

$$\underline{b}_2 = \underline{b}_Q \frac{1}{1 - \underline{\Gamma}_Q \underline{\Gamma}_1} \underline{S}_{2,1} \frac{1}{1 - \underline{S}_{2,2} \underline{\Gamma}_L}$$

ab, siehe Abbildung 9.3d. Weiterhin gilt

$$\underline{a}_2 = \underline{\Gamma}_L \underline{b}_2.$$

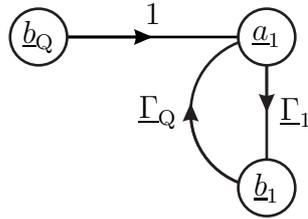


Abbildung 12.7.: Betrachtung des Zweitoreingangs

Die an die Last abgegebene Leistung berechnet sich mit (7.28) und (12.11) zu

$$\begin{aligned}
 P_L &= \frac{1}{2} |b_Q|^2 \frac{|\underline{S}_{2,1}|^2 (1 - |\Gamma_L|^2)}{|1 - \Gamma_Q \Gamma_1|^2 |1 - \underline{S}_{2,2} \Gamma_L|^2} \\
 &= \frac{1}{2} |b_Q|^2 \frac{|\underline{S}_{2,1}|^2 (1 - |\Gamma_L|^2)}{|1 - \underline{S}_{2,2} \Gamma_L - \underline{S}_{1,1} \Gamma_Q + \det(\underline{\mathbf{S}}) \Gamma_Q \Gamma_L|^2}.
 \end{aligned}
 \tag{12.27}$$

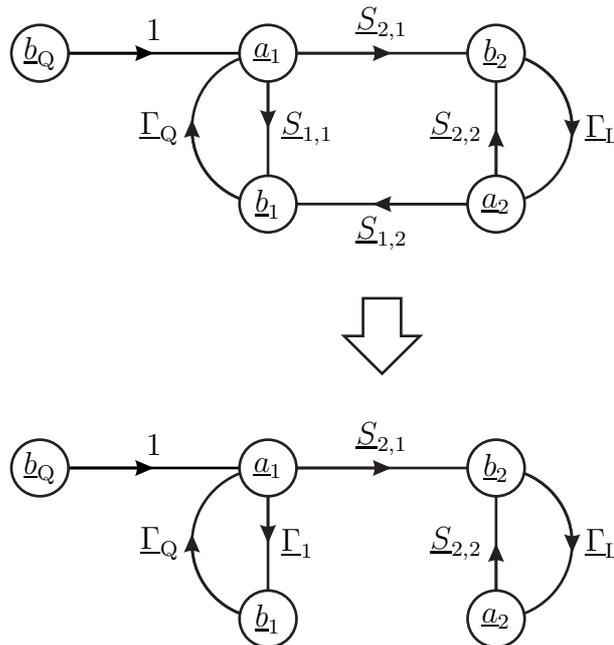


Abbildung 12.8.: Betrachtung des Zweitorausgangs

Durch Einsetzen von (12.26) und (12.27) in (12.25) erhält man den Klemmen-

leistungsgewinn

$$G = \frac{|\underline{S}_{2,1}|^2 (1 - |\underline{\Gamma}_L|^2)}{|1 - \underline{S}_{2,2}\underline{\Gamma}_L|^2 - |\underline{S}_{1,1} - \det(\underline{\mathbf{S}})\underline{\Gamma}_L|^2}. \quad (12.28)$$

Der Klemmenleistungsgewinn  $G$  hängt vom Lastreflexionsfaktor  $\underline{\Gamma}_L$ , nicht aber vom Quellenreflexionsfaktor  $\underline{\Gamma}_Q$  ab.

### 12.4.2. Einfügungsleistungsgewinn

Der Einfügungsleistungsgewinn (Insertion Power Gain)

$$G_I = \frac{P_L}{P} \quad (12.29)$$

ist als das Verhältnis aus der an die Last abgegebenen Leistung  $P_L$  und der von der Quelle bei direkter Verbindung an die Last abgegebenen Leistung  $P$  definiert.

Durch Einsetzen von (12.27) und (12.1) in (12.29) erhält man den Einfügungsleistungsgewinn

$$G_I = \frac{|\underline{S}_{2,1}|^2 |1 - \underline{\Gamma}_Q \underline{\Gamma}_L|^2}{|1 - \underline{S}_{2,2}\underline{\Gamma}_L - \underline{S}_{1,1}\underline{\Gamma}_Q + \det(\underline{\mathbf{S}})\underline{\Gamma}_Q \underline{\Gamma}_L|^2}. \quad (12.30)$$

Der Einfügungsleistungsgewinn  $G_I$  hängt vom Lastreflexionsfaktor  $\underline{\Gamma}_L$  und vom Quellenreflexionsfaktor  $\underline{\Gamma}_Q$  ab.

### 12.4.3. Übertragungsleistungsgewinn

Der Übertragungsleistungsgewinn (Transducer Power Gain)

$$G_T = \frac{P_L}{P_{QA}}. \quad (12.31)$$

ist als das Verhältnis aus der an die Last abgegebenen Leistung  $P_L$  und der von der Quelle verfügbaren Leistung  $P_{QA}$  definiert.

Durch Einsetzen von (12.27) und (12.6) in (12.31) erhält man den Übertragungsleistungsgewinn

$$G_T = \frac{(1 - |\underline{\Gamma}_Q|^2) |\underline{S}_{2,1}|^2 (1 - |\underline{\Gamma}_L|^2)}{|1 - \underline{S}_{2,2}\underline{\Gamma}_L - \underline{S}_{1,1}\underline{\Gamma}_Q + \det(\underline{\mathbf{S}})\underline{\Gamma}_Q \underline{\Gamma}_L|^2}. \quad (12.32)$$

Der Übertragungsleistungsgewinn  $G_T$  hängt vom Lastreflexionsfaktor  $\underline{\Gamma}_L$  und vom Quellenreflexionsfaktor  $\underline{\Gamma}_Q$  ab.

#### 12.4.4. Verfügbarer Leistungsgewinn

Der verfügbare Leistungsgewinn (Available Power Gain)

$$G_A = \frac{P_{LA}}{P_{QA}} \quad (12.33)$$

ist als das Verhältnis aus der vom Zweitor verfügbaren Leistung  $P_{LA}$  und der von der Quelle verfügbaren Leistung  $P_{QA}$  definiert.

Bei Leistungsanpassung  $\underline{\Gamma}_L = \underline{\Gamma}_2^*$ , vergleiche (12.7), folgt aus (12.27)

$$\begin{aligned} P_{LA} &= \frac{1}{2} |b_Q|^2 \frac{|\underline{S}_{2,1}|^2 (1 - |\underline{\Gamma}_2|^2)}{|1 - \underline{S}_{2,2}\underline{\Gamma}_2^* - \underline{S}_{1,1}\underline{\Gamma}_Q + \det(\underline{\mathbf{S}}) \underline{\Gamma}_Q \underline{\Gamma}_2^*|^2} \\ &= \frac{1}{2} |b_Q|^2 \frac{|\underline{S}_{2,1}|^2 (1 - |\underline{\Gamma}_2|^2)}{|(1 - \underline{S}_{1,1}\underline{\Gamma}_Q) - (\underline{S}_{2,2} - \det(\underline{\mathbf{S}}) \underline{\Gamma}_Q) \underline{\Gamma}_2^*|^2}. \end{aligned}$$

Einsetzen von (12.12) ergibt

$$\begin{aligned} P_{LA} &= \frac{1}{2} |b_Q|^2 \frac{|\underline{S}_{2,1}|^2 \left( |1 - \underline{S}_{1,1}\underline{\Gamma}_Q|^2 - |\underline{S}_{2,2} - \det(\underline{\mathbf{S}}) \underline{\Gamma}_Q|^2 \right)}{\left| |1 - \underline{S}_{1,1}\underline{\Gamma}_Q|^2 - |\underline{S}_{2,2} - \det(\underline{\mathbf{S}}) \underline{\Gamma}_Q|^2 \right|^2} \\ &= \frac{1}{2} |b_Q|^2 \frac{|\underline{S}_{2,1}|^2}{|1 - \underline{S}_{1,1}\underline{\Gamma}_Q|^2 - |\underline{S}_{2,2} - \det(\underline{\mathbf{S}}) \underline{\Gamma}_Q|^2}. \end{aligned} \quad (12.34)$$

Durch Einsetzen von (12.6) und (12.34) in (12.33) erhält man den verfügbaren Leistungsgewinn

$$G_A = \frac{|\underline{S}_{2,1}|^2 (1 - |\underline{\Gamma}_Q|^2)}{|1 - \underline{S}_{1,1}\underline{\Gamma}_Q|^2 - |\underline{S}_{2,2} - \det(\underline{\mathbf{S}}) \underline{\Gamma}_Q|^2}. \quad (12.35)$$

Der verfügbare Leistungsgewinn  $G_A$  hängt vom Quellenreflexionsfaktor  $\underline{\Gamma}_Q$ , nicht aber vom Lastreflexionsfaktor  $\underline{\Gamma}_L$  ab.

Der verfügbare Leistungsgewinn einer Kaskade aus zwei Zweitoren, siehe Abbildung 12.9, ist gleich dem Produkt der verfügbaren Leistungsgewinne der kaskadierten Zweitore:<sup>1</sup>

$$G_A = \frac{P_{A3}}{P_{A1}} = \frac{P_{A2}}{P_{A1}} \frac{P_{A3}}{P_{A2}} = G_{A1} G_{A2}. \quad (12.36)$$

<sup>1</sup>Wenn man Gewinne als Sonderfälle von Leistungsverhältnissen logarithmisch in der Pseudoeinheit dB angibt, wird aus der Multiplikation eine Addition  $10 \log(G_{A1} G_{A2}) = 10 \log(G_{A1}) + 10 \log(G_{A2})$ .

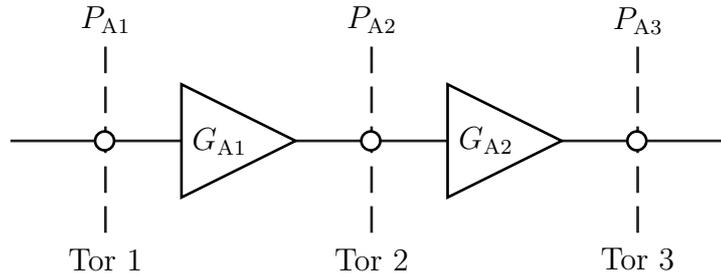


Abbildung 12.9.: Leistungsgewinn einer Kaskade von Zweitoren

### 12.4.5. Vergleich der Gewinndefinitionen

Durch sinngemäßes Anwenden von (12.8) erhält man den Ausnutzungsfaktor an Tor 1

$$\frac{G_T}{G} = \frac{P_L}{P_{QA}} \frac{P_Q}{P_L} = \frac{P_Q}{P_{QA}} = \frac{(1 - |\underline{\Gamma}_Q|^2)(1 - |\underline{\Gamma}_1|^2)}{|1 - \underline{\Gamma}_Q \underline{\Gamma}_1|^2}. \quad (12.37)$$

Auf gleichem Wege erhält man Ausnutzungsfaktor an Tor 2

$$\frac{G_T}{G_A} = \frac{P_L}{P_{QA}} \frac{P_{QA}}{P_{LA}} = \frac{P_L}{P_{LA}} = \frac{(1 - |\underline{\Gamma}_L|^2)(1 - |\underline{\Gamma}_2|^2)}{|1 - \underline{\Gamma}_L \underline{\Gamma}_2|^2}. \quad (12.38)$$

Für den Fall, dass sowohl die Quelle an den Eingang angepasst ist  $\underline{\Gamma}_Q = \underline{\Gamma}_1^*$  als auch die Last an den Ausgang angepasst ist  $\underline{\Gamma}_L = \underline{\Gamma}_2^*$ , vergleiche (12.7), sind die drei hier definierten Gewinne Klemmenleistungsgewinn  $G$ , Übertragungsleistungsgewinn  $G_T$  und verfügbarer Leistungsgewinn  $G_A$  gleich. Wenn zusätzlich auch noch der Quellenreflexionsfaktor konjugiert komplex zum Lastreflexionsfaktor ist  $\underline{\Gamma}_Q = \underline{\Gamma}_1^* = \underline{\Gamma}_L^* = \underline{\Gamma}_2$ , sind alle vier hier definierten Gewinne Klemmenleistungsgewinn  $G$ , Einfügungsleistungsgewinn  $G_1$ , Übertragungsleistungsgewinn  $G_T$  und verfügbarer Leistungsgewinn  $G_A$  gleich.

### 12.4.6. Maximaler verfügbarer Leistungsgewinn

Der verfügbare Leistungsgewinn  $G_A$  hängt vom Quellenreflexionsfaktor  $\underline{\Gamma}_Q$  ab. Nun soll der bei einem optimalen Quellenreflexionsfaktor  $\underline{\Gamma}_Q$  erzielbare maximale verfügbare Leistungsgewinn (Maximum Available Power Gain, MAG)  $G_{MAG}$

ermittelt werden. Aus (12.35) folgt

$$\begin{aligned} G_A & \left( 1 - \underline{S}_{1,1} \Gamma_Q - \underline{S}_{1,1}^* \Gamma_Q^* + |\underline{S}_{1,1}|^2 |\Gamma_Q|^2 \right. \\ & \quad \left. - |\underline{S}_{2,2}|^2 + \underline{S}_{2,2} \det(\underline{\mathbf{S}}^*) \Gamma_Q^* + \underline{S}_{2,2}^* \det(\underline{\mathbf{S}}) \Gamma_Q - |\det(\underline{\mathbf{S}})|^2 |\Gamma_Q|^2 \right) \\ & = |\underline{S}_{2,1}|^2 \left( 1 - |\Gamma_Q|^2 \right). \end{aligned}$$

Für die Orte konstanten verfügbaren Leistungsgewinns  $G_A$  in der Ebene des Quellenreflexionsfaktors  $\underline{\Gamma}_Q$  gilt

$$\begin{aligned} & |\Gamma_Q|^2 \left( |\underline{S}_{2,1}|^2 + G_A \left( |\underline{S}_{1,1}|^2 - |\det(\underline{\mathbf{S}})|^2 \right) \right) \\ & \quad + \underline{\Gamma}_Q G_A \left( \underline{S}_{2,2}^* \det(\underline{\mathbf{S}}) - \underline{S}_{1,1} \right) + \underline{\Gamma}_Q^* G_A \left( \underline{S}_{2,2} \det(\underline{\mathbf{S}}^*) - \underline{S}_{1,1}^* \right) \\ & = |\underline{S}_{2,1}|^2 + G_A \left( |\underline{S}_{2,2}|^2 - 1 \right). \end{aligned}$$

Mittels quadratischer Ergänzung erhält man

$$\begin{aligned} \left| \underline{\Gamma}_Q + \frac{G_A \left( \underline{S}_{2,2} \det(\underline{\mathbf{S}}^*) - \underline{S}_{1,1}^* \right)}{|\underline{S}_{2,1}|^2 + G_A \left( |\underline{S}_{1,1}|^2 - |\det(\underline{\mathbf{S}})|^2 \right)} \right|^2 & = \frac{G_A^2 \left| \underline{S}_{2,2} \det(\underline{\mathbf{S}}^*) - \underline{S}_{1,1}^* \right|^2}{\left( |\underline{S}_{2,1}|^2 + G_A \left( |\underline{S}_{1,1}|^2 - |\det(\underline{\mathbf{S}})|^2 \right) \right)^2} \\ & \quad + \frac{|\underline{S}_{2,1}|^2 + G_A \left( |\underline{S}_{2,2}|^2 - 1 \right)}{|\underline{S}_{2,1}|^2 + G_A \left( |\underline{S}_{1,1}|^2 - |\det(\underline{\mathbf{S}})|^2 \right)}. \end{aligned}$$

Dies ist die Gleichung eines Kreises in der Ebene des Quellenreflexionsfaktors  $\underline{\Gamma}_Q$ .

Beim maximalen verfügbaren Leistungsgewinn  $G_{\text{MAG}}$  wird der Radius des Kreises Null:

$$\begin{aligned} 0 & = G_{\text{MAG}}^2 \left| \underline{S}_{2,2} \det(\underline{\mathbf{S}}^*) - \underline{S}_{1,1}^* \right|^2 \\ & \quad + \left( |\underline{S}_{2,1}|^2 + G_{\text{MAG}} \left( |\underline{S}_{2,2}|^2 - 1 \right) \right) \left( |\underline{S}_{2,1}|^2 + G_{\text{MAG}} \left( |\underline{S}_{1,1}|^2 - |\det(\underline{\mathbf{S}})|^2 \right) \right) \\ & = G_{\text{MAG}}^2 \left( \left| \underline{S}_{2,2} \det(\underline{\mathbf{S}}^*) - \underline{S}_{1,1}^* \right|^2 + \left( |\underline{S}_{2,2}|^2 - 1 \right) \left( |\underline{S}_{1,1}|^2 - |\det(\underline{\mathbf{S}})|^2 \right) \right) \\ & \quad + G_{\text{MAG}} \left| \underline{S}_{2,1} \right|^2 \left( |\underline{S}_{1,1}|^2 - |\det(\underline{\mathbf{S}})|^2 + |\underline{S}_{2,2}|^2 - 1 \right) + |\underline{S}_{2,1}|^4. \end{aligned}$$

Mit

$$\begin{aligned}
 & \left| \underline{S}_{2,2} \det(\underline{\mathbf{S}}^*) - \underline{S}_{1,1}^* \right|^2 + \left( \left| \underline{S}_{2,2} \right|^2 - 1 \right) \left( \left| \underline{S}_{1,1} \right|^2 - \left| \det(\underline{\mathbf{S}}) \right|^2 \right) \\
 &= \left| \underline{S}_{2,2} \right|^2 \left| \det(\underline{\mathbf{S}}) \right|^2 - \underline{S}_{2,2} \det(\underline{\mathbf{S}}^*) \underline{S}_{1,1} - \underline{S}_{2,2}^* \det(\underline{\mathbf{S}}) \underline{S}_{1,1}^* + \left| \underline{S}_{1,1} \right|^2 \\
 & \quad + \left| \underline{S}_{2,2} \right|^2 \left| \underline{S}_{1,1} \right|^2 - \left| \underline{S}_{2,2} \right|^2 \left| \det(\underline{\mathbf{S}}) \right|^2 - \left| \underline{S}_{1,1} \right|^2 + \left| \det(\underline{\mathbf{S}}) \right|^2 \\
 &= - \underbrace{\left| \underline{S}_{1,1} \right|^2 \left| \underline{S}_{2,2} \right|^2 + \underline{S}_{1,1} \underline{S}_{2,2} \underline{S}_{1,2}^* \underline{S}_{2,1}^*}_{-\underline{S}_{2,2} \det(\underline{\mathbf{S}}^*) \underline{S}_{1,1}} \\
 & \quad - \underbrace{\left| \underline{S}_{1,1} \right|^2 \left| \underline{S}_{2,2} \right|^2 + \underline{S}_{1,1}^* \underline{S}_{2,2}^* \underline{S}_{1,2} \underline{S}_{2,1}}_{-\underline{S}_{2,2} \det(\underline{\mathbf{S}}) \underline{S}_{1,1}^*} + \left| \underline{S}_{2,2} \right|^2 \left| \underline{S}_{1,1} \right|^2 \\
 & \quad + \underbrace{\left| \underline{S}_{2,2} \right|^2 \left| \underline{S}_{1,1} \right|^2 - \underline{S}_{1,1} \underline{S}_{2,2} \underline{S}_{1,2}^* \underline{S}_{2,1}^* - \underline{S}_{1,1}^* \underline{S}_{2,2}^* \underline{S}_{1,2} \underline{S}_{2,1} + \left| \underline{S}_{1,2} \right|^2 \left| \underline{S}_{2,1} \right|^2}_{\left| \det(\underline{\mathbf{S}}) \right|^2} \\
 &= \left| \underline{S}_{1,2} \right|^2 \left| \underline{S}_{2,1} \right|^2
 \end{aligned}$$

und

$$\left| \underline{S}_{1,1} \right|^2 - \left| \det(\underline{\mathbf{S}}) \right|^2 + \left| \underline{S}_{2,2} \right|^2 - 1 = -2 \left| \underline{S}_{1,2} \right| \left| \underline{S}_{2,1} \right| K,$$

wobei der  $K$  der Stabilitätsfaktor gemäß (12.22) ist, vereinfacht sich die quadratische Gleichung für den maximalen verfügbaren Leistungsgewinn  $G_{\text{MAG}}$  zu

$$\left| \underline{S}_{1,2} \right|^2 \left| \underline{S}_{2,1} \right|^2 G_{\text{MAG}}^2 - 2 \underline{S}_{1,2} \underline{S}_{2,1}^3 K G_{\text{MAG}} + \left| \underline{S}_{2,1} \right|^4 = 0.$$

Diese quadratische Gleichung hat die Lösungen

$$G_{\text{MAG}} = \frac{\left| \underline{S}_{2,1} \right|}{\left| \underline{S}_{1,2} \right|} \left( K \pm \sqrt{K^2 - 1} \right). \quad (12.39)$$

Für die hier betrachteten unbedingt stabilen Zweitore ist der Term unter der Wurzel gemäß (12.22) immer positiv. Bezüglich des Vorzeichens vor der Wurzel betrachtet man den Grenzfall eines rückwirkungsarmen Zweitores mit kleinem  $\underline{S}_{1,2}$ . Aus (12.22) folgt für den Stabilitätsfaktor eines rückwirkungsarmen Zweitores

$$K \approx \frac{\left( \left| \underline{S}_{1,1} \right|^2 - 1 \right) \left( \left| \underline{S}_{2,2} \right|^2 - 1 \right)}{2 \underline{S}_{2,1} \underline{S}_{1,2}}, \quad (12.40)$$

das heißt der Stabilitätsfaktor  $K$  wird sehr groß. Ein physikalisch sinnvoller endlich großer maximaler verfügbarer Leistungsgewinn  $G_{\text{MAG}}$  kann sich nur dann ergeben, wenn in (12.39) das negative Vorzeichen gilt, siehe auch Aufgabe 12.4.

**Aufgabe 12.2** Es wird ein Leitungsstück der Länge  $l$  mit der Phasenkonstante  $\beta$  betrachtet. Der Wellenwiderstand sei gleich dem Bezugswiderstand  $Z_L = R_B$ , so dass sich die Streumatrix  $\underline{\mathbf{S}}$  gemäß (10.19) ergibt. Berechnen Sie den Klemmenleistungsgewinn  $G$ , den Einfügungsleistungsgewinn  $G_I$ , den Übertragungsleistungsgewinn  $G_T$ , den verfügbaren Leistungsgewinn  $G_A$  und den maximalen verfügbaren Leistungsgewinn  $G_{\text{MAG}}$  des Leitungsstücks jeweils abhängig von Länge  $l$ , Phasenkonstante  $\beta$ , Quellenreflexionsfaktor  $\Gamma_Q$  und Lastreflexionsfaktor  $\Gamma_L$ !

### 12.4.7. Maximaler stabiler Leistungsgewinn

Ein nicht unbedingt stabiles Zweitor kann man zum Beispiel durch Serienschalten oder Parallelschalten von Wirkwiderständen an Eingang oder Ausgang unbedingt stabil machen. Wie aus (9.25) ersichtlich ist, ändert sich das Verhältnis  $\underline{S}_{2,1}/\underline{S}_{1,2}$  durch Anfügen eines derartigen reziproken Zweitores nicht. Man kann die Wirkwiderstände nun so groß wählen, dass der Stabilitätsfaktor gerade eins wird. In diesem Grenzfall erhält man durch Einsetzen von  $K = 1$  in (12.39) den maximalen stabilen Leistungsgewinn (Maximum Stable Power Gain, MSG)

$$G_{\text{MSG}} = \frac{|\underline{S}_{2,1}|}{|\underline{S}_{1,2}|}. \quad (12.41)$$

Der maximale stabile Leistungsgewinn  $G_{\text{MSG}}$  ist für nicht unbedingt stabile Zweitore definiert.

### 12.4.8. Unilateraler Übertragungsleistungsgewinn

Bei Hochfrequenzverstärkern ist die Rückwirkung  $\underline{S}_{1,2}$  häufig relativ klein. Wenn man die Rückwirkung  $\underline{S}_{1,2}$  vernachlässigt, vereinfachen sich die Gewinnberechnungen beträchtlich. Aus (12.32) erhält man mit  $\underline{S}_{1,2} = 0$  den unilateralen Übertragungsleistungsgewinn (Unilateral Transducer Power Gain)

$$\begin{aligned} G_{\text{TU}} &= \frac{(1 - |\Gamma_Q|^2) |\underline{S}_{2,1}|^2 (1 - |\Gamma_L|^2)}{|1 - \underline{S}_{1,1}\Gamma_Q - \underline{S}_{2,2}\Gamma_L + \underline{S}_{1,1}\underline{S}_{2,2}\Gamma_Q\Gamma_L|^2} \\ &= \underbrace{\frac{1 - |\Gamma_Q|^2}{|1 - \underline{S}_{1,1}\Gamma_Q|^2}}_{G_Q} \underbrace{|\underline{S}_{2,1}|^2}_{G_0} \underbrace{\frac{1 - |\Gamma_L|^2}{|1 - \underline{S}_{2,2}\Gamma_L|^2}}_{G_L}, \end{aligned} \quad (12.42)$$

der sich offensichtlich als ein Produkt aus

- Gewinn

$$G_Q = \frac{1 - |\Gamma_Q|^2}{|1 - \underline{S}_{1,1}\Gamma_Q|^2} \quad (12.43)$$

der Eingangsanpassung,

- unilateralen Zweitorgewinn

$$G_0 = |\underline{S}_{2,1}|^2 \quad (12.44)$$

und

- Gewinn

$$G_L = \frac{1 - |\Gamma_L|^2}{|1 - \underline{S}_{2,2}\Gamma_L|^2} \quad (12.45)$$

der Ausgangsanpassung

darstellen lässt.

Zunächst werde der Gewinn  $G_Q$  der Eingangsanpassung genauer untersucht. Für die Orte konstanten Gewinns  $G_Q$  der Eingangsanpassung gilt:

$$\begin{aligned} G_Q |1 - \underline{S}_{1,1}\Gamma_Q|^2 &= 1 - |\Gamma_Q|^2, \\ \Gamma_Q \Gamma_Q^* (G_Q \underline{S}_{1,1} \underline{S}_{1,1}^* + 1) \\ - \Gamma_Q G_Q \underline{S}_{1,1} - \Gamma_Q^* G_Q \underline{S}_{1,1}^* &= 1 - G_Q, \\ \left| \Gamma_Q - \frac{G_Q \underline{S}_{1,1}^*}{1 + G_Q |\underline{S}_{1,1}|^2} \right|^2 &= \frac{1 - G_Q}{1 + G_Q |\underline{S}_{1,1}|^2} + \frac{G_Q^2 |\underline{S}_{1,1}|^2}{(1 + G_Q |\underline{S}_{1,1}|^2)^2} \\ &= \frac{1 - G_Q + G_Q |\underline{S}_{1,1}|^2}{(1 + G_Q |\underline{S}_{1,1}|^2)^2}. \end{aligned}$$

$R_Q^2$

Die Orte konstanten Gewinns  $G_Q$  der Eingangsanpassung bilden einen Kreis mit Mittelpunkt

$$\underline{M}_Q = \frac{G_Q \underline{S}_{1,1}^*}{1 + G_Q |\underline{S}_{1,1}|^2} \quad (12.46)$$

und Radius

$$R_Q = \frac{\sqrt{1 - G_Q + G_Q |\underline{S}_{1,1}|^2}}{1 + G_Q |\underline{S}_{1,1}|^2} \quad (12.47)$$

in der Ebene des Quellenreflexionsfaktors  $\underline{\Gamma}_Q$ .

Beim maximalen Gewinn  $G_{Q\max}$  der Eingangsanpassung wird der Radius  $R$  Null. Es folgt:

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - G_{Q\max} + G_{Q\max} |\underline{S}_{1,1}|^2} &= 0, \\ G_{Q\max} &= \frac{1}{1 - |\underline{S}_{1,1}|^2}. \end{aligned} \quad (12.48)$$

Dieser maximale Gewinn  $G_{Q\max}$  der Eingangsanpassung wird für den dem zugehörigen Mittelpunkt  $\underline{M}_Q$  entsprechenden optimalen Quellenreflexionsfaktor

$$\underline{\Gamma}_{Q\max} = \frac{G_{Q\max} \underline{S}_{1,1}^*}{1 + G_{Q\max} |\underline{S}_{1,1}|^2} = \underline{S}_{1,1}^*, \quad (12.49)$$

das heißt bei Leistungsanpassung erreicht, vergleiche (12.7).

Abbildung 12.10 zeigt einen exemplarischen Kreis konstanten Gewinns der Eingangsanpassung  $G_Q$ . Der Mittelpunkt  $\underline{M}_Q$  liegt auf der Geraden durch  $\underline{\Gamma}_{Q\max}$  und den Ursprung, da die Argumente aller Mittelpunkte gleich sind:

$$\arg(\underline{M}_Q) = \arg(\underline{\Gamma}_{Q\max}) = \arg(\underline{S}_{1,1}^*).$$

Dual erhält man den Kreis konstanten Gewinns  $G_L$  der Ausgangsanpassung mit Mittelpunkt

$$\underline{M}_L = \frac{G_L \underline{S}_{2,2}^*}{1 + G_L |\underline{S}_{2,2}|^2} \quad (12.50)$$

und Radius

$$R_L = \frac{\sqrt{1 - G_L + G_L |\underline{S}_{2,2}|^2}}{1 + G_L |\underline{S}_{2,2}|^2} \quad (12.51)$$

in der Ebene des Lastreflexionsfaktors  $\underline{\Gamma}_L$ . Bei Leistungsanpassung

$$\underline{\Gamma}_{L\max} = \underline{S}_{2,2}^* \quad (12.52)$$

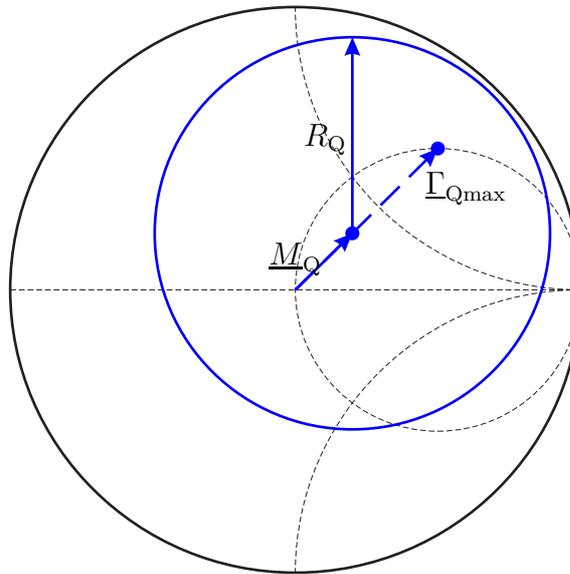


Abbildung 12.10.: Exemplarischer Kreis konstanten Gewinns der Eingangsanpassung  $G_Q = 0,5$ .  $\underline{S}_{1,1} = 0,5 - j0,5$

erhält man den maximalen erzielbaren Gewinn

$$G_{L\max} = \frac{1}{1 - |\underline{S}_{2,2}|^2} \quad (12.53)$$

der Ausgangsanpassung.

Der sich bei eingangsseitiger und ausgangsseitiger Anpassung ergebende maximale unilaterale Übertragungsleistungsgewinn ist

$$G_{TU\max} = \frac{1}{1 - |\underline{S}_{1,1}|^2} |\underline{S}_{2,1}|^2 \frac{1}{1 - |\underline{S}_{2,2}|^2}. \quad (12.54)$$

**Aufgabe 12.3** Berechnen Sie den Übertragungsleistungsgewinn  $G_T$ , den Klemmenleistungsgewinn  $G$ , den verfügbaren Leistungsgewinn  $G_A$  und den Einfügungsleistungsgewinn  $G_I$  der Einwegleitung mit der Streumatrix  $\underline{S}$  gemäß (10.24) jeweils abhängig von Quellenreflexionsfaktor  $\Gamma_Q$  und Lastreflexionsfaktor  $\Gamma_L$ !

**Aufgabe 12.4** Zeigen Sie, dass für den Grenzfall eines rückwirkungsfreien Zweitorts  $\underline{S}_{1,2} \rightarrow 0$  der maximale verfügbare Leistungsgewinn  $G_{MAG}$  gegen den maximalen unilateralen Übertragungsleistungsgewinn  $G_{TU\max}$  konvergiert!

# Kapitel 13.

## Rauschen

### 13.1. Rauschende Eintore

#### 13.1.1. Modellierung rauschender Eintore

Es wird ein rauschendes Eintor mit dem Reflexionsfaktor  $\underline{\Gamma}$  betrachtet, siehe Abbildung 13.1. Im Folgenden wird stets das Rauschen innerhalb einer sehr kleinen vorgegebenen Bandbreite  $B$  betrachtet.<sup>1</sup> Bei sehr kleiner Bandbreite  $B$  ist das Rauschen näherungsweise sinusförmig mit zufälliger Amplitude und Nullphase, das heißt die komplexe Wellenamplitude  $\underline{b}_R$  der Rauschurwelle ist eine mittelwertfreie Zufallsvariable [Bos11]. Mit (12.6) ergibt sich die verfügbare Rauschleistung zu

$$P_{\text{RA}} = \frac{1}{2} \text{E}\{|\underline{b}_R|^2\} \frac{1}{1 - |\underline{\Gamma}|^2}. \quad (13.1)$$

$\text{E}\{\cdot\}$  bezeichnet den Erwartungswert.

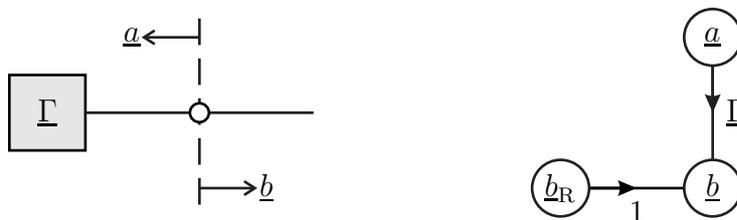


Abbildung 13.1.: Modell eines rauschenden Eintors

Rauschsignale mit größeren Bandbreiten  $B$ , wie sie beispielsweise in der Nachrichtentechnik vorkommen, können im Sinne einer Frequenzbereichsmodellierung durch ihr Leistungsdichtespektrum beschrieben werden.

<sup>1</sup>Üblicherweise interessiert von dem an sich breitbandigen Rauschen nur der Anteil innerhalb der kleinen Bandbreite  $B$  des Nutzsignals.

### 13.1.2. Thermisches Rauschen von Widerständen

Eine häufige Quelle von Rauschen im Bereich der Hochfrequenztechnik ist das thermische Rauschen von Widerständen, siehe Abbildung 13.2. Mit der Boltzmann-Konstante

$$k = 1,3806 \cdot 10^{-23} \text{ W K}^{-1} \text{ Hz}^{-1} \quad (13.2)$$

ergibt sich die innerhalb der Bandbreite  $B$  verfügbare Rauschleistung bei einer Temperatur  $T$  zu

$$\boxed{P_{\text{RA}} = kTB}. \quad (13.3)$$

Insbesondere ist das thermische Rauschen innerhalb des in der Hochfrequenztechnik interessierenden Frequenzbereichs weiß. Die verfügbare Rauschleistung  $P_{\text{RA}}$  hängt nicht vom Widerstand  $R$  ab. Bei der üblicherweise verwendeten Bezugstemperatur

$$T_0 = 290 \text{ K} \quad (13.4)$$

ergibt sich die verfügbare Rauschleistungsdichte<sup>2</sup>

$$\frac{P_{\text{RA}}}{B} = kT_0 = 4 \cdot 10^{-21} \text{ W Hz}^{-1} \hat{=} -174 \text{ dBm} \quad \text{bei } B = 1 \text{ Hz}. \quad (13.5)$$

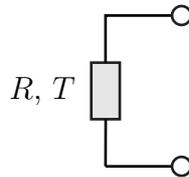


Abbildung 13.2.: Thermisch rauschender Widerstand  $R$

### 13.1.3. Thermisch rauschende Eintore homogener Temperatur

Ein thermisch rauschender Widerstand  $R$  der Temperatur  $T$  ist mit einer thermisch rauschenden Impedanz  $\underline{Z}$  gleicher Temperatur  $T$  verbunden, siehe Abbildung 13.3. Für die komplexen Wellenamplituden gilt

$$\underline{a} = \underline{b}'_{\text{R}} + \underline{\Gamma}' \underline{b}$$

und

$$\underline{b} = \underline{b}_{\text{R}} + \underline{\Gamma} \underline{a}.$$

---

<sup>2</sup>Die verfügbare Rauschleistung  $P_{\text{RA}}$  in der Pseudoeinheit dBm ergibt sich durch Normieren auf 1 mW und logarithmieren zu  $10 \log(P_{\text{RA}}/1 \text{ mW})$ .

Aufgelöst nach den komplexen Wellenamplituden erhält man

$$\underline{a} = \frac{\underline{b}'_R + \Gamma' \underline{b}_R}{1 - \Gamma \Gamma'}$$

und

$$\underline{b} = \frac{\underline{b}_R + \Gamma \underline{b}'_R}{1 - \Gamma \Gamma'}.$$

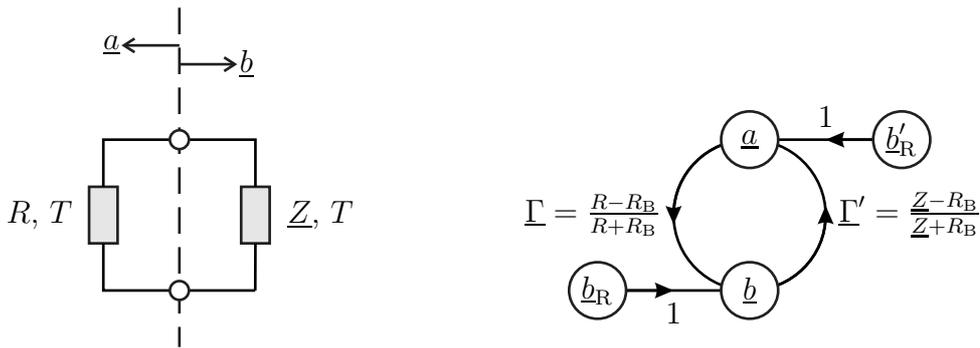


Abbildung 13.3.: Verbinden eines thermisch rauschenden Widerstands  $R$  mit einer thermisch rauschenden Impedanz  $Z$  gleicher Temperatur  $T$

Im hier betrachteten thermodynamischen Gleichgewicht muss die Leistungsbilanz, vergleiche (9.3), ausgeglichen sein:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \text{E}\{|\underline{a}|^2\} &= \frac{1}{2} \text{E}\{|\underline{b}|^2\}, \\ \frac{1}{2} \text{E}\{|\underline{b}'_R + \Gamma' \underline{b}_R|^2\} &= \frac{1}{2} \text{E}\{|\underline{b}_R + \Gamma \underline{b}'_R|^2\}. \end{aligned}$$

Da es sich um räumlich getrennte unabhängige Rauschquellen handelt, sind die komplexen Wellenamplituden der Rauschwellen unkorreliert und es gilt

$$\frac{1}{2} \text{E}\{\underline{b}_R \underline{b}'_R^*\} = \frac{1}{2} \text{E}\{\underline{b}'_R \underline{b}_R^*\} = 0.$$

Mit (13.1) folgt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \text{E}\{|\underline{b}'_R|^2\} + |\Gamma'|^2 \frac{1}{2} \text{E}\{|\underline{b}_R|^2\} &= \frac{1}{2} \text{E}\{|\underline{b}_R|^2\} + |\Gamma|^2 \frac{1}{2} \text{E}\{|\underline{b}'_R|^2\}, \\ \underbrace{\frac{1}{2} \text{E}\{|\underline{b}_R|^2\}}_{P_{\text{RA}}} \frac{1}{1 - |\Gamma|^2} &= \underbrace{\frac{1}{2} \text{E}\{|\underline{b}'_R|^2\}}_{P'_{\text{RA}}} \frac{1}{1 - |\Gamma'|^2}. \end{aligned}$$

Schließlich erhält man mit (13.3) die innerhalb der Bandbreite  $B$  verfügbare Rauschleistung

$$P'_{\text{RA}} = \frac{1}{2} \text{E}\{|b'_R|^2\} \frac{1}{1 - |\underline{\Gamma}'|^2} = kTB. \quad (13.6)$$

Die verfügbare Rauschleistung  $P'_{\text{RA}}$  aller thermisch rauschenden Eintore homogener Temperatur  $T$  und nicht nur die von Wirkwiderständen  $R$  ist daher  $kTB$ . Für verlustfreie Eintore mit  $|\underline{\Gamma}'|^2 = 1$ , siehe (9.7), muss

$$\frac{1}{2} \text{E}\{|b'_R|^2\} = 0 \quad (13.7)$$

gelten, damit die verfügbare Rauschleistung nicht unendlich groß wird.

Auch andere Rauschquellen modelliert man in der Hochfrequenztechnik häufig als thermisch rauschende Eintore, wobei die Rauschtemperatur  $T$  entsprechend der jeweils verfügbaren Rauschleistung  $P'_{\text{RA}}$  zu wählen ist.

## 13.2. Rauschende Mehr Tore

### 13.2.1. Modellierung rauschender Mehr Tore

Im Modell eines rauschenden Mehrtors ist an jedem Tor  $n$  eine Rauschurwelle mit der komplexen Wellenamplitude  $\underline{b}_{Rn}$  zu berücksichtigen, siehe Abbildung 13.4.

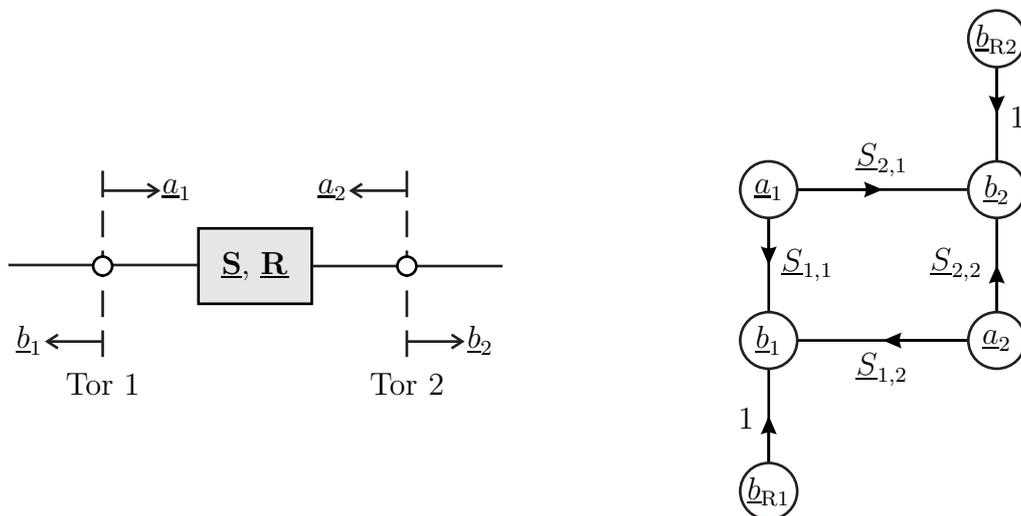


Abbildung 13.4.: Modell eines rauschenden Zweitores

Mit dem Vektor

$$\underline{\mathbf{b}}_{\mathbf{R}} = \begin{pmatrix} \underline{b}_{\mathbf{R}1} \\ \vdots \\ \underline{b}_{\mathbf{R}N} \end{pmatrix} \quad (13.8)$$

der komplexen Wellenamplituden der Rauschurwellen und der Streumatrix  $\underline{\mathbf{S}}$  erhält man den Zusammenhang

$$\underline{\mathbf{b}} = \underline{\mathbf{S}} \cdot \underline{\mathbf{a}} + \underline{\mathbf{b}}_{\mathbf{R}} \quad (13.9)$$

zwischen den komplexen Wellenamplituden, vergleiche (9.46).

Die komplexen Wellenamplituden  $\underline{b}_{\mathbf{R}n}$  der Rauschurwellen sind im Allgemeinen korreliert, da sie zumindest teilweise auf gemeinsame physikalische Rauschquellen im Inneren des Mehrtors zurückgehen. Man definiert die Rauschwellenkorrelationsmatrix

$$\underline{\mathbf{R}} = \frac{1}{2} \mathbb{E} \{ \underline{\mathbf{b}}_{\mathbf{R}} \cdot \underline{\mathbf{b}}_{\mathbf{R}}^{*\mathbf{T}} \}. \quad (13.10)$$

Die Korrelationen sind bei Rauschleistungsberechnungen zu berücksichtigen, da man die Leistungsbeiträge der einzelnen Rauschurwellen zur Gesamtleistung im Allgemeinen nicht einfach aufaddieren darf.

### 13.2.2. Analyse komplexer rauschender Netzwerke

Die Analyse komplexer rauschender Netzwerke beruht auf dem in Abschnitt 9.3 geschilderten Ansatz. An Stelle des Vektors  $\underline{\mathbf{b}}_{\mathbf{Q}}$  der komplexen Wellenamplituden der Urwellen tritt nun der Vektor  $\underline{\mathbf{b}}_{\mathbf{R}}$  der komplexen Wellenamplituden der Rauschurwellen mit der Rauschwellenkorrelationsmatrix  $\underline{\mathbf{R}}$ .

Einsetzen der komplexen Wellenamplituden  $\underline{\mathbf{b}}_{\mathbf{R}}$  der Rauschurwellen in (9.67) ergibt die komplexen Wellenamplituden der zulaufenden Wellen

$$\underline{\mathbf{a}} = (\underline{\mathbf{K}} - \underline{\mathbf{S}})^{-1} \cdot \underline{\mathbf{b}}_{\mathbf{R}}.$$

Die zulaufenden Rauschleistungen entsprechen den Diagonalelementen der Korrelationsmatrix

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \mathbb{E} \{ \underline{\mathbf{a}} \cdot \underline{\mathbf{a}}^{*\mathbf{T}} \} &= \frac{1}{2} \mathbb{E} \left\{ (\underline{\mathbf{K}} - \underline{\mathbf{S}})^{-1} \cdot \underline{\mathbf{b}}_{\mathbf{R}} \cdot \underline{\mathbf{b}}_{\mathbf{R}}^{*\mathbf{T}} (\underline{\mathbf{K}} - \underline{\mathbf{S}}^{*\mathbf{T}})^{-1} \right\} \\ &= (\underline{\mathbf{K}} - \underline{\mathbf{S}})^{-1} \cdot \underline{\mathbf{R}} \cdot (\underline{\mathbf{K}} - \underline{\mathbf{S}}^{*\mathbf{T}})^{-1}, \end{aligned} \quad (13.11)$$

wobei (9.63) und (13.10) verwendet wurde. Analog erhält man aus (9.68) die komplexen Wellenamplituden der ablaufenden Wellen

$$\underline{\mathbf{b}} = (\underline{\mathbf{E}} - \underline{\mathbf{S}} \cdot \underline{\mathbf{K}})^{-1} \cdot \underline{\mathbf{b}}_{\mathbf{R}}$$

und als Diagonalelemente der Korrelationsmatrix

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \mathbb{E}\{\underline{\mathbf{b}} \cdot \underline{\mathbf{b}}^{*\text{T}}\} &= \frac{1}{2} \mathbb{E}\left\{(\mathbf{E} - \underline{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{K})^{-1} \cdot \underline{\mathbf{b}}_{\text{R}} \cdot \underline{\mathbf{b}}_{\text{R}}^{*\text{T}} (\mathbf{E} - \mathbf{K} \cdot \underline{\mathbf{S}}^{*\text{T}})^{-1}\right\} \\ &= (\mathbf{E} - \underline{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{K})^{-1} \cdot \underline{\mathbf{R}} \cdot (\mathbf{E} - \mathbf{K} \cdot \underline{\mathbf{S}}^{*\text{T}})^{-1} \end{aligned} \quad (13.12)$$

die ablaufenden Rauschleistungen.

### 13.2.3. Thermisch rauschende Mehrtore homogener Temperatur

Durch Einbetten eines thermisch rauschenden  $N$ -Tors homogener Temperatur in ein verlustfreies  $N+1$ -Tor erhält man ein thermisch rauschendes Eintor homogener Temperatur, siehe Abbildung 13.5. Gemäß (13.7) wird das Rauschen des Eintors allein durch die Rauschwellen des thermisch rauschenden  $N$ -Tors homogener Temperatur verursacht.

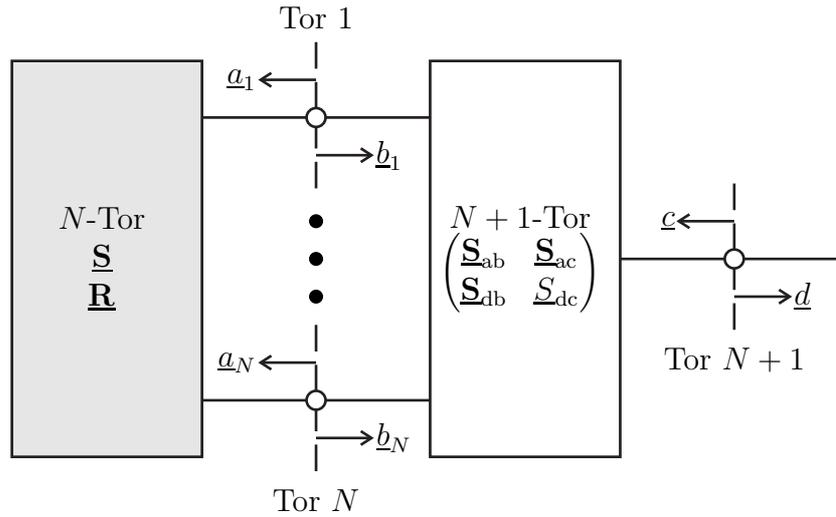


Abbildung 13.5.: Einbetten eines rauschenden  $N$ -Tors in ein verlustfreies  $N+1$ -Tor

Die Streumatrix des verlustfreien  $N+1$ -Tors ist gemäß (9.7) unitär:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{S}}_{ab} & \underline{\mathbf{S}}_{ac} \\ \underline{\mathbf{S}}_{db} & \underline{\mathbf{S}}_{dc} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{S}}_{ab} & \underline{\mathbf{S}}_{ac} \\ \underline{\mathbf{S}}_{db} & \underline{\mathbf{S}}_{dc} \end{pmatrix}^{*\text{T}} = \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{S}}_{ab} & \underline{\mathbf{S}}_{ac} \\ \underline{\mathbf{S}}_{db} & \underline{\mathbf{S}}_{dc} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{S}}_{ab}^{*\text{T}} & \underline{\mathbf{S}}_{db}^{*\text{T}} \\ \underline{\mathbf{S}}_{ac}^{*\text{T}} & \underline{\mathbf{S}}_{dc}^{*\text{T}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{S}}_{ab} \cdot \underline{\mathbf{S}}_{ab}^{*\text{T}} + \underline{\mathbf{S}}_{ac} \cdot \underline{\mathbf{S}}_{ac}^{*\text{T}} & \underline{\mathbf{S}}_{ab} \cdot \underline{\mathbf{S}}_{db}^{*\text{T}} + \underline{\mathbf{S}}_{ac} \cdot \underline{\mathbf{S}}_{dc}^{*\text{T}} \\ \underline{\mathbf{S}}_{db} \cdot \underline{\mathbf{S}}_{ab}^{*\text{T}} + \underline{\mathbf{S}}_{dc} \cdot \underline{\mathbf{S}}_{ac}^{*\text{T}} & \underline{\mathbf{S}}_{db} \cdot \underline{\mathbf{S}}_{db}^{*\text{T}} + \underline{\mathbf{S}}_{dc} \cdot \underline{\mathbf{S}}_{dc}^{*\text{T}} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Aus (9.4) folgt für das  $N + 1$ -Tor

$$\mathbf{a} = \underline{\mathbf{S}}_{ab} \cdot \mathbf{b} + \underline{\mathbf{S}}_{ac} \underline{\mathcal{L}}.$$

Dies in (13.9) eingesetzt ergibt

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{b}} &= \underline{\mathbf{S}} \cdot \underline{\mathbf{S}}_{ab} \cdot \mathbf{b} + \underline{\mathbf{S}} \cdot \underline{\mathbf{S}}_{ac} \underline{\mathcal{L}} + \underline{\mathbf{b}}_R \\ (\mathbf{E} - \underline{\mathbf{S}} \cdot \underline{\mathbf{S}}_{ab}) \cdot \underline{\mathbf{b}} &= \underline{\mathbf{S}} \cdot \underline{\mathbf{S}}_{ac} \underline{\mathcal{L}} + \underline{\mathbf{b}}_R \\ \underline{\mathbf{b}} &= (\mathbf{E} - \underline{\mathbf{S}} \cdot \underline{\mathbf{S}}_{ab})^{-1} \cdot \underline{\mathbf{S}} \cdot \underline{\mathbf{S}}_{ac} \underline{\mathcal{L}} + (\mathbf{E} - \underline{\mathbf{S}} \cdot \underline{\mathbf{S}}_{ab})^{-1} \cdot \underline{\mathbf{b}}_R. \end{aligned}$$

Mit (9.4) erhält man die komplexe Wellenamplitude der vom resultierenden Eintor ablaufenden Welle

$$\begin{aligned} \underline{d} &= \underline{S}_{dc} \underline{\mathcal{L}} + \underline{\mathbf{S}}_{db} \cdot \mathbf{b} \\ &= \underline{S}_{dc} \underline{\mathcal{L}} + \underline{\mathbf{S}}_{db} \cdot (\mathbf{E} - \underline{\mathbf{S}} \cdot \underline{\mathbf{S}}_{ab})^{-1} \cdot \underline{\mathbf{S}} \cdot \underline{\mathbf{S}}_{ac} \underline{\mathcal{L}} + \underline{\mathbf{S}}_{db} \cdot (\mathbf{E} - \underline{\mathbf{S}} \cdot \underline{\mathbf{S}}_{ab})^{-1} \cdot \underline{\mathbf{b}}_R \\ &= \underbrace{\left( \underline{S}_{dc} + \underline{\mathbf{S}}_{db} \cdot (\mathbf{E} - \underline{\mathbf{S}} \cdot \underline{\mathbf{S}}_{ab})^{-1} \cdot \underline{\mathbf{S}} \cdot \underline{\mathbf{S}}_{ac} \right)}_{\underline{\Gamma}} \underline{\mathcal{L}} + \underbrace{\underline{\mathbf{S}}_{db} \cdot (\mathbf{E} - \underline{\mathbf{S}} \cdot \underline{\mathbf{S}}_{ab})^{-1} \cdot \underline{\mathbf{b}}_R}_{\text{Rauschurwelle}}. \end{aligned}$$

Das Betragsquadrat des Reflexionsfaktors  $\underline{\Gamma}$  des resultierenden Eintors ergibt sich unter Ausnutzen der Unitarität der Streumatrix des verlustfreien  $N + 1$ -Tors zu

$$\begin{aligned} |\underline{\Gamma}|^2 &= \underline{\Gamma} \underline{\Gamma}^* = \left( \underline{S}_{dc} + \underline{\mathbf{S}}_{db} \cdot (\mathbf{E} - \underline{\mathbf{S}} \cdot \underline{\mathbf{S}}_{ab})^{-1} \cdot \underline{\mathbf{S}} \cdot \underline{\mathbf{S}}_{ac} \right) \\ &\quad \cdot \left( \underline{S}_{dc}^* + \underline{\mathbf{S}}_{ac}^{*\text{T}} \cdot \underline{\mathbf{S}}_{db}^{*\text{T}} \cdot (\mathbf{E} - \underline{\mathbf{S}}_{ab}^{*\text{T}} \cdot \underline{\mathbf{S}}_{ab}^{*\text{T}})^{-1} \cdot \underline{\mathbf{S}}_{db}^{*\text{T}} \right) \\ &= \underbrace{\underline{S}_{dc} \underline{S}_{dc}^*}_{1 - \underline{\mathbf{S}}_{db} \cdot \underline{\mathbf{S}}_{db}^{*\text{T}}} + \underbrace{\underline{S}_{dc} \underline{\mathbf{S}}_{ac}^{*\text{T}}}_{-\underline{\mathbf{S}}_{db} \cdot \underline{\mathbf{S}}_{ab}^{*\text{T}}} \cdot \underline{\mathbf{S}}_{db}^{*\text{T}} \cdot (\mathbf{E} - \underline{\mathbf{S}}_{ab}^{*\text{T}} \cdot \underline{\mathbf{S}}_{ab}^{*\text{T}})^{-1} \cdot \underline{\mathbf{S}}_{db}^{*\text{T}} \\ &\quad + \underline{\mathbf{S}}_{db} \cdot (\mathbf{E} - \underline{\mathbf{S}} \cdot \underline{\mathbf{S}}_{ab})^{-1} \cdot \underline{\mathbf{S}} \cdot \underbrace{\underline{\mathbf{S}}_{ac} \underline{S}_{dc}^*}_{-\underline{\mathbf{S}}_{ab} \cdot \underline{\mathbf{S}}_{db}^{*\text{T}}} \\ &\quad + \underline{\mathbf{S}}_{db} \cdot (\mathbf{E} - \underline{\mathbf{S}} \cdot \underline{\mathbf{S}}_{ab})^{-1} \cdot \underline{\mathbf{S}} \cdot \underbrace{\underline{\mathbf{S}}_{ac} \cdot \underline{\mathbf{S}}_{ac}^{*\text{T}}}_{\mathbf{E} - \underline{\mathbf{S}}_{ab} \cdot \underline{\mathbf{S}}_{ab}^{*\text{T}}} \cdot \underline{\mathbf{S}}_{db}^{*\text{T}} \cdot (\mathbf{E} - \underline{\mathbf{S}}_{ab}^{*\text{T}} \cdot \underline{\mathbf{S}}_{ab}^{*\text{T}})^{-1} \cdot \underline{\mathbf{S}}_{db}^{*\text{T}} \\ &= 1 - \underline{\mathbf{S}}_{db} \cdot (\mathbf{E} - \underline{\mathbf{S}} \cdot \underline{\mathbf{S}}_{ab})^{-1} \cdot \left( (\mathbf{E} - \underline{\mathbf{S}} \cdot \underline{\mathbf{S}}_{ab}) \cdot (\mathbf{E} - \underline{\mathbf{S}}_{ab}^{*\text{T}} \cdot \underline{\mathbf{S}}_{ab}^{*\text{T}}) \right. \\ &\quad \left. + (\mathbf{E} - \underline{\mathbf{S}} \cdot \underline{\mathbf{S}}_{ab}) \cdot \underline{\mathbf{S}}_{ab}^{*\text{T}} \cdot \underline{\mathbf{S}}_{db}^{*\text{T}} + \underline{\mathbf{S}} \cdot \underline{\mathbf{S}}_{ab} \cdot (\mathbf{E} - \underline{\mathbf{S}}_{ab}^{*\text{T}} \cdot \underline{\mathbf{S}}_{ab}^{*\text{T}}) \right. \\ &\quad \left. + \underline{\mathbf{S}} \left( \underline{\mathbf{S}}_{ab} \cdot \underline{\mathbf{S}}_{ab}^{*\text{T}} - \mathbf{E} \right) \cdot \underline{\mathbf{S}}_{db}^{*\text{T}} \right) \cdot (\mathbf{E} - \underline{\mathbf{S}}_{ab}^{*\text{T}} \cdot \underline{\mathbf{S}}_{ab}^{*\text{T}})^{-1} \cdot \underline{\mathbf{S}}_{db}^{*\text{T}} \\ &= 1 - \underline{\mathbf{S}}_{db} \cdot (\mathbf{E} - \underline{\mathbf{S}} \cdot \underline{\mathbf{S}}_{ab})^{-1} \cdot (\mathbf{E} - \underline{\mathbf{S}} \cdot \underline{\mathbf{S}}_{ab}^{*\text{T}}) \cdot (\mathbf{E} - \underline{\mathbf{S}}_{ab}^{*\text{T}} \cdot \underline{\mathbf{S}}_{ab}^{*\text{T}})^{-1} \cdot \underline{\mathbf{S}}_{db}^{*\text{T}}. \end{aligned}$$

Für die Leistung der Rauschurwelle des resultierenden Eintors erhält man mit der Rauschwellenkorrelationsmatrix (13.10) des rauschenden  $N$ -Tors

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \mathbb{E} \left\{ \underline{\mathbf{S}}_{\text{db}} \cdot (\mathbf{E} - \underline{\mathbf{S}} \cdot \underline{\mathbf{S}}_{\text{ab}})^{-1} \cdot \underline{\mathbf{b}}_{\text{R}} \cdot \underline{\mathbf{b}}_{\text{R}}^{*\text{T}} \cdot (\mathbf{E} - \underline{\mathbf{S}}_{\text{ab}}^{*\text{T}} \cdot \underline{\mathbf{S}}^{*\text{T}})^{-1} \cdot \underline{\mathbf{S}}_{\text{db}}^{*\text{T}} \right\} \\ & = \underline{\mathbf{S}}_{\text{db}} \cdot (\mathbf{E} - \underline{\mathbf{S}} \cdot \underline{\mathbf{S}}_{\text{ab}})^{-1} \cdot \underline{\mathbf{R}} \cdot (\mathbf{E} - \underline{\mathbf{S}}_{\text{ab}}^{*\text{T}} \cdot \underline{\mathbf{S}}^{*\text{T}})^{-1} \cdot \underline{\mathbf{S}}_{\text{db}}^{*\text{T}}. \end{aligned}$$

Durch Einbettung eines thermisch rauschenden  $N$ -Tors homogener Temperatur erhält man ein thermisch rauschendes Eintor homogener Temperatur. Für die Leistung der Rauschurwelle des resultierenden Eintors folgt dann mit (13.6)

$$\begin{aligned} & \underline{\mathbf{S}}_{\text{db}} \cdot (\mathbf{E} - \underline{\mathbf{S}} \cdot \underline{\mathbf{S}}_{\text{ab}})^{-1} \cdot \underline{\mathbf{R}} \cdot (\mathbf{E} - \underline{\mathbf{S}}_{\text{ab}}^{*\text{T}} \cdot \underline{\mathbf{S}}^{*\text{T}})^{-1} \cdot \underline{\mathbf{S}}_{\text{db}}^{*\text{T}} \\ & = kTB \left( 1 - |\underline{\Gamma}'|^2 \right) \\ & = kTB \underline{\mathbf{S}}_{\text{db}} \cdot (\mathbf{E} - \underline{\mathbf{S}} \cdot \underline{\mathbf{S}}_{\text{ab}})^{-1} \cdot (\mathbf{E} - \underline{\mathbf{S}} \cdot \underline{\mathbf{S}}^{*\text{T}}) \cdot (\mathbf{E} - \underline{\mathbf{S}}_{\text{ab}}^{*\text{T}} \cdot \underline{\mathbf{S}}^{*\text{T}})^{-1} \cdot \underline{\mathbf{S}}_{\text{db}}^{*\text{T}}. \end{aligned}$$

Dies muss für beliebige verlustfreie  $N + 1$ -Tore gelten. Die Rauschwellenkorrelationsmatrix des thermisch rauschenden  $N$ -Tors homogener Temperatur ergibt sich folglich zu

$$\underline{\mathbf{R}} = kTB (\mathbf{E} - \underline{\mathbf{S}} \cdot \underline{\mathbf{S}}^{*\text{T}}). \quad (13.13)$$

Die durch die Streumatrix  $\underline{\mathbf{S}}$  beschriebene Fähigkeit eines Mehrtors Leistung aufzunehmen und die durch die Rauschwellenkorrelationsmatrix  $\underline{\mathbf{R}}$  beschriebene Fähigkeit eines Mehrtors Rauschleistung abzugeben sind für thermisch rauschende Mehrtere homogener Temperatur  $T$  eng miteinander verknüpft.

Die Streumatrix  $\underline{\mathbf{S}}$  eines entkoppelten Mehrtors ist eine Diagonalmatrix. Die Rauschquellen entkoppelter thermisch rauschender Mehrtere homogener Temperatur  $T$  sind somit unkorreliert. Bei eigenreflexionsfreien thermisch rauschenden Zweitoren homogener Temperatur  $T$ , das heißt bei  $\underline{\mathbf{S}}_{1,1} = \underline{\mathbf{S}}_{2,2} = 0$  gemäß (9.5), sind die Rauschquellen ebenfalls unkorreliert. Für verlustfreie thermisch rauschende Mehrtere homogener Temperatur  $T$  gilt wie erwartet  $\underline{\mathbf{R}} = \mathbf{0}$ , da ihre Streumatrix  $\underline{\mathbf{S}}$  unitär ist, siehe (9.7).

**Aufgabe 13.1** *Es wird die in Abbildung 13.6 gezeigte thermisch rauschende Paralleladmittanz homogener Temperatur  $T$  betrachtet. Berechnen Sie den normierten Korrelationskoeffizienten*

$$\underline{C} = \frac{\frac{1}{2} \mathbb{E} \{ \underline{b}_{\text{R}1} \underline{b}_{\text{R}2}^* \}}{\sqrt{\frac{1}{2} \mathbb{E} \{ |\underline{b}_{\text{R}1}|^2 \} \frac{1}{2} \mathbb{E} \{ |\underline{b}_{\text{R}2}|^2 \}}}$$

*der Rauschurwellen!*

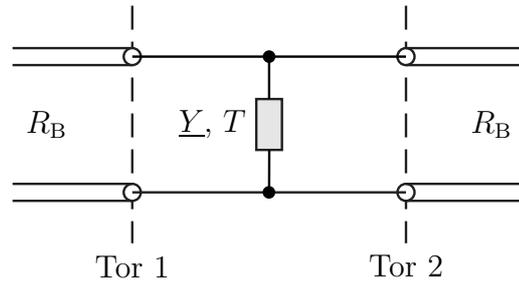


Abbildung 13.6.: Thermisch rauschende Paralleladmittanz

### 13.3. Rauschende Zweitore

#### 13.3.1. Effektive Rauschtemperatur und Rauschzahl

Zweitore sind von besonderer Bedeutung beim Verarbeiten nachrichtentechnischer Signale. Eine intensive Beschäftigung mit den Rauscheigenschaften von Zweitoren ist somit angebracht. Hierzu wird der in Abbildung 13.7 gezeigte Signalflussgraph eines eingangsseitig an Tor 1 mit einer rauschfreien Quelle mit dem Quellenreflexionsfaktor  $\underline{\Gamma}_Q$  abgeschlossenen und ausgangsseitig an Tor 2 mit einer reflexionsfreien Last abgeschlossenen rauschenden Zweitors betrachtet.

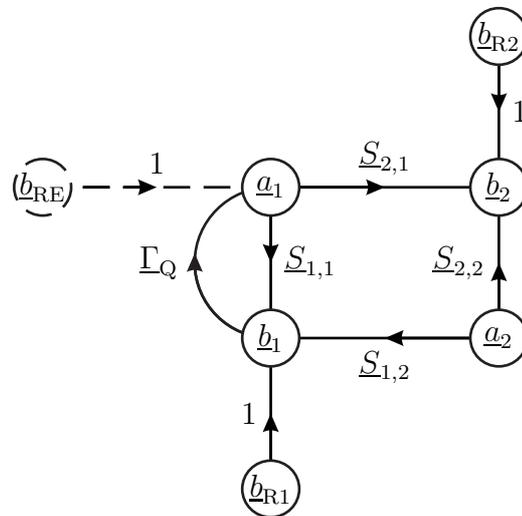


Abbildung 13.7.: Modell eines an eine rauschfreie Quelle und eine reflexionsfreie Last angeschlossenen rauschenden Zweitors

Die komplexe Wellenamplitude der ausgangsseitig von Tor 2 ablaufenden Welle bei reflexionsfreier Last erhält man unter Verwenden der Vereinfachungsregeln

aus Abbildung 9.3 und  $a_2 = 0$  zu

$$\underline{b}_2 = \underline{b}_{R1} \frac{\Gamma_Q \underline{S}_{2,1}}{1 - \Gamma_Q \underline{S}_{1,1}} + \underline{b}_{R2} = \frac{\underline{S}_{2,1}}{1 - \Gamma_Q \underline{S}_{1,1}} \left( \underline{b}_{R1} \Gamma_Q + \frac{1 - \Gamma_Q \underline{S}_{1,1}}{\underline{S}_{2,1}} \underline{b}_{R2} \right),$$

das heißt die Rauschquellen im Zweitor wirken wie eine Ersatzrauschquelle mit der komplexen Wellenamplitude der Rauschurwelle

$$\underline{b}_{RE} = \underline{b}_{R1} \Gamma_Q + \frac{1 - \Gamma_Q \underline{S}_{1,1}}{\underline{S}_{2,1}} \underline{b}_{R2} = \Gamma_Q \left( \underline{b}_{R1} - \frac{\underline{S}_{1,1}}{\underline{S}_{2,1}} \underline{b}_{R2} \right) + \frac{1}{\underline{S}_{2,1}} \underline{b}_{R2}$$

am Zweitoreingang. Die verfügbare Eingangsrauschleistung der Ersatzrauschquelle an Tor 1 ist

$$\Delta P_{RA1} = \frac{1}{2} \text{E} \left\{ |\underline{b}_{RE}|^2 \right\} \frac{1}{1 - |\Gamma_Q|^2},$$

siehe (13.1).

Ein thermisch rauschendes Eintor müsste gemäß (13.6) die effektive Rauschtemperatur

$$T_{\text{eff}} = \frac{\Delta P_{RA1}}{kB} = \frac{\frac{1}{2} \text{E} \left\{ \left| \Gamma_Q \left( \underline{b}_{R1} - \frac{\underline{S}_{1,1}}{\underline{S}_{2,1}} \underline{b}_{R2} \right) + \frac{1}{\underline{S}_{2,1}} \underline{b}_{R2} \right|^2 \right\}}{kB \left( 1 - |\Gamma_Q|^2 \right)}$$

haben, um diese verfügbare Eingangsrauschleistung  $\Delta P_{RA1}$  zu erzeugen. Mit den Rauschparametern

$$R_{1,1} = \frac{1}{2} \text{E} \left\{ \left| \underline{b}_{R1} - \frac{\underline{S}_{1,1}}{\underline{S}_{2,1}} \underline{b}_{R2} \right|^2 \right\}, \quad (13.14)$$

$$\underline{R}_{1,2} = \frac{1}{2} \text{E} \left\{ \left( \underline{b}_{R1} - \frac{\underline{S}_{1,1}}{\underline{S}_{2,1}} \underline{b}_{R2} \right) \left( \frac{1}{\underline{S}_{2,1}} \underline{b}_{R2} \right)^* \right\}, \quad (13.15)$$

$$R_{2,2} = \frac{1}{2} \text{E} \left\{ \left| \frac{1}{\underline{S}_{2,1}} \underline{b}_{R2} \right|^2 \right\} \quad (13.16)$$

folgt für die effektive Rauschtemperatur

$$T_{\text{eff}} = \frac{|\Gamma_Q|^2 R_{1,1} + \Gamma_Q \underline{R}_{1,2} + \Gamma_Q^* \underline{R}_{1,2}^* + R_{2,2}}{kB \left( 1 - |\Gamma_Q|^2 \right)}. \quad (13.17)$$

Die effektive Rauschtemperatur  $T_{\text{eff}}$  ist offensichtlich eine Funktion des Quellenreflexionsfaktors  $\Gamma_Q$ .

Mit dem verfügbaren Leistungsgewinn  $G_A$  des Zweitors ergibt sich die vom Zweitor erzeugte verfügbare Ausgangsrauschleistung

$$\Delta P_{\text{RA2}} = G_A \Delta P_{\text{RA1}} \quad (13.18)$$

an Tor 2, siehe (12.33). Es folgt

$$T_{\text{eff}} = \frac{\Delta P_{\text{RA2}}}{G_A k B} \quad (13.19)$$

für die effektive Rauschtemperatur. Mit der Bezugstemperatur  $T_0$  definiert man weiterhin die zusätzliche Rauschzahl

$$F_Z = \frac{T_{\text{eff}}}{T_0}. \quad (13.20)$$

In der Realität ist die am Zweitoreingang angeschlossene Quelle nicht rauschfrei. Das Rauschen des Zweitors wirkt wie eine Erhöhung der Rauschtemperatur der Quelle um die effektive Rauschtemperatur  $T_{\text{eff}}$ . Falls die Rauschtemperatur der Quelle der Bezugstemperatur  $T_0$  entspricht, ergibt sich die Systemrauschtemperatur

$$T_S = T_0 + T_{\text{eff}}. \quad (13.21)$$

Man definiert die Rauschzahl

$$F = \frac{T_S}{T_0} = 1 + \frac{T_{\text{eff}}}{T_0} = 1 + F_Z. \quad (13.22)$$

Die Rauschzahl  $F$  ist ebenso wie die effektive Rauschtemperatur  $T_{\text{eff}}$  und die zusätzliche Rauschzahl  $F_Z$  vom Quellenreflexionsfaktor  $\Gamma_Q$  abhängig. Man beachte, dass die Rauschzahl  $F$  immer bezüglich einer Bezugstemperatur  $T_0$  definiert ist. Für die Rauschzahl  $F'$  bei einer anderen Bezugstemperatur  $T'_0$  ergibt sich

$$F' = (F - 1) \frac{T_0}{T'_0} + 1. \quad (13.23)$$

Man kann die Rauschzahl auch als Verhältnis der verfügbaren Ausgangsrauschleistung

$$P_{\text{RA2}} = G_A k T_S B = G_A k (T_0 + T_{\text{eff}}) B \quad (13.24)$$

an Tor 2 und der verstärkten von der thermisch rauschenden Quelle der Bezugstemperatur  $T_0$  stammenden verfügbaren Eingangsrauschleistung

$$P_{\text{RA1}} = k T_0 B \quad (13.25)$$

gemäß (13.6) darstellen [Fri44]:

$$F = \frac{P_{\text{RA2}}}{G_A P_{\text{RA1}}}. \quad (13.26)$$

Falls die Rauschtemperatur der Quelle der Bezugstemperatur  $T_0$  entspricht, ergibt sich das Signal-Rausch-Verhältnis am Zweitoreingang mit der verfügbaren Nutzsignalleistung  $P_{\text{SA}}$  zu

$$\gamma_1 = \frac{P_{\text{SA}}}{P_{\text{RA1}}} = \frac{P_{\text{SA}}}{kT_0 B}.$$

Am Zweitorausgang erhält man mit dem verfügbaren Leistungsgewinn  $G_A$  des Zweitors das Signal-Rausch-Verhältnis

$$\gamma_2 = \frac{G_A P_{\text{SA}}}{P_{\text{RA2}}} = \frac{G_A P_{\text{SA}}}{G_A kT_S B} = \frac{P_{\text{SA}}}{kT_S B}.$$

Das Verhältnis dieser Signal-Rausch-Verhältnisse entspricht der Rauschzahl

$$\frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{T_S}{T_0} = F. \quad (13.27)$$

Die Rauschzahl  $F$  ist somit ein Maß für die Verschlechterung des Signal-Rausch-Verhältnisses infolge des Rauschens des Zweitors.

**Aufgabe 13.2** *Es wird eine an eine Quelle mit dem Quellenreflexionsfaktor  $\underline{\Gamma}_Q$  angeschlossene thermisch rauschende Einwegleitung homogener Temperatur  $T$  betrachtet, siehe Abbildung 13.8. Berechnen Sie die Rauschzahl  $F$  der Einwegleitung abhängig von Quellenreflexionsfaktor  $\underline{\Gamma}_Q$ , Temperatur  $T$  der Einwegleitung und Bezugstemperatur  $T_0$ !*

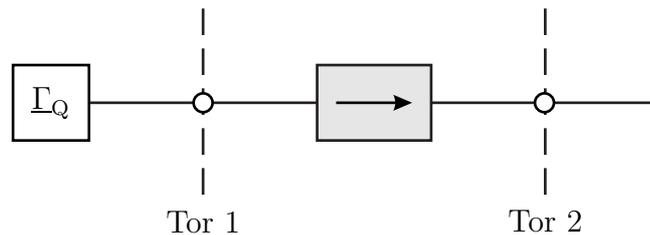


Abbildung 13.8.: An eine Quelle mit Quellenreflexionsfaktor  $\underline{\Gamma}_Q$  angeschlossene thermisch rauschende Einwegleitung

### 13.3.2. Thermisch rauschende Zweitore homogener Temperatur

Es werden thermisch rauschende Zweitore mit einer der Bezugstemperatur entsprechenden homogenen Temperatur  $T_0$  wie zum Beispiel Dämpfungsglieder betrachtet, siehe Abbildung 13.9.

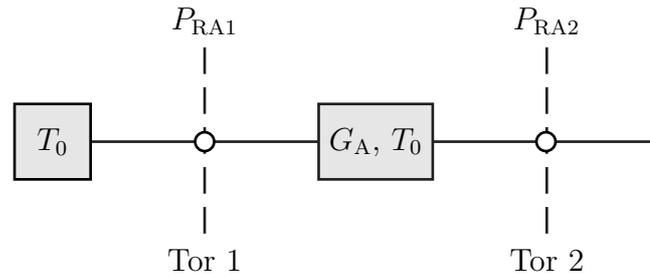


Abbildung 13.9.: An eine thermisch rauschende Quelle der Bezugstemperatur  $T_0$  angeschlossenes thermisch rauschendes Zweitor homogener Temperatur  $T = T_0$

Die von der thermisch rauschenden Quelle der Temperatur  $T_0$  stammende verfügbare Eingangsausleistung ergibt sich mit (13.6) zu

$$P_{RA1} = kT_0B.$$

Vom Ausgang her gesehen entspricht das thermisch rauschende Zweitor homogener Temperatur  $T_0$  mit dem eingangsseitigen thermisch rauschenden Abschluss der gleichen Temperatur  $T_0$  einem thermisch rauschendem Eintor homogener Temperatur  $T_0$ . Die verfügbare Ausgangsausleistung ist gemäß (13.6)

$$P_{RA2} = kT_0B.$$

Mit (13.26) folgt die Rauschzahl

$$F = \frac{P_{RA2}}{G_A P_{RA1}} = \frac{1}{G_A}, \quad (13.28)$$

die dem Kehrwert des verfügbaren Leistungsgewinns  $G_A$  entspricht, siehe (12.33).

### 13.3.3. Kaskade rauschender Zweitore

Bei einer rauschfreien Quelle am Eingang der beiden in Serie geschalteten Zweitore ergäbe sich die verfügbare Rauschleistung am Ausgang der Kaskade als Summe

der vom ersten Zweitor erzeugten und anschließend vom zweiten Zweitor verstärkten Rauschleistung und der vom zweiten Zweitor erzeugten Rauschleistung, siehe Abbildung 13.10. Mit (13.19) und (12.36) folgt für die effektive Rauschtemperatur der Kaskade

$$T_{\text{eff}} = \frac{G_{A2}G_{A1}kT_{\text{eff1}}B + G_{A2}kT_{\text{eff2}}B}{G_AkB} = T_{\text{eff1}} + \frac{T_{\text{eff2}}}{G_{A1}}. \quad (13.29)$$

Wichtig hierbei ist, dass jeweils die bei dem für den Eingang sichtbaren Reflexionsfaktor gültige effektive Rauschtemperatur des Zweitores verwendet wird. Die zusätzliche Rauschzahl der Kaskade ergibt sich gemäß (13.20) zu

$$F_Z = \frac{T_{\text{eff1}}}{T_0} + \frac{T_{\text{eff2}}}{G_{A1}T_0} = F_{Z1} + \frac{F_{Z2}}{G_{A1}} \quad (13.30)$$

und die Rauschzahl der Kaskade ergibt sich schließlich mit (13.22) zu

$$F = 1 + F_{Z1} + \frac{F_{Z2}}{G_{A1}} = F_1 + \frac{F_2 - 1}{G_{A1}}. \quad (13.31)$$

Die effektive Rauschtemperatur  $T_{\text{eff}}$ , die zusätzliche Rauschzahl  $F_Z$  und die Rauschzahl  $F$  einer Hochfrequenzverstärkerkaskade werden typischerweise im Wesentlichen durch die effektive Rauschtemperatur  $T_{\text{eff1}}$ , die zusätzliche Rauschzahl  $F_{Z1}$  beziehungsweise die Rauschzahl  $F_1$  des ersten Hochfrequenzverstärkers in der Kaskade bestimmt.

**Aufgabe 13.3** *Alternativ zur Rauschzahl  $F$  kann man das Rauschmaß*

$$M = \frac{F - 1}{1 - \frac{1}{G_A}} \quad (13.32)$$

*zum Beschreiben des Rauschverhaltens eines Zweitores verwenden. Berechnen Sie das Rauschmaß einer Kaskade von Zweitoren abhängig von den Rauschmaßen  $M_1$  und  $M_2$  und den verfügbaren Leistungsgewinnen  $G_{A1}$  und  $G_{A2}$  der kaskadierten Zweitore!*

*Der verfügbare Leistungsgewinn  $G_A$  der Kaskade ist gemäß (12.36) unabhängig von der Reihenfolge. Dies gilt nicht für das Rauschverhalten der Kaskade. Wie muss abhängig von den Rauschmaßen  $M_1$  und  $M_2$  die Reihenfolge gewählt werden, damit die Kaskade möglichst rauscharm ist?*

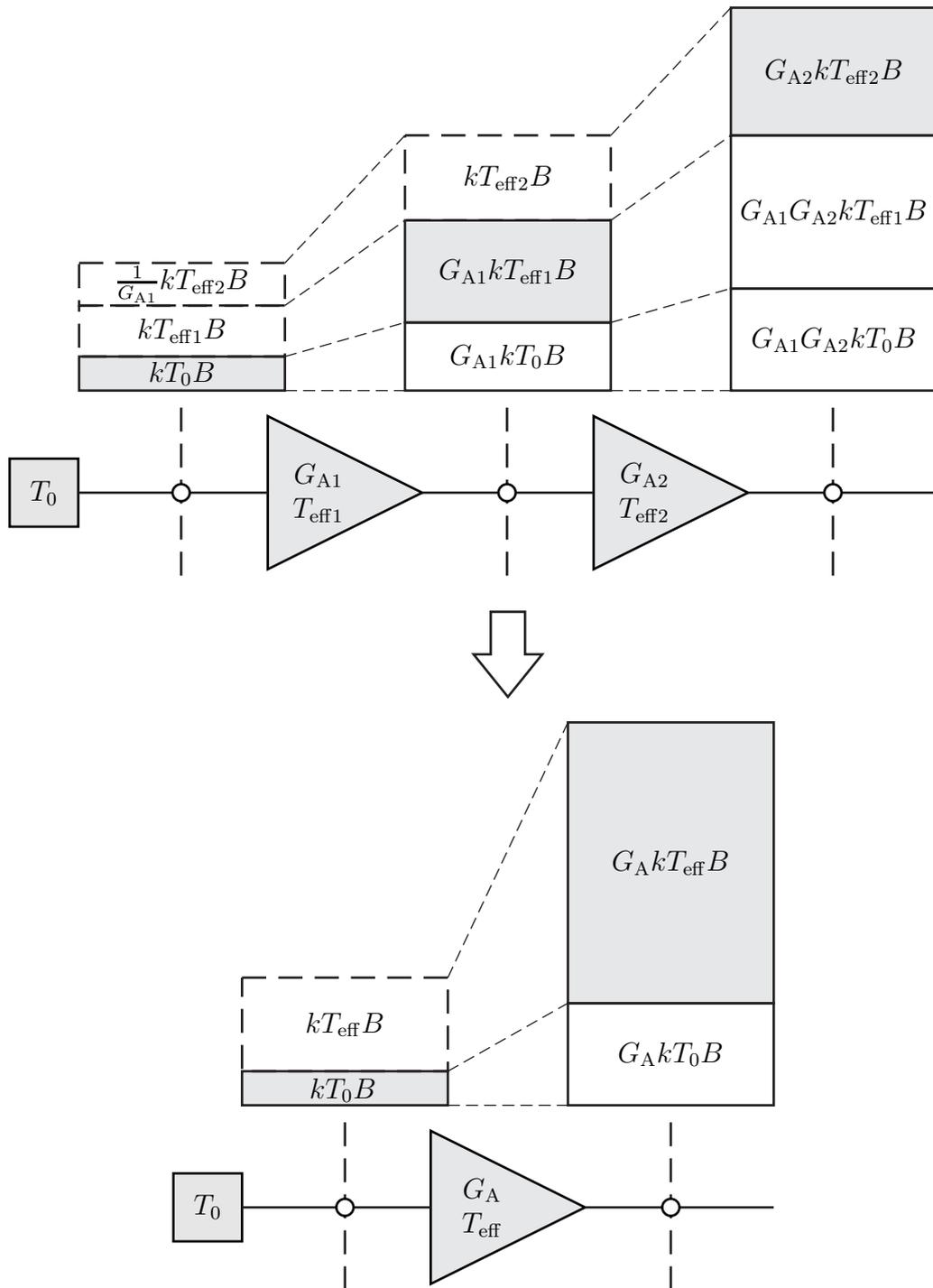


Abbildung 13.10.: Kaskade rauschender Zweitore

### 13.3.4. Messen der Rauschzahl mit der Y-Faktor-Methode

Ziel ist es, zunächst die vom Messobjekt erzeugte verfügbare Ausgangsrauschleistung  $\Delta P_{\text{RA}2}$  und den verfügbaren Leistungsgewinn  $G_{\text{ADUT}}$  zu bestimmen. Daraus lässt sich die Rauschzahl

$$F = 1 + \frac{\Delta P_{\text{RA}2}}{G_{\text{ADUT}} k T_0 B}$$

prinzipiell berechnen, siehe (13.19) und (13.22). Beim Durchführen der Messung treten zwei Probleme auf, siehe Abbildung 13.11.<sup>3</sup>

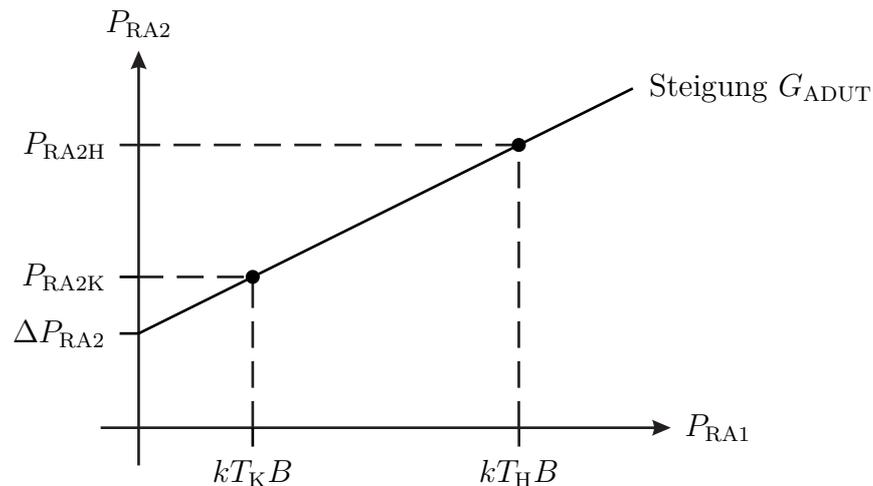


Abbildung 13.11.: Messen der Rauschzahl

- Zum direkten Messen der vom Messobjekt erzeugten verfügbaren Ausgangsrauschleistung  $\Delta P_{\text{RA}2}$  wäre es erforderlich, das Messobjekt eingangsseitig rauschfrei abzuschließen, was praktisch nicht möglich ist. Statt dessen führt man zwei Messungen mit eingangsseitigen Abschlüssen mit unterschiedlichen bekannten Rauschtemperaturen durch. Man kann hierzu eine Rauschquelle verwenden, die durch eine Steuerspannung zwischen einem kalten Zustand mit der Rauschtemperatur  $T_{\text{K}}$  und einem heißen Zustand mit der Rauschtemperatur  $T_{\text{H}}$  umgeschaltet werden kann, siehe Abbildung 13.12.

Die verfügbaren Ausgangsrauschleistungen des Messobjekts sind gemäß (13.24):

$$\begin{aligned} P_{\text{RA}2\text{K}} &= G_{\text{ADUT}} k (T_{\text{K}} + T_{\text{eff}}) B, \\ P_{\text{RA}2\text{H}} &= G_{\text{ADUT}} k (T_{\text{H}} + T_{\text{eff}}) B. \end{aligned}$$

<sup>3</sup>Zum frequenzselektiven Messen von Rauschleistungen verwendet man üblicherweise einen Spektralanalysator, siehe Anhang C.2.2.

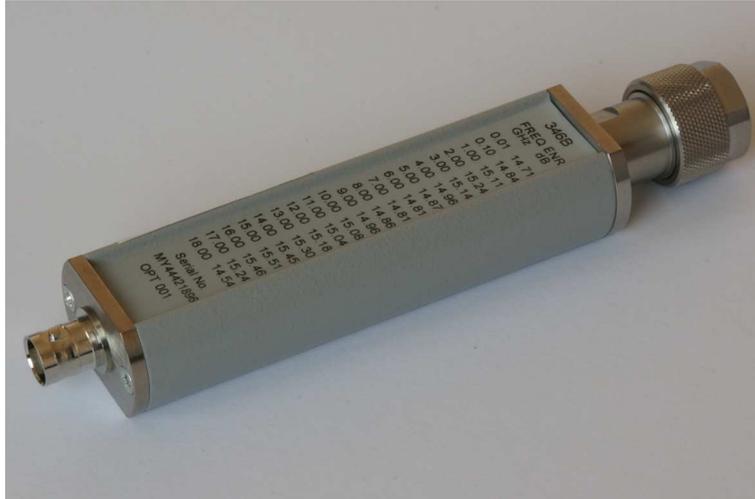


Abbildung 13.12.: Rauschquelle. Über die Buchse auf der linken Seite wird die Steuerspannung zum Umschalten zwischen kaltem und heißem Zustand zugeführt

Für die Differenz der verfügbaren Ausgangsrauschleistungen folgt

$$P_{\text{RA2H}} - P_{\text{RA2K}} = G_{\text{ADUT}} k (T_{\text{H}} - T_{\text{K}}) B. \quad (13.33)$$

Aus dem als  $Y$ -Faktor bezeichneten Verhältnis der gemessenen verfügbaren Ausgangsrauschleistungen

$$Y = \frac{P_{\text{RA2H}}}{P_{\text{RA2K}}} = \frac{T_{\text{H}} + T_{\text{eff}}}{T_{\text{K}} + T_{\text{eff}}} \quad (13.34)$$

lässt sich nun einfach die effektive Rauschtemperatur

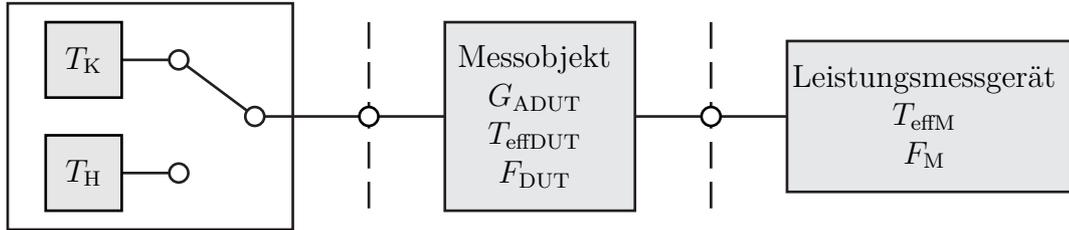
$$T_{\text{eff}} = \frac{T_{\text{H}} - Y T_{\text{K}}}{Y - 1}$$

berechnen. Fehlanpassungen des Leistungsmessgeräts haben keine Auswirkungen auf das gemessene Leistungsverhältnis. Mit (13.22) folgt die Rauschzahl

$$F = \frac{T_{\text{H}}/T_0 - 1 + Y(1 - T_{\text{K}}/T_0)}{Y - 1}. \quad (13.35)$$

Speziell wenn die Rauschtemperatur  $T_{\text{K}}$  im kalten Zustand gleich der Bezugstemperatur  $T_0$  ist, gilt vereinfachend

$$F = \frac{T_{\text{H}} - T_0}{T_0(Y - 1)}.$$


 Abbildung 13.13.: System zum Messen der Rauschzahl  $F_{\text{DUT}}$ 

Die als bekannt vorausgesetzten relevanten Eigenschaften der Rauschquelle werden hier durch das als Übertemperaturverhältnis (Excess Noise Ratio, ENR) bezeichnete Verhältnis  $\frac{T_{\text{H}} - T_0}{T_0}$  vollständig spezifiziert.

- Man misst zunächst nur die Rauschzahl  $F$  der Kaskade aus Messobjekt und Leistungsmessgerät, siehe Abbildung 13.13.

Zur Elimination des Einflusses des Leistungsmessgeräts ist eine Fehlerkorrektur erforderlich. Zur Kalibriermessung wird die Rauschquelle direkt mit dem Leistungsmessgerät verbunden. Man misst die verfügbaren Ausgangsrauschleistungen  $P_{\text{RA2HM}}$  und  $P_{\text{RA2KM}}$  im heißen beziehungsweise kalten Zustand der Rauschquelle. Man erhält das Verhältnis

$$Y_{\text{M}} = \frac{P_{\text{RA2HM}}}{P_{\text{RA2KM}}} = \frac{T_{\text{H}} + T_{\text{effM}}}{T_{\text{K}} + T_{\text{effM}}} \quad (13.36)$$

der gemessenen verfügbaren Rauschleistungen und schließlich die Rauschzahl

$$F_{\text{M}} = \frac{T_{\text{H}}/T_0 - 1 + Y_{\text{M}}(1 - T_{\text{K}}/T_0)}{Y_{\text{M}} - 1} \quad (13.37)$$

des Leistungsmessgeräts. Wichtig hierbei ist, dass die Rauschquelle den gleichen Reflexionsfaktor hat wie der Ausgang des Messobjekts, da die Rauschzahl des Leistungsmessgeräts vom Reflexionsfaktor abhängt. Aus der Differenz der am Ausgang der Rauschquelle gemessenen verfügbaren Rauschleistungen

$$P_{\text{RA2HM}} - P_{\text{RA2KM}} = k(T_{\text{H}} - T_{\text{K}})B$$

kann man mit (13.33) den verfügbaren Leistungsgewinn des Messobjekts

$$G_{\text{ADUT}} = \frac{P_{\text{RA2H}} - P_{\text{RA2K}}}{P_{\text{RA2HM}} - P_{\text{RA2KM}}} \quad (13.38)$$

berechnen. Auch hierbei ist es wieder wichtig, dass die Rauschquelle den gleichen Reflexionsfaktor hat wie der Ausgang des Messobjekts, da sonst unterschiedliche Fehlanpassungen des Leistungsmessgeräts resultieren.

Schließlich führt man basierend auf (13.31) die Korrekturrechnung durch und erhält die Rauschzahl

$$F_{\text{DUT}} = F - \frac{F_{\text{M}} - 1}{G_{\text{ADUT}}} \quad (13.39)$$

des Messobjekts. Diese theoretisch mögliche Fehlerkorrektur gelingt praktisch nur unvollkommen. Daher ist es wichtig, Fehler von vornherein durch Verwenden eines Leistungsmessgeräts mit kleiner Rauschzahl  $F_{\text{M}}$  klein zu halten. Praktisch erreicht man dies durch den Einsatz eines rauscharmen Vorverstärkers, siehe (13.31).

### 13.3.5. Rauschanpassung

Die vom Quellenreflexionsfaktor  $\underline{\Gamma}_{\text{Q}}$  abhängige effektive Rauschtemperatur  $T_{\text{eff}}$  eines Zweitores wurde in (13.17) berechnet. Für die Orte konstanter effektiver Rauschtemperatur  $T_{\text{eff}}$  folgt

$$kT_{\text{eff}}B(1 - \underline{\Gamma}_{\text{Q}}\underline{\Gamma}_{\text{Q}}^*) = \underline{\Gamma}_{\text{Q}}\underline{\Gamma}_{\text{Q}}^*R_{1,1} + \underline{\Gamma}_{\text{Q}}\underline{R}_{1,2} + \underline{\Gamma}_{\text{Q}}^*\underline{R}_{1,2}^* + R_{2,2},$$

$$\left| \underline{\Gamma}_{\text{Q}} - \frac{-\underline{R}_{1,2}^*}{\underbrace{R_{1,1} + kT_{\text{eff}}B}_{\underline{M}_{\text{Q}}}} \right|^2 = \frac{kT_{\text{eff}}B - R_{2,2}}{\underbrace{R_{1,1} + kT_{\text{eff}}B}_{R_{\text{Q}}^2}} + \frac{\underline{R}_{1,2}\underline{R}_{1,2}^*}{(R_{1,1} + kT_{\text{eff}}B)^2}.$$

Es handelt sich offensichtlich um einen Kreis mit Mittelpunkt

$$\underline{M}_{\text{Q}} = -\frac{\underline{R}_{1,2}^*}{R_{1,1} + kT_{\text{eff}}B} \quad (13.40)$$

und Radius

$$R_{\text{Q}} = \sqrt{\frac{kT_{\text{eff}}B - R_{2,2}}{R_{1,1} + kT_{\text{eff}}B} + \frac{\underline{R}_{1,2}\underline{R}_{1,2}^*}{(R_{1,1} + kT_{\text{eff}}B)^2}} \quad (13.41)$$

$$= \frac{\sqrt{k^2T_{\text{eff}}^2B^2 - R_{2,2}kT_{\text{eff}}B + kT_{\text{eff}}BR_{1,1} - R_{2,2}R_{1,1} + |\underline{R}_{1,2}|^2}}{R_{1,1} + kT_{\text{eff}}B}$$

in der Ebene des Quellenreflexionsfaktors  $\underline{\Gamma}_{\text{Q}}$ .

Bei der minimalen effektiven Rauschtemperatur  $T_{\text{effmin}}$  wird der Radius Null:

$$k^2T_{\text{effmin}}^2B^2 - R_{2,2}kT_{\text{effmin}}B + kT_{\text{effmin}}BR_{1,1} - R_{2,2}R_{1,1} + |\underline{R}_{1,2}|^2 = 0.$$

Da es nur positive effektive Rauschtemperaturen gibt, hat diese quadratische Gleichung eine einzige physikalisch sinnvolle Lösung

$$\begin{aligned}
 T_{\text{effmin}} &= \frac{1}{2kB} \left( R_{2,2} - R_{1,1} + \sqrt{(R_{2,2} - R_{1,1})^2 + \underbrace{4R_{1,1}R_{2,2} - 4|\underline{R}_{1,2}|^2}_{\geq 0}} \right) \\
 &= \frac{1}{2kB} \left( R_{2,2} - R_{1,1} + \sqrt{(R_{2,2} + R_{1,1})^2 - 4|\underline{R}_{1,2}|^2} \right).
 \end{aligned} \tag{13.42}$$

Der zur minimalen effektiven Rauschtemperatur  $T_{\text{effmin}}$  gehörende Kreismittelpunkt entspricht dem optimalen Quellenreflexionsfaktor

$$\underline{\Gamma}_{\text{Qopt}} = -\frac{2\underline{R}_{1,2}^*}{R_{2,2} + R_{1,1} + \sqrt{(R_{2,2} + R_{1,1})^2 - 4|\underline{R}_{1,2}|^2}}. \tag{13.43}$$

Unter Verwenden der minimalen effektiven Rauschtemperatur  $T_{\text{effmin}}$ , des optimalen Quellenreflexionsfaktors  $\underline{\Gamma}_{\text{Qopt}}$  und der sich bei reflexionsfreier Quelle  $\underline{\Gamma}_{\text{Q}} = 0$  aus (13.17) ergebenden effektiven Rauschtemperatur

$$T_{\text{eff0}} = \frac{R_{2,2}}{kB} \tag{13.44}$$

kann man die Rauschparameter

$$R_{2,2} = kT_{\text{eff0}}B, \tag{13.45}$$

$$\begin{aligned}
 \underline{R}_{1,2} &= \frac{(R_{2,2} + R_{1,1})^2 - \left( (R_{2,2} + R_{1,1})^2 - 4|\underline{R}_{1,2}|^2 \right)}{4\underline{R}_{1,2}^*} \\
 &= \frac{R_{2,2} + R_{1,1} - \sqrt{(R_{2,2} + R_{1,1})^2 - 4|\underline{R}_{1,2}|^2}}{4\underline{R}_{1,2}^*} \\
 &= \frac{R_{2,2} + R_{1,1} + \sqrt{(R_{2,2} + R_{1,1})^2 - 4|\underline{R}_{1,2}|^2}}{R_{2,2} + R_{1,1} + \sqrt{(R_{2,2} + R_{1,1})^2 - 4|\underline{R}_{1,2}|^2}} \\
 &= k \frac{T_{\text{effmin}} - T_{\text{eff0}}}{\underline{\Gamma}_{\text{Qopt}}} B
 \end{aligned} \tag{13.46}$$

und

$$\begin{aligned}
 R_{1,1} &= \frac{R_{2,2} + R_{1,1} + \sqrt{(R_{2,2} + R_{1,1})^2 - 4 |R_{1,2}|^2}}{2} \\
 &\quad - \frac{R_{2,2} - R_{1,1} + \sqrt{(R_{2,2} + R_{1,1})^2 - 4 |R_{1,2}|^2}}{2} \\
 &= -\frac{R_{1,2}}{\Gamma_{\text{Qopt}}^*} - kT_{\text{effmin}}B = k\frac{T_{\text{eff0}} - T_{\text{effmin}}}{|\Gamma_{\text{Qopt}}|^2}B - kT_{\text{effmin}}B \\
 &= k\frac{T_{\text{eff0}} - T_{\text{effmin}} \left( |\Gamma_{\text{Qopt}}|^2 + 1 \right)}{|\Gamma_{\text{Qopt}}|^2}B
 \end{aligned} \tag{13.47}$$

aus obigen Gleichungen eliminieren. Aus (13.40) folgt der Mittelpunkt

$$\begin{aligned}
 \underline{M}_{\text{Q}} &= -\frac{\frac{R_{1,2}^*}{kB}}{\frac{R_{1,1}}{kB} + T_{\text{eff}}} = -\frac{\frac{T_{\text{effmin}} - T_{\text{eff0}}}{\Gamma_{\text{Qopt}}^*}}{\frac{T_{\text{eff0}} - T_{\text{effmin}} \left( |\Gamma_{\text{Qopt}}|^2 + 1 \right)}{|\Gamma_{\text{Qopt}}|^2} + T_{\text{eff}}} \\
 &= \frac{(T_{\text{eff0}} - T_{\text{effmin}}) \Gamma_{\text{Qopt}}}{T_{\text{eff0}} - T_{\text{effmin}} + (T_{\text{eff}} - T_{\text{effmin}}) |\Gamma_{\text{Qopt}}|^2}
 \end{aligned} \tag{13.48}$$

und aus (13.41) folgt der Radius

$$\begin{aligned}
 R_{\text{Q}} &= \frac{\sqrt{T_{\text{eff}} \left( T_{\text{eff}} - \frac{R_{2,2}}{kB} \right) + \left( T_{\text{eff}} - \frac{R_{2,2}}{kB} \right) \frac{R_{1,1}}{kB} + \frac{|R_{1,2}|^2}{k^2 B^2}}{\frac{R_{1,1}}{kB} + T_{\text{eff}}} \\
 &= \frac{\sqrt{T_{\text{eff}} (T_{\text{eff}} - T_{\text{eff0}}) + (T_{\text{eff}} - T_{\text{eff0}}) \frac{T_{\text{eff0}} - T_{\text{effmin}} \left( |\Gamma_{\text{Qopt}}|^2 + 1 \right)}{|\Gamma_{\text{Qopt}}|^2} + \frac{(T_{\text{effmin}} - T_{\text{eff0}})^2}{|\Gamma_{\text{Qopt}}|^2}}{\frac{T_{\text{eff0}} - T_{\text{effmin}} \left( |\Gamma_{\text{Qopt}}|^2 + 1 \right) + T_{\text{eff}} |\Gamma_{\text{Qopt}}|^2}{|\Gamma_{\text{Qopt}}|^2}} \\
 &= |\Gamma_{\text{Qopt}}| \frac{\sqrt{(T_{\text{eff}} - T_{\text{effmin}}) \left( T_{\text{eff0}} - T_{\text{effmin}} + (T_{\text{eff}} - T_{\text{eff0}}) |\Gamma_{\text{Qopt}}|^2 \right)}}{T_{\text{eff0}} - T_{\text{effmin}} + (T_{\text{eff}} - T_{\text{effmin}}) |\Gamma_{\text{Qopt}}|^2}.
 \end{aligned} \tag{13.49}$$

Die effektive Rauschtemperatur berechnet man mit (13.17) zu

$$\begin{aligned}
 T_{\text{eff}} &= \frac{|\underline{\Gamma}_Q|^2 \frac{R_{1,1}}{kB} + \underline{\Gamma}_Q \frac{R_{1,2}}{kB} + \underline{\Gamma}_Q^* \frac{R_{1,2}^*}{kB} + \frac{R_{2,2}}{kB}}{1 - |\underline{\Gamma}_Q|^2} \\
 &= \frac{|\underline{\Gamma}_Q|^2 \frac{T_{\text{eff}0} - T_{\text{effmin}} (|\underline{\Gamma}_{Q\text{opt}}|^2 + 1)}{|\underline{\Gamma}_{Q\text{opt}}|^2} + \underline{\Gamma}_Q \frac{T_{\text{effmin}} - T_{\text{eff}0}}{\underline{\Gamma}_{Q\text{opt}}} + \underline{\Gamma}_Q^* \frac{T_{\text{effmin}} - T_{\text{eff}0}}{\underline{\Gamma}_{Q\text{opt}}^*} + T_{\text{eff}0}}{1 - |\underline{\Gamma}_Q|^2} \\
 &= T_{\text{effmin}} + (T_{\text{eff}0} - T_{\text{effmin}}) \frac{|\underline{\Gamma}_Q|^2 - (\underline{\Gamma}_Q \underline{\Gamma}_{Q\text{opt}}^* + \underline{\Gamma}_Q^* \underline{\Gamma}_{Q\text{opt}}) + |\underline{\Gamma}_{Q\text{opt}}|^2}{|\underline{\Gamma}_{Q\text{opt}}|^2 (1 - |\underline{\Gamma}_Q|^2)} \\
 &= T_{\text{effmin}} + (T_{\text{eff}0} - T_{\text{effmin}}) \frac{|\underline{\Gamma}_Q - \underline{\Gamma}_{Q\text{opt}}|^2}{|\underline{\Gamma}_{Q\text{opt}}|^2 (1 - |\underline{\Gamma}_Q|^2)}.
 \end{aligned} \tag{13.50}$$

Abbildung 13.14 zeigt einige exemplarische Kreise konstanter effektiver Rauschtemperatur  $T_{\text{eff}}$ . Die Mittelpunkte  $\underline{M}_Q$  aller Kreise liegen auf einer Geraden durch den optimalen Quellenreflexionsfaktor  $\underline{\Gamma}_{Q\text{opt}}$  und den Ursprung, da die Argumente aller Mittelpunkte gleich sind:

$$\arg(\underline{M}_Q) = \arg(\underline{\Gamma}_{Q\text{opt}}).$$

Für sehr große effektive Rauschtemperaturen  $T_{\text{eff}}$  konvergieren die Kreise gegen den Einheitskreis. Beim Entwurf eines Hochfrequenzverstärkers gilt es einen von der Anwendung abhängigen günstigen Kompromiss zwischen Leistungsanpassung und Rauschanpassung, das heißt zwischen Leistungsgewinn und effektiver Rauschtemperatur  $T_{\text{eff}}$  des Hochfrequenzverstärkers zu finden.

Wenn man alternativ von der minimalen Rauschzahl

$$F_{\text{min}} = 1 + \frac{T_{\text{effmin}}}{T_0} \tag{13.51}$$

und der Rauschzahl

$$F_0 = 1 + \frac{T_{\text{eff}0}}{T_0} \tag{13.52}$$

bei Abschluss mit einer reflexionsfreien Quelle ausgeht, erhält man für den Kreis konstanter Rauschzahl  $F$  den Mittelpunkt

$$\underline{M}_Q = \frac{(F_0 - F_{\text{min}}) \underline{\Gamma}_{Q\text{opt}}}{F_0 - F_{\text{min}} + (F - F_{\text{min}}) |\underline{\Gamma}_{Q\text{opt}}|^2} \tag{13.53}$$

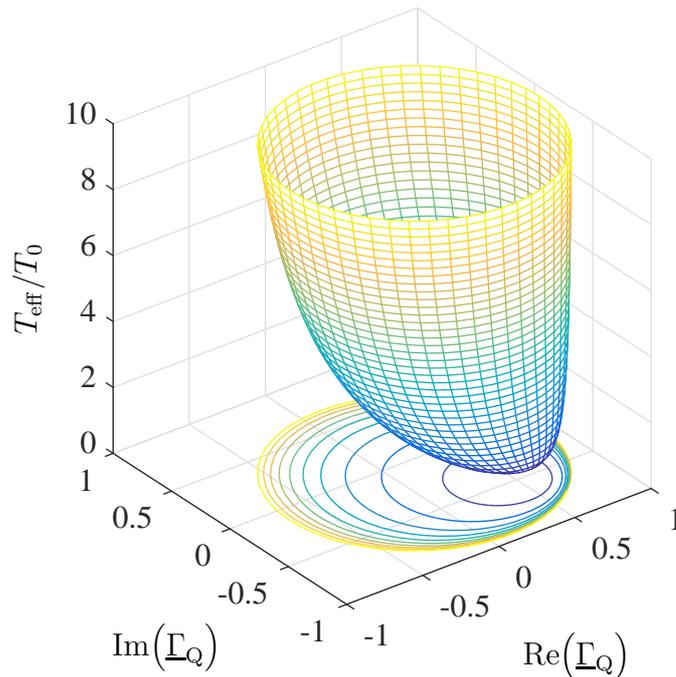


Abbildung 13.14.: Effektive Rauschtemperatur  $T_{\text{eff}}$  als Funktion des Quellenreflexionsfaktors  $\underline{\Gamma}_Q$  mit  $\underline{\Gamma}_{Q\text{opt}} = 0,5 - j0,5$ ,  $T_{\text{effmin}} = 0,5T_0$  und  $T_{\text{eff0}} = 2T_0$ .

und den Radius

$$R_Q = |\underline{\Gamma}_{Q\text{opt}}| \sqrt{\frac{(F - F_{\text{min}}) (F_0 - F_{\text{min}} + (F - F_0) |\underline{\Gamma}_{Q\text{opt}}|^2)}{F_0 - F_{\text{min}} + (F - F_{\text{min}}) |\underline{\Gamma}_{Q\text{opt}}|^2}}, \quad (13.54)$$

siehe (13.22). Für die Rauschzahl folgt

$$F = F_{\text{min}} + (F_0 - F_{\text{min}}) \frac{|\underline{\Gamma}_Q - \underline{\Gamma}_{Q\text{opt}}|^2}{|\underline{\Gamma}_{Q\text{opt}}|^2 (1 - |\underline{\Gamma}_Q|^2)}. \quad (13.55)$$

**Aufgabe 13.4** Es werden thermisch rauschende Zweitore homogener Temperatur  $T$  betrachtet. Vereinfachend entspreche die Temperatur  $T$  der Bezugstemperatur  $T_0$ . Berechnen Sie die bei Rauschanpassung erzielbare minimale Rauschzahl  $F_{\text{min}}$  als Funktion der Streuparameter und des Stabilitätsfaktors  $K$ !

### 13.3.6. Messen der Rauschparameter

Zum vollständigen Charakterisieren des Rauschverhaltens eines Zweitorts ist es nicht ausreichend, nur die effektive Rauschtemperatur  $T_{\text{eff}}$  an einer einzigen Quelle mit Quellenreflexionsfaktor  $\underline{\Gamma}_Q$  zu kennen. Man muss vielmehr die Rauschparameter  $R_{1,1}$ ,  $R_{1,2}$  und  $R_{2,2}$  oder alternativ die minimale effektive Rauschtemperatur  $T_{\text{effmin}}$ , den optimalen Quellenreflexionsfaktor  $\underline{\Gamma}_{Q\text{opt}}$  und die effektive Rauschtemperatur  $T_{\text{eff0}}$  bei Abschluss mit einer reflexionsfreien Quelle kennen, zu deren messtechnischem Bestimmen Rauschzahlmessungen bei verschiedenen Quellenreflexionsfaktoren erforderlich sind. Intuitiv würde man

- zunächst experimentell den optimalen Quellenreflexionsfaktor  $\underline{\Gamma}_{Q\text{opt}}$  bestimmen,
- dann die minimale effektive Rauschtemperatur  $T_{\text{effmin}}$  an einer Quelle mit dem optimalen Quellenreflexionsfaktor  $\underline{\Gamma}_{Q\text{opt}}$  messen und
- schließlich die effektive Rauschtemperatur  $T_{\text{eff0}}$  bei Abschluss mit einer reflexionsfreien Quelle  $\underline{\Gamma}_Q = 0$  messen.

Eleganter ist es von (13.17) auszugehen [Lan69]. Man erhält eine in den vier reellen Rauschparametern  $R_{1,1}$ ,  $\text{Re}(\underline{R}_{1,2})$ ,  $\text{Im}(\underline{R}_{1,2})$  und  $R_{2,2}$  lineare Gleichung

$$kT_{\text{eff}}B \left(1 - |\underline{\Gamma}_Q|^2\right) = |\underline{\Gamma}_Q|^2 R_{1,1} + 2 \text{Re}(\underline{\Gamma}_Q) \text{Re}(\underline{R}_{1,2}) - 2 \text{Im}(\underline{\Gamma}_Q) \text{Im}(\underline{R}_{1,2}) + R_{2,2}.$$

Durch Messen der Rauschtemperaturen  $T_{\text{eff1}}$ ,  $T_{\text{eff2}}$ ,  $T_{\text{eff3}}$  und  $T_{\text{eff4}}$  an vier verschiedenen Quellenreflexionsfaktoren  $\underline{\Gamma}_{Q1}$ ,  $\underline{\Gamma}_{Q2}$ ,  $\underline{\Gamma}_{Q3}$  und  $\underline{\Gamma}_{Q4}$  gewinnt man vier Gleichungen für diese vier Unbekannten

$$\begin{pmatrix} kT_{\text{eff1}}B \left(1 - |\underline{\Gamma}_{Q1}|^2\right) \\ kT_{\text{eff2}}B \left(1 - |\underline{\Gamma}_{Q2}|^2\right) \\ kT_{\text{eff3}}B \left(1 - |\underline{\Gamma}_{Q3}|^2\right) \\ kT_{\text{eff4}}B \left(1 - |\underline{\Gamma}_{Q4}|^2\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\underline{\Gamma}_{Q1}|^2 & 2 \text{Re}(\underline{\Gamma}_{Q1}) & -2 \text{Im}(\underline{\Gamma}_{Q1}) & 1 \\ |\underline{\Gamma}_{Q2}|^2 & 2 \text{Re}(\underline{\Gamma}_{Q2}) & -2 \text{Im}(\underline{\Gamma}_{Q2}) & 1 \\ |\underline{\Gamma}_{Q3}|^2 & 2 \text{Re}(\underline{\Gamma}_{Q3}) & -2 \text{Im}(\underline{\Gamma}_{Q3}) & 1 \\ |\underline{\Gamma}_{Q4}|^2 & 2 \text{Re}(\underline{\Gamma}_{Q4}) & -2 \text{Im}(\underline{\Gamma}_{Q4}) & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} R_{1,1} \\ \text{Re}(\underline{R}_{1,2}) \\ \text{Im}(\underline{R}_{1,2}) \\ R_{2,2} \end{pmatrix}, \quad (13.56)$$

aus denen sich die Rauschparameter  $R_{1,1}$ ,  $R_{1,2}$  und  $R_{2,2}$  leicht berechnen lassen. Falls mehr als die minimal erforderliche Anzahl an Messungen durchgeführt wird, kann man die zusätzlichen Messwerte im Rahmen einer Ausgleichsrechnung zur Messfehlerreduktion nutzen. Mit (13.42), (13.43) und (13.44) kann man dann auch die Rauschparameter minimale effektive Rauschtemperatur  $T_{\text{effmin}}$ , optimaler Quellenreflexionsfaktor  $\underline{\Gamma}_{\text{Qopt}}$  und effektive Rauschtemperatur  $T_{\text{eff0}}$  bei Abschluss mit einer reflexionsfreien Quelle berechnen.



**Teil III.**  
**Anhänge**



# Anhang A.

## Filterentwurf

### A.1. Verwenden von Filterprototypen

Im Folgenden werden verlustfreie aus konzentrierten Bauelementen, das heißt aus Kapazitäten und Induktivitäten aufgebaute Filter betrachtet. Gemäß den Ausführungen in Abschnitt 8.1 kann man aus als Filterprototypen bezeichneten normierten Filtern durch Entnormieren Filter für beliebige Frequenzbereiche und Bezugswiderstände  $R_B$  berechnen. Weiterhin kann man aus einem einmal entworfenen Filter durch Schaltungstransformationen weitere Filter gewinnen, siehe Abschnitt A.3. Insbesondere kann man durch Transformation von Tiefpassprototypen Hochpassprototypen, Bandpassprototypen und Bandsperreprototypen gewinnen. Tiefpassprototypen bilden daher die Basis des Filterentwurfs. In der Praxis verwendet man Kataloge vorab berechneter Tiefpassprototypen [Zve67]. Die Synthese derartiger Tiefpassprototypen ist ein eigenes, hier nicht weiter vertieftes Fachgebiet [Mil92; Rup72; Vie74].

### A.2. Tiefpassprototypen

Der Betrag der Übertragungsfunktion  $S_{2,1}(\tilde{\omega})$  eines idealen normierten Tiefpasses wäre bei niedrigen normierten Kreisfrequenzen  $\tilde{\omega}$  im Durchlassbereich eins und bei hohen normierten Kreisfrequenzen  $\tilde{\omega}$  im Sperrbereich Null mit einem abrupten Übergang von Durchlassbereich zu Sperrbereich bei der normierten Kreisfrequenz  $\tilde{\omega} = 1$ . Derartige ideale normierte Tiefpässe sind jedoch nicht realisierbar.

In der Realität begnügt man sich mit einer für den jeweiligen Anwendungsfall hinreichend genauen Approximation des idealen normierten Tiefpasses. Hierbei gilt es einen Kompromiss zwischen der Approximationsgüte und dem Schaltungsaufwand zu finden. Üblicherweise beschreibt man die Anforderungen an den normierten Tiefpass durch ein Toleranzschema und sucht dann einen Tiefpassprototypen kleinstmöglichen Aufwands, der diesen Anforderungen genügt, siehe Abbildung A.1.

Im Durchlassbereich bis zu der normierten Durchlassgrenze  $\tilde{\omega}_D = 1$  ist die

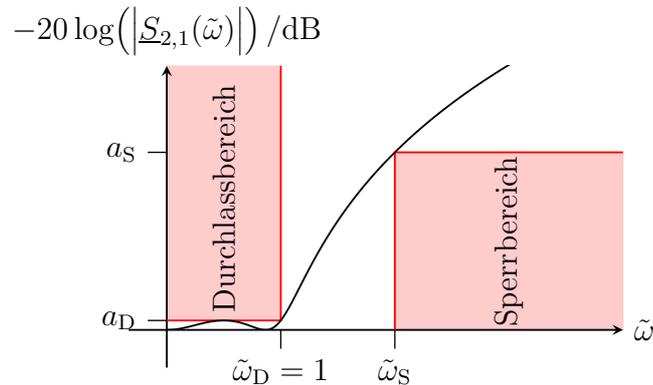


Abbildung A.1.: Toleranzschema eines Tiefpasses

Dämpfung kleiner als die maximal zulässige Durchlassdämpfung  $a_D$ . Im Sperrbereich ab der normierten Sperrgrenze  $\tilde{\omega}_S$  ist die Dämpfung größer als mindestens erforderliche Sperrdämpfung  $a_S$ . Es entsteht ein Toleranzschlauch, in dem der Dämpfungsverlauf des Filterprototypen liegen muss. Im Sinne eines niedrigen Schaltungsaufwands gilt es diese zulässigen Toleranzen auszunutzen.

Abbildung A.2 zeigt eine typische Schaltung eines Tiefpassprototypen dritter Ordnung. Die Schaltung besteht aus einer abwechselnden Parallelschaltung einer Kapazität und Serienschaltung einer Induktivität. Derartige Schaltungen bezeichnet man als Abzweigschaltungen.

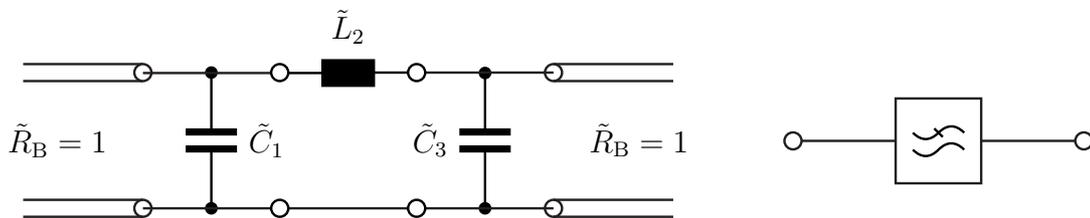
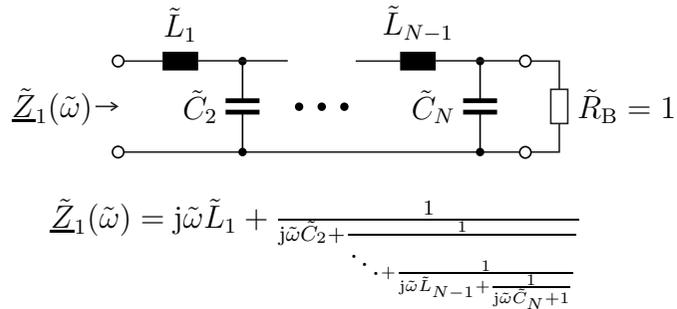
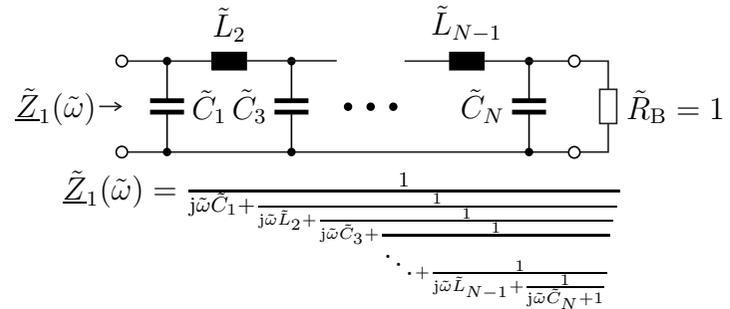


Abbildung A.2.: Schaltung eines Tiefpassprototypen und Symbol eines Tiefpasses

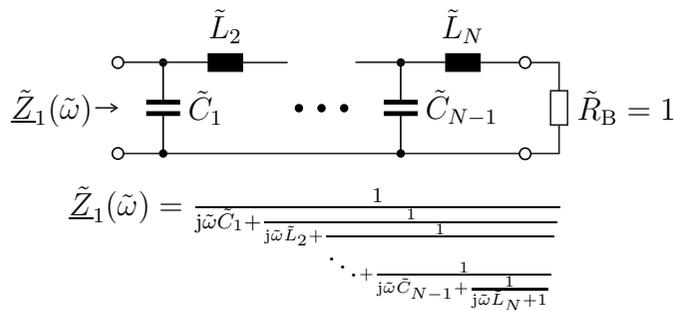
Abbildung A.3 zeigt die vier möglichen Topologien von Abzweigschaltungen aus konzentrierten verlustfreien Bauelementen für Tiefpassprototypen. Die Ordnung  $N$  bezeichnet die Anzahl der Elemente, wobei Parallelschaltungen oder Serienschaltungen mehrerer konzentrierter Bauelemente als ein Element gezählt würden. Die normierte Eingangsimpedanz  $\tilde{Z}_1(\tilde{\omega})$  bei reflexionsfreiem Abschluss mit dem normierten Bezugswiderstand  $\tilde{R}_B = 1$  ergibt sich aus der Schaltung zunächst als Kettenbruch. Durch Erweitern kann man diesen Kettenbruch in eine gebrochen rationale Funktion der normierten Kreisfrequenz  $\tilde{\omega}$  umformen.



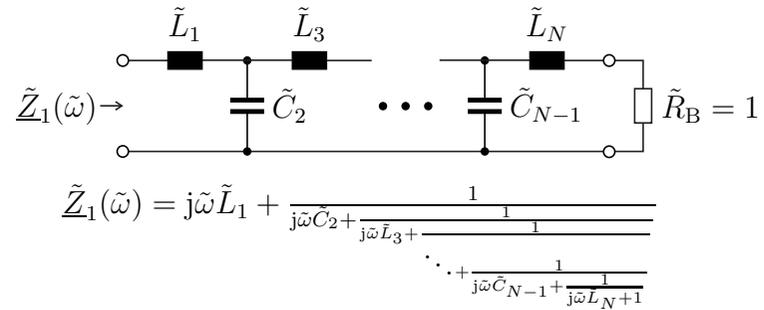
(a) Gerade Ordnung  $N$ . Die normierte Eingangsimpedanz  $\tilde{Z}_1(\tilde{\omega})$  ist eine gebrochen rationale Funktion der normierten Kreisfrequenz  $\tilde{\omega}$  mit Zählergrad  $N$  und Nennergrad  $N - 1$



(b) Ungerade Ordnung  $N$ . Die normierte Eingangsimpedanz  $\tilde{Z}_1(\tilde{\omega})$  ist eine gebrochen rationale Funktion der normierten Kreisfrequenz  $\tilde{\omega}$  mit Zählergrad  $N - 1$  und Nennergrad  $N$



(c) Gerade Ordnung  $N$ . Die normierte Eingangsimpedanz  $\tilde{Z}_1(\tilde{\omega})$  ist eine gebrochen rationale Funktion der normierten Kreisfrequenz  $\tilde{\omega}$  mit Zählergrad  $N - 1$  und Nennergrad  $N$



(d) Ungerade Ordnung  $N$ . Die normierte Eingangsimpedanz  $\tilde{Z}_1(\tilde{\omega})$  ist eine gebrochen rationale Funktion der normierten Kreisfrequenz  $\tilde{\omega}$  mit Zählergrad  $N$  und Nennergrad  $N - 1$

Abbildung A.3.: Abzweigschaltungen

Der Reflexionsfaktor an Tor 1 bei Abschluss mit dem normierten Bezugswiderstand  $\tilde{R}_B = 1$  an Tor 2 ergibt sich gemäß (7.24) zu

$$\underline{S}_{1,1}(\tilde{\omega}) = \frac{\tilde{Z}_1(\tilde{\omega}) - 1}{\tilde{Z}_1(\tilde{\omega}) + 1} \quad (\text{A.1})$$

siehe (9.4). Aus der Verlustfreiheit folgt mit (9.7)

$$|\underline{S}_{2,1}(\tilde{\omega})|^2 = 1 - |\underline{S}_{1,1}(\tilde{\omega})|^2. \quad (\text{A.2})$$

Die skizzierten Schritte der Analyse sind leider zwecks Synthese einer Abzweigschaltung bei gegebenem Dämpfungsverlauf  $-20 \log(|\underline{S}_{2,1}(\tilde{\omega})|)$  nicht eindeutig umkehrbar. Auch ist nicht jeder beliebige gegebene Dämpfungsverlauf  $-20 \log(|\underline{S}_{2,1}(\tilde{\omega})|)$  realisierbar.

## A.3. Schaltungstransformationen

### A.3.1. Tiefpass-Hochpass-Transformation

Aus einem Tiefpassprototypen kann man durch Transformation der normierten Kreisfrequenz gemäß

$$\tilde{\omega} = -\frac{1}{\tilde{\omega}'}$$

einen Hochpassprototypen gewinnen. Die Impedanzwerte und Admittanzwerte an sich bleiben durch die Transformation unverändert, nur treten sie bei anderen normierten Kreisfrequenzen  $\tilde{\omega}'$  auf, siehe Tabelle A.1. Abbildung A.4 zeigt das entsprechende Toleranzschema eines Hochpasses.

Tabelle A.1.: Tiefpass-Hochpass-Transformation

Hochpass	Tiefpass	
$\tilde{\omega}'$	$\tilde{\omega}$	
$-\infty$	0	Durchlassbereich
-1	+1	
0	$\pm\infty$	Sperrbereich
+1	-1	
$+\infty$	0	Durchlassbereich

Für die Transformation eines frequenzunabhängigen normierten Wirkwiderstands gilt

$$\tilde{R}' = \tilde{R}. \quad (\text{A.3})$$

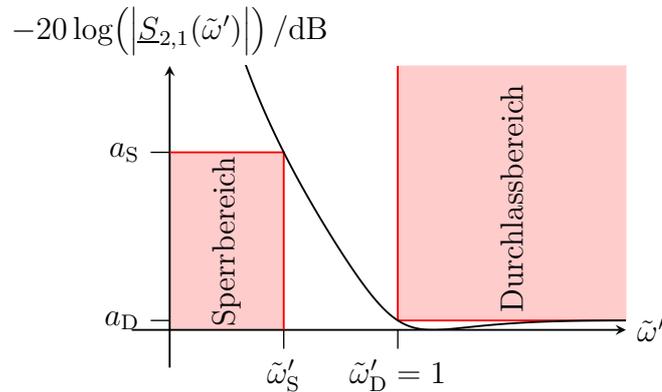


Abbildung A.4.: Toleranzschema eines Hochpasses

Aus der normierten Impedanz

$$\tilde{Z}(\tilde{\omega}) = j\tilde{\omega}\tilde{L}$$

einer normierten Induktivität  $\tilde{L}$  wird durch die Transformation

$$\tilde{Z}'(\tilde{\omega}') = -\frac{j\tilde{L}}{\tilde{\omega}'} = \frac{1}{j\tilde{\omega}' \underbrace{\frac{1}{\tilde{L}}}_{\tilde{C}'}}$$

siehe (8.7) und (8.9). Die normierte Induktivität  $\tilde{L}$  wird in die normierte Kapazität

$$\tilde{C}' = \frac{1}{\tilde{L}} \quad (\text{A.4})$$

transformiert.

Aus der normierten Admittanz

$$\tilde{Y}(\tilde{\omega}) = j\tilde{\omega}\tilde{C}$$

einer normierten Kapazität  $\tilde{C}$  wird durch die Transformation

$$\tilde{Y}'(\tilde{\omega}') = -\frac{j\tilde{C}}{\tilde{\omega}'} = \frac{1}{j\tilde{\omega}' \underbrace{\frac{1}{\tilde{C}}}_{\tilde{L}'}}$$

siehe (8.7) und (8.9). Die normierte Kapazität  $\tilde{C}$  wird in die normierte Induktivität

$$\tilde{L}' = \frac{1}{\tilde{C}} \quad (\text{A.5})$$

transformiert.

Durch Transformation der in Abbildung A.2 gezeigten Schaltung eines Tiefpassprototypen dritter Ordnung gewinnt man die in Abbildung A.5 gezeigte Schaltung eines Hochpassprototypen dritter Ordnung.

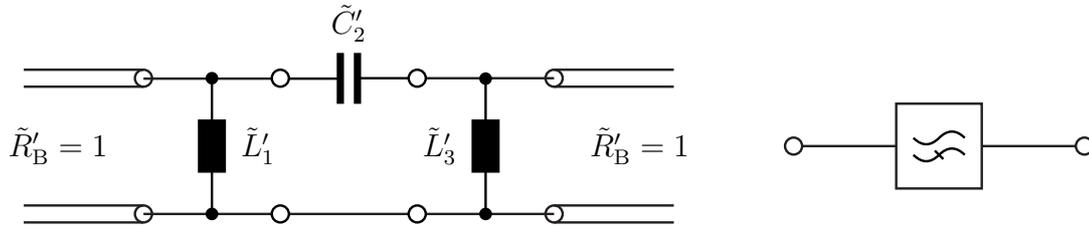


Abbildung A.5.: Schaltung eines Hochpassprototypen und Symbol eines Hochpasses

### A.3.2. Tiefpass-Bandpass-Transformation

Aus einem Tiefpassprototypen kann man durch Transformation der normierten Kreisfrequenz gemäß

$$\tilde{\omega} = \frac{\tilde{\omega}' - \frac{1}{\tilde{\omega}'}}{\tilde{\omega}'_D - \frac{1}{\tilde{\omega}'_D}}$$

mit

$$\tilde{\omega}'_D > 1$$

einen Bandpassprototypen gewinnen, siehe Tabelle A.2. Die untere normierte Durchlassgrenze entspricht  $1/\tilde{\omega}'_D$  und die obere normierte Durchlassgrenze entspricht  $\tilde{\omega}'_D$ . Abbildung A.6 zeigt das entsprechende Toleranzschema eines Bandpasses.

Für die Transformation eines frequenzunabhängigen normierten Wirkwiderstands gilt wieder

$$\tilde{R}' = \tilde{R}. \quad (\text{A.6})$$

Aus der normierten Impedanz

$$\tilde{Z}(\tilde{\omega}) = j\tilde{\omega}\tilde{L}$$

einer normierten Induktivität  $\tilde{L}$  wird durch die Transformation

$$\tilde{Z}'(\tilde{\omega}') = j \frac{\tilde{\omega}' - \frac{1}{\tilde{\omega}'}}{\tilde{\omega}'_D - \frac{1}{\tilde{\omega}'_D}} \tilde{L} = j\tilde{\omega}' \underbrace{\frac{\tilde{L}}{\tilde{\omega}'_D - \frac{1}{\tilde{\omega}'_D}}}_{\tilde{L}'} + \frac{1}{j\tilde{\omega}' \underbrace{\frac{\tilde{L}}{\tilde{\omega}'_D - \frac{1}{\tilde{\omega}'_D}}}_{\tilde{C}'}}$$

Tabelle A.2.: Tiefpass-Bandpass-Transformation

Bandpass $\tilde{\omega}'$	Tiefpass $\tilde{\omega}$	
$-\infty$	$-\infty$	Sperrbereich
$-\tilde{\omega}'_D$	$-1$	Durchlassbereich
$-1$	$0$	
$-\frac{1}{\tilde{\omega}'_D}$	$+1$	Sperrbereich
$0$	$\pm\infty$	
$+\frac{1}{\tilde{\omega}'_D}$	$-1$	Durchlassbereich
$+1$	$0$	
$+\tilde{\omega}'_D$	$+1$	Sperrbereich
$+\infty$	$+\infty$	

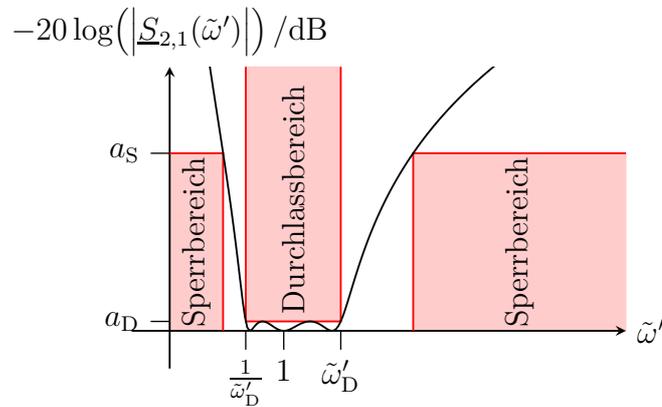


Abbildung A.6.: Toleranzschema eines Bandpasses

siehe (8.7) und (8.9). Die normierte Induktivität  $\tilde{L}$  wird in eine Serienschaltung aus einer normierten Induktivität

$$\tilde{L}' = \frac{\tilde{L}}{\tilde{\omega}'_D - \frac{1}{\tilde{\omega}'_D}} \quad (\text{A.7})$$

und einer normierten Kapazität

$$\tilde{C}' = \frac{\tilde{\omega}'_D - \frac{1}{\tilde{\omega}'_D}}{\tilde{L}} \quad (\text{A.8})$$

transformiert.

Aus der normierten Admittanz

$$\tilde{Y}(\tilde{\omega}) = j\tilde{\omega}\tilde{C}$$

einer normierten Kapazität  $\tilde{C}$  wird durch die Transformation

$$\tilde{Y}'(\tilde{\omega}') = j \frac{\tilde{\omega}' - \frac{1}{\tilde{\omega}'_D}}{\tilde{\omega}'_D - \frac{1}{\tilde{\omega}'_D}} \tilde{C} = j \tilde{\omega}' \underbrace{\frac{\tilde{C}}{\tilde{\omega}'_D - \frac{1}{\tilde{\omega}'_D}}}_{\tilde{C}'} + \underbrace{\frac{1}{j \tilde{\omega}' \left( \tilde{\omega}'_D - \frac{1}{\tilde{\omega}'_D} \right)}}_{\tilde{L}'},$$

siehe (8.7) und (8.9). Die normierte Kapazität  $\tilde{C}$  wird in eine Parallelschaltung aus einer normierten Kapazität

$$\tilde{C}' = \frac{\tilde{C}}{\tilde{\omega}'_D - \frac{1}{\tilde{\omega}'_D}} \quad (\text{A.9})$$

und einer normierten Induktivität

$$\tilde{L}' = \frac{\tilde{\omega}'_D - \frac{1}{\tilde{\omega}'_D}}{\tilde{C}} \quad (\text{A.10})$$

transformiert.

Durch Transformation der in Abbildung A.2 gezeigten Schaltung eines Tiefpassprototypen dritter Ordnung gewinnt man die in Abbildung A.7 gezeigte Schaltung eines Bandpassprototypen dritter Ordnung.

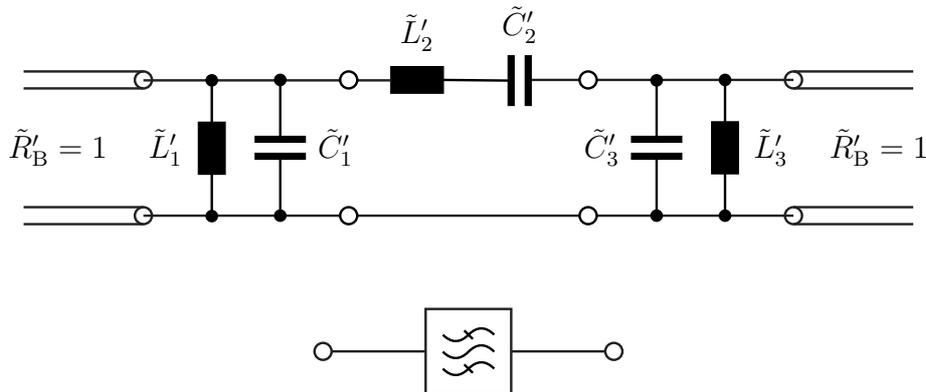


Abbildung A.7.: Schaltung eines Bandpassprototypen und Symbol eines Bandpasses

### A.3.3. Tiefpass-Bandsperre-Transformation

Aus einem Tiefpassprototypen kann man durch Transformation der normierten Kreisfrequenz gemäß

$$\tilde{\omega} = -\frac{\tilde{\omega}'_D - \frac{1}{\tilde{\omega}'_D}}{\tilde{\omega}' - \frac{1}{\tilde{\omega}'}}$$

mit

$$\tilde{\omega}'_D > 1$$

einen Bandsperreprototypen gewinnen, siehe Tabelle A.3. Die untere normierte Durchlassgrenze entspricht  $\frac{1}{\tilde{\omega}'_D}$  und die obere normierte Durchlassgrenze entspricht  $\tilde{\omega}'_D$ . Abbildung A.8 zeigt das entsprechende Toleranzschema einer Bandsperre.

Tabelle A.3.: Tiefpass-Bandsperre-Transformation

Bandsperre $\tilde{\omega}'$	Tiefpass $\tilde{\omega}$	
$-\infty$	0	Durchlassbereich
$-\tilde{\omega}'_D$	+1	Sperrbereich
-1	$\pm\infty$	
$-\frac{1}{\tilde{\omega}'_D}$	-1	
0	0	Durchlassbereich
$+\frac{1}{\tilde{\omega}'_D}$	+1	Sperrbereich
+1	$\pm\infty$	
$+\tilde{\omega}'_D$	-1	
$+\infty$	0	Durchlassbereich

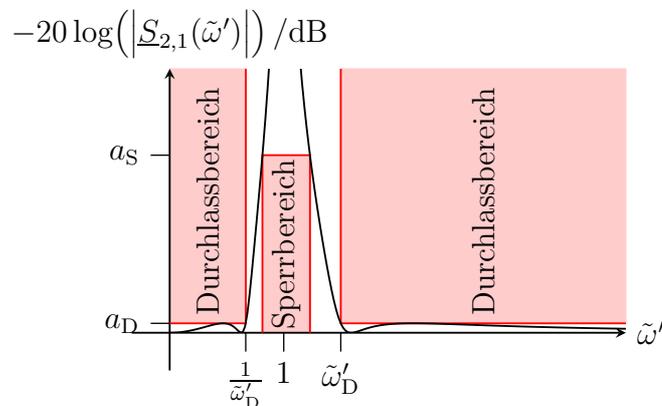


Abbildung A.8.: Toleranzschema einer Bandsperre

Für die Transformation eines frequenzunabhängigen normierten Wirkwiderstands gilt wieder

$$\tilde{R}' = \tilde{R}. \tag{A.11}$$

Aus der normierten Admittanz

$$\underline{\tilde{Y}}(\tilde{\omega}) = \frac{1}{j\tilde{\omega}\tilde{L}}$$

einer normierten Induktivität  $\tilde{L}$  wird durch die Transformation

$$\underline{\tilde{Y}}'(\tilde{\omega}') = -\frac{\tilde{\omega}' - \frac{1}{\tilde{\omega}'}}{j\left(\tilde{\omega}'_{\text{D}} - \frac{1}{\tilde{\omega}'_{\text{D}}}\right)\tilde{L}} = j\tilde{\omega}' \underbrace{\frac{1}{\left(\tilde{\omega}'_{\text{D}} - \frac{1}{\tilde{\omega}'_{\text{D}}}\right)\tilde{L}}}_{\tilde{C}'} + \frac{1}{j\tilde{\omega}' \underbrace{\left(\tilde{\omega}'_{\text{D}} - \frac{1}{\tilde{\omega}'_{\text{D}}}\right)\tilde{L}}_{\tilde{L}'}}$$

siehe (8.7) und (8.9). Die normierte Induktivität  $\tilde{L}$  wird in eine Parallelschaltung aus einer normierten Kapazität

$$\tilde{C}' = \frac{1}{\left(\tilde{\omega}'_{\text{D}} - \frac{1}{\tilde{\omega}'_{\text{D}}}\right)\tilde{L}} \quad (\text{A.12})$$

und einer normierten Induktivität

$$\tilde{L}' = \left(\tilde{\omega}'_{\text{D}} - \frac{1}{\tilde{\omega}'_{\text{D}}}\right)\tilde{L} \quad (\text{A.13})$$

transformiert.

Aus der normierten Impedanz

$$\underline{\tilde{Z}}(\tilde{\omega}) = \frac{1}{j\tilde{\omega}\tilde{C}}$$

einer normierten Kapazität  $\tilde{C}$  wird durch die Transformation

$$\underline{\tilde{Z}}'(\tilde{\omega}') = -\frac{\tilde{\omega}' - \frac{1}{\tilde{\omega}'}}{j\left(\tilde{\omega}'_{\text{D}} - \frac{1}{\tilde{\omega}'_{\text{D}}}\right)\tilde{C}} = j\tilde{\omega}' \underbrace{\frac{1}{\left(\tilde{\omega}'_{\text{D}} - \frac{1}{\tilde{\omega}'_{\text{D}}}\right)\tilde{C}}}_{\tilde{L}'} + \frac{1}{j\tilde{\omega}' \underbrace{\left(\tilde{\omega}'_{\text{D}} - \frac{1}{\tilde{\omega}'_{\text{D}}}\right)\tilde{C}}_{\tilde{C}'}}$$

siehe (8.7) und (8.9). Die normierte Kapazität  $\tilde{C}$  wird in eine Serienschaltung aus einer normierten Induktivität

$$\tilde{L}' = \frac{1}{\left(\tilde{\omega}'_{\text{D}} - \frac{1}{\tilde{\omega}'_{\text{D}}}\right)\tilde{C}} \quad (\text{A.14})$$

und einer normierten Kapazität

$$\tilde{C}' = \left( \tilde{\omega}'_D - \frac{1}{\tilde{\omega}'_D} \right) \tilde{C} \quad (\text{A.15})$$

transformiert.

Durch Transformation der in Abbildung A.2 gezeigten Schaltung eines Tiefpassprototypen dritter Ordnung gewinnt man die in Abbildung A.9 gezeigte Schaltung eines Bandsperreprototypen dritter Ordnung.

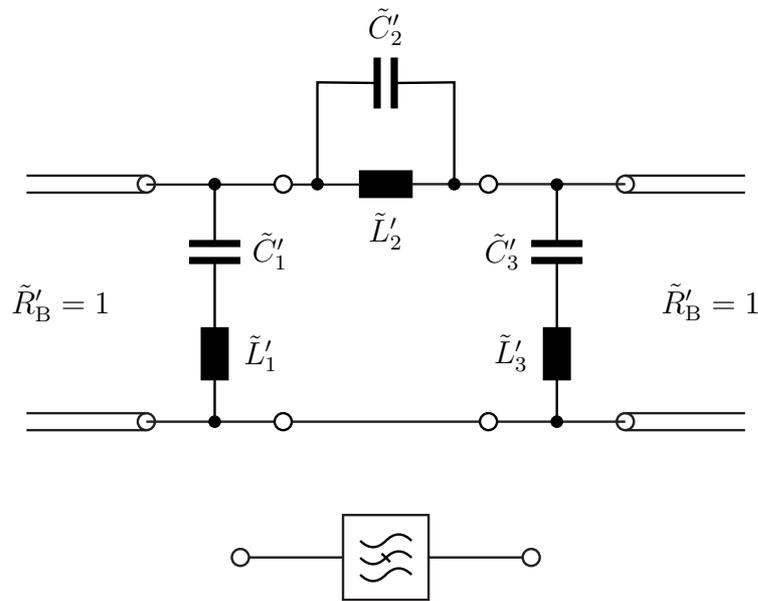


Abbildung A.9.: Schaltung eines Bandsperreprototypen und Symbol einer Bandsperre



## Anhang B.

# Nichtlineare Systeme

### B.1. Potenzreihenansatz

Schwerpunkt des vorliegenden Buchs ist die Theorie der linearen Systeme. Reale Systeme wie beispielsweise Verstärker sind aber typischerweise zumindest leicht nichtlinear. Im Ausgangssignal nichtlinearer Systeme können Signalanteile bei Kreisfrequenzen auftreten, die im Eingangssignal nicht vorhanden waren. Derartige nichtlineare Effekte sind häufig störend und ihre Minimierung motiviert viele der teilweise komplexen Architekturen hochfrequenztechnischer Systeme. Andererseits können nichtlineare Systeme gewinnbringend zur Signaldetektion und zum Umsetzen von Signalen in andere Frequenzbereiche genutzt werden. Im Folgenden sollen die Grundzüge der Theorie nichtlinearer Systeme vorgestellt werden. Die Notation weicht zwangsläufig von der zum Beschreiben linearer Systeme verwendeten Notation ab.

Im Folgenden sollen nur statische nichtlineare Systeme mit einem einzigen Eingang und einem einzigen Ausgang betrachtet werden. Statische nichtlineare Systeme haben kein Gedächtnis, so dass das Ausgangssignal  $y(t)$  zu einem bestimmten Zeitpunkt  $t$  eine nichtlineare Funktion des Eingangssignals  $x(t)$  zum selben Zeitpunkt  $t$  ist:

$$y(t) = f(x(t)). \quad (\text{B.1})$$

Diese Kennlinie kann graphisch dargestellt werden, siehe Abbildung B.1.

Für die Analyse statischer nichtlinearer Systeme entwickelt man die Kennlinie in eine Taylor-Reihe und erhält so die Potenzreihe

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n(t). \quad (\text{B.2})$$

Wenn man den Nullpunkt  $x(t) = 0$  als Entwicklungspunkt verwendet, ergeben sich die Koeffizienten zu

$$c_n = \begin{cases} f(0) & \text{für } n = 0 \\ \frac{1}{n!} \left. \frac{\partial^n f(x)}{\partial x^n} \right|_{x=0} & \text{für } n \geq 1 \end{cases}. \quad (\text{B.3})$$

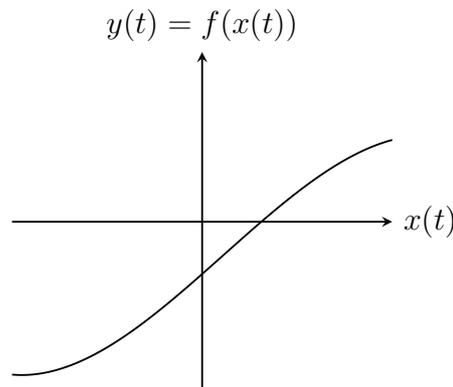


Abbildung B.1.: Beispiel einer nichtlinearen Kennlinie

## B.2. Eintonanregung

### B.2.1. Analyse der Eintonanregung

Zunächst werde der Fall sinusförmiger Anregung der Kreisfrequenz  $\omega_0$  und der Eingangsamplitude  $X$  betrachtet. Die Nullphase ist keine physikalische Eigenschaft, sondern ergibt sich im Rahmen der Modellbildung durch Wahl des Nullpunktes der Zeitmessung. Es genügt daher, nur eine einzige willkürliche Nullphase zu betrachten. Für das Eingangssignal gelte<sup>1</sup>

$$x(t) = X \cos(\omega_0 t) = X \frac{1}{2} (e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}). \quad (\text{B.4})$$

Die Grundwelle der Kreisfrequenz  $\omega_0$  wird auch als erste Harmonische bezeichnet.

Für die zweite Potenz folgt<sup>1</sup>

$$x^2(t) = X^2 \frac{1}{4} (e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})^2 = X^2 \frac{1}{4} (e^{j2\omega_0 t} + 2 + e^{-j2\omega_0 t}) = X^2 \frac{1}{2} + X^2 \frac{1}{2} \cos(2\omega_0 t).$$

Neben einem Gleichanteil entsteht eine erste Oberwelle der Kreisfrequenz  $2\omega_0$ , die auch als zweite Harmonische bezeichnet wird.

---

<sup>1</sup>Es wird die Eulersche Formel  $e^{j\alpha} = \cos(\alpha) + j \sin(\alpha)$  verwendet.

Allgemein gilt für die  $n$ -te Potenz<sup>23</sup>

$$\begin{aligned}
 x^n(t) &= X^n \frac{1}{2^n} \left( e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t} \right)^n = X^n \frac{1}{2^n} \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} \underbrace{e^{jm\omega_0 t} e^{-j(n-m)\omega_0 t}}_{e^{j(2m-n)\omega_0 t}} \\
 &= X^n \frac{1}{2^n} \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} \frac{1}{2} \left( e^{j(2m-n)\omega_0 t} + e^{-j(2m-n)\omega_0 t} \right) \\
 &= X^n \frac{1}{2^n} \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} \cos((2m-n)\omega_0 t).
 \end{aligned}$$

Die höchste entstehende Oberwelle ist die  $(n-1)$ -te Oberwelle, die auch als  $n$ -te Harmonische bezeichnet wird.

Einsetzen der Potenzen in die Potenzreihe (B.2) ergibt das Ausgangssignal

$$\begin{aligned}
 y(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n X^n \frac{1}{2^n} \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} \cos((2m-n)\omega_0 t) \\
 &= \sum_{l=-\infty}^{-1} \sum_{m=0}^{\infty} c_{2m-l} X^{2m-l} \frac{1}{2^{2m-l}} \binom{2m-l}{m} \cos(l\omega_0 t) \\
 &\quad + \sum_{m=0}^{\infty} c_{2m} X^{2m} \frac{1}{2^{2m}} \binom{2m}{m} \\
 &\quad + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=l}^{\infty} c_{2m-l} X^{2m-l} \frac{1}{2^{2m-l}} \binom{2m-l}{m} \cos(l\omega_0 t) \\
 &= \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} c_{2m+l} X^{2m+l} \frac{1}{2^{2m+l}} \binom{2m+l}{m} \cos(-l\omega_0 t) \\
 &\quad + \sum_{m=0}^{\infty} c_{2m} X^{2m} \frac{1}{2^{2m}} \binom{2m}{m} \\
 &\quad + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} c_{2m+l} X^{2m+l} \frac{1}{2^{2m+l}} \binom{2m+l}{m} \cos(l\omega_0 t) \\
 &= \underbrace{\sum_{m=0}^{\infty} c_{2m} X^{2m} \frac{1}{2^{2m}} \binom{2m}{m}}_{\text{Gleichanteil}} \\
 &\quad + \underbrace{\sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} c_{2m+l} X^{2m+l} \frac{1}{2^{2m+l-1}} \binom{2m+l}{m} \cos(l\omega_0 t)}_{l\text{-te Harmonische}}.
 \end{aligned} \tag{B.5}$$

<sup>2</sup>Für den Binomialkoeffizienten gilt  $\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \binom{n}{n-m}$ .

<sup>3</sup>Es wird die Eulersche Formel  $e^{j\alpha} = \cos(\alpha) + j \sin(\alpha)$  verwendet.

### B.2.2. Kompressionspunkt

Mit der aus (B.5) abgelesenen Amplitude

$$Y_1 = \left| \sum_{m=0}^{\infty} c_{2m+1} X^{2m+1} \frac{1}{2^{2m}} \binom{2m+1}{m} \right|$$

der Grundwelle ergibt sich der Amplitudengewinn zu

$$\frac{Y_1}{X} = \left| \sum_{m=0}^{\infty} c_{2m+1} X^{2m} \frac{1}{2^{2m}} \binom{2m+1}{m} \right|. \quad (\text{B.6})$$

Der Amplitudengewinn ist im Allgemeinen von der Eingangsamplitude  $X$  abhängig, das heißt aussteuerungsabhängig. Nur bei linearen Systemen wäre der Amplitudengewinn von der Eingangsamplitude  $X$  unabhängig. Bei realen Systemen ergibt sich bei hinreichend großen Eingangsamplituden  $X$  aufgrund von Begrenzungseffekten eine Reduktion des Amplitudengewinns. Abbildung B.2 zeigt einen typischen Verlauf des von der Eingangsamplitude  $X$  abhängigen Amplitudengewinns.

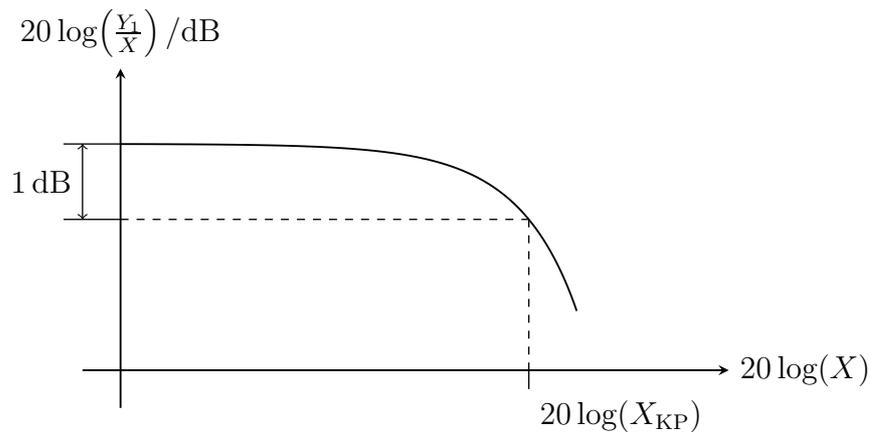


Abbildung B.2.: Amplitudengewinn als Funktion der Eingangsamplitude  $X$  an einem Beispiel

Bei kleinen Eingangsamplituden  $X$  ist der Amplitudengewinn  $|c_1|$ . Beim 1 dB-Kompressionspunkt ist der Amplitudengewinn um  $-1 \text{ dB} \cong 0,891$  abgefallen. Die Eingangsamplitude, bei der diese Amplitudengewinnreduktion eintritt, bezeichnet man als Eingangskompressionspunkt  $X_{\text{KP}}$ . Die zugehörige Ausgangsamplitude

$$Y_{\text{KP}} = 0,891 |c_1| X_{\text{KP}} \quad (\text{B.7})$$

bezeichnet man als Ausgangskompressionspunkt.

Für statische nichtlineare Systeme dritter Ordnung, das heißt für

$$c_n = \begin{cases} c_n & \text{für } n \leq 3 \\ 0 & \text{für } n \geq 4 \end{cases}, \quad (\text{B.8})$$

ergibt sich der Amplitudengewinn zu

$$\frac{Y_1}{X} = \left| c_1 + \frac{3}{4}c_3X^2 \right|. \quad (\text{B.9})$$

$c_3$  hat normalerweise entgegengesetztes Vorzeichen wie  $c_1$ , so dass der Amplitudengewinn bei steigenden Eingangsamplituden  $X$  zunächst abnimmt.<sup>4</sup> Für den Eingangskompressionspunkt erhält man:

$$\begin{aligned} 0,891c_1 &= c_1 + \frac{3}{4}c_3X_{\text{KP}}^2, \\ X_{\text{KP}} &= \sqrt{\frac{4(0,891 - 1)c_1}{3c_3}} = \sqrt{-0,145\frac{c_1}{c_3}}. \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

### B.2.3. Harmonischenabstand

Bei kleinen Eingangsamplituden  $X$  sind die höheren Potenzen von  $X$  vernachlässigbar und das Ausgangssignal (B.5) kann durch die Kleinsignalnäherung

$$y(t) \approx \underbrace{c_0 + \frac{c_2}{2}X^2}_{\text{Gleichanteil}} + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{c_n}{2^{n-1}}X^n \cos(n\omega_0 t)}_{n\text{-te Harmonische}} \quad (\text{B.11})$$

approximiert werden.

Im Gültigkeitsbereich der Kleinsignalnäherung ist die Amplitude

$$Y_n = \frac{|c_n|}{2^{n-1}}X^n \quad (\text{B.12})$$

der  $n$ -ten Harmonischen proportional zur  $n$ -ten Potenz der Eingangsamplitude  $X$ . Bei kleinen Eingangsamplituden  $X$  haben die Oberwellen relativ kleine Amplituden  $Y_n$ ,  $n \geq 2$ . Die Amplituden  $Y_n$ ,  $n \geq 2$ , der Oberwellen nehmen jedoch bei steigender Eingangsamplitude  $X$  stärker zu als die Amplitude  $Y_1$  der Grundwelle und würden bei hinreichend großen Eingangsamplituden  $X$ , wenn die Kleinsignalnäherung bei derartig großen Eingangsamplituden  $X$  noch gelten würde, sogar größer als die Amplitude  $Y_1$  der Grundwelle werden.

<sup>4</sup>Bei sehr großen Eingangsamplituden  $X$  würde der Amplitudengewinn gemäß (B.9) wieder zunehmen. Man verlässt hier jedoch den Gültigkeitsbereich des Modells.

Der  $n$ -te Harmonischenabstand wird als das Verhältnis der Amplitude  $Y_1$  der Grundwelle zur Amplitude  $Y_n$  der  $n$ -ten Harmonischen definiert:

$$H_n = \frac{Y_1}{Y_n}. \quad (\text{B.13})$$

Im Gültigkeitsbereich der Kleinsignalnäherung ist der  $n$ -te Harmonischenabstand

$$H_n = \frac{|c_1| X}{\frac{|c_n|}{2^{n-1}} X^n} = \left| \frac{c_1}{c_n} \right| \frac{2^{n-1}}{X^{n-1}}. \quad (\text{B.14})$$

Der erste Harmonischenabstand  $H_1$  ist definitionsgemäß eins, das heißt 0 dB. Die Harmonischenabstände  $H_n$  nehmen mit steigender Eingangsamplitude  $X$  ab, siehe Abbildung B.3. In doppellogarithmischer Darstellung ist der Graph des  $n$ -ten Harmonischenabstands  $H_n$  eine Gerade mit der Steigung  $-(n-1)$ .

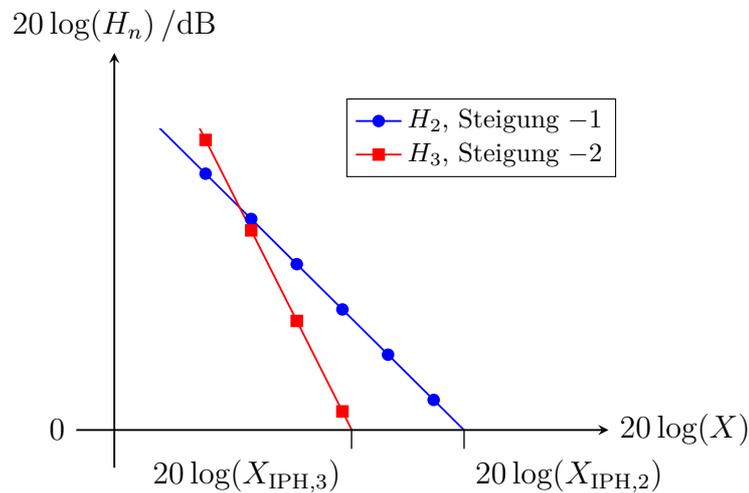


Abbildung B.3.: Harmonischenabstände  $H_n$  als Funktionen der Eingangsamplitude  $X$  an einem Beispiel

Am Interceptpunkt der Harmonischen wird der unter Verwenden der Kleinsignalnäherung berechnete Harmonischenabstand  $H_n$  eins, das heißt 0 dB. Der eingangsseitige Interceptpunkt der  $n$ -ten Harmonischen ergibt sich zu

$$X_{\text{IPH},n} = 2^{n-1} \sqrt[n]{\left| \frac{c_1}{c_n} \right|}. \quad (\text{B.15})$$

Aus dem  $n$ -ten Harmonischenabstand  $H_n$  bei einer Eingangsamplitude  $X$  kann man den eingangsseitigen Interceptpunkt der  $n$ -ten Harmonischen gemäß

$$X_{\text{IPH},n} = \sqrt[n-1]{H_n X} \quad (\text{B.16})$$

berechnen. Der ausgangsseitige Interceptpunkt der  $n$ -ten Harmonischen ergibt sich zu

$$Y_{\text{IPH},n} = |c_1| X_{\text{IPH},n} = \sqrt[n]{H_n} Y_1 = 2 |c_1| \sqrt[n]{\left| \frac{c_1}{c_n} \right|}. \quad (\text{B.17})$$

Die bei Eintonanregung eines statischen nichtlinearen Systems auftretenden Effekte werden in der Hochfrequenztechnik unter anderem in Signaldetektoren und Frequenzvervielfachern genutzt. Unerwünschte auftretende Oberwellen können in der Regel einfach durch Filter unterdrückt werden, da die Bandbreiten der Nutzsignale typischerweise wesentlich kleiner als eine Oktave sind.

## B.3. Zweitonanregung

### B.3.1. Analyse der Zweitonanregung

Im Allgemeinen wird das Eingangssignal Signalanteile bei vielen verschiedenen Kreisfrequenzen enthalten. Zum Studium der grundsätzlichen Effekte wird der einfachste Fall, dass das Eingangssignal aus der Überlagerung zweier sinusförmiger Signale gleicher Amplitude  $X$  aber unterschiedlicher Kreisfrequenzen besteht, studiert. Die Nullphasen sind auch hier keine physikalische Eigenschaft, sondern ergeben sich im Rahmen der Modellbildung durch Wahl des Nullpunktes der Zeitmessung. Mit den Kreisfrequenzen  $\omega_1$  und  $\omega_2$  der beiden Anteile gelte für das Eingangssignal:<sup>5</sup>

$$x(t) = X (\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)) = X \frac{1}{2} (e^{j\omega_1 t} + e^{j\omega_2 t} + e^{-j\omega_2 t} + e^{-j\omega_1 t}). \quad (\text{B.18})$$

Für die zweite Potenz folgt<sup>5</sup>

$$\begin{aligned} x^2(t) &= X^2 \frac{1}{4} (e^{j\omega_1 t} + e^{j\omega_2 t} + e^{-j\omega_2 t} + e^{-j\omega_1 t})^2 \\ &= X^2 \frac{1}{4} (4 + e^{j2\omega_1 t} + 2 e^{j(\omega_1 + \omega_2)t} + 2 e^{j(\omega_1 - \omega_2)t} + e^{j2\omega_2 t} \\ &\quad + e^{-j2\omega_1 t} + 2 e^{-j(\omega_1 + \omega_2)t} + 2 e^{-j(\omega_1 - \omega_2)t} + e^{-j2\omega_2 t}) \\ &= X^2 + X^2 \frac{1}{2} \cos(2\omega_1 t) + X^2 \cos((\omega_1 + \omega_2) t) \\ &\quad + X^2 \cos((\omega_1 - \omega_2) t) + X^2 \frac{1}{2} \cos(2\omega_2 t). \end{aligned}$$

Es entstehen Intermodulationsprodukte zweiter Ordnung.

<sup>5</sup>Es wird die Eulersche Formel  $e^{j\alpha} = \cos(\alpha) + j \sin(\alpha)$  verwendet.

Allgemein gilt für die  $n$ -te Potenz<sup>6</sup>

$$\begin{aligned} x^n(t) &= X^n \frac{1}{2^n} \left( e^{j\omega_1 t} + e^{j\omega_2 t} + e^{-j\omega_2 t} + e^{-j\omega_1 t} \right)^n \\ &= X^n \frac{1}{2^n} \sum_{m_1+m_2+m_3+m_4=n} \binom{n}{m_1, m_2, m_3, m_4} e^{jm_1\omega_1 t} e^{jm_2\omega_2 t} e^{-jm_3\omega_2 t} e^{-jm_4\omega_1 t} . \end{aligned}$$

Es entstehen Intermodulationsprodukte  $n$ -ter Ordnung.

Einsetzen der Potenzen in die Potenzreihe (B.2) ergibt unter Verwenden der Kleinsignalnäherung die Approximation<sup>7</sup>

$$\begin{aligned} y(t) &\approx c_0 + c_2 X^2 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n X^n \frac{1}{2^n} \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} \left( e^{jm\omega_1 t} e^{j(n-m)\omega_2 t} \right. \\ &\quad \left. + e^{jm\omega_1 t} e^{-j(n-m)\omega_2 t} + e^{-jm\omega_1 t} e^{j(n-m)\omega_2 t} + e^{-jm\omega_1 t} e^{-j(n-m)\omega_2 t} \right) \\ &= c_0 + c_2 X^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{c_n}{2^{n-1}} \binom{n}{m} X^n \left( \cos((m\omega_1 + (n-m)\omega_2) t) \right. \\ &\quad \left. + \cos((m\omega_1 - (n-m)\omega_2) t) \right) \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

des Ausgangssignals. Die Intermodulationsprodukte haben im Gültigkeitsbereich der Kleinsignalnäherung die Amplituden

$$Y_{n,m} = \frac{|c_n|}{2^{n-1}} \binom{n}{m} X^n. \quad (\text{B.20})$$

### B.3.2. Intermodulationsabstand

Der Intermodulationsabstand wird als Verhältnis der Amplitude  $Y_1$  der Grundwelle zur Amplitude  $Y_{n,m}$  des Intermodulationsproduktes definiert:

$$I_{n,m} = \frac{Y_1}{Y_{n,m}}. \quad (\text{B.21})$$

Im Gültigkeitsbereich der Kleinsignalnäherung ist der Intermodulationsabstand

$$I_{n,m} = \frac{|c_1| X}{\frac{|c_n|}{2^{n-1}} \binom{n}{m} X^n} = \frac{|c_1|}{\frac{|c_n|}{2^{n-1}} \binom{n}{m} X^{n-1}} = \left| \frac{c_1}{c_n} \right| \frac{2^{n-1}}{\binom{n}{m} X^{n-1}}. \quad (\text{B.22})$$

---

<sup>6</sup>Der Multinomialkoeffizient ist als  $\binom{n}{m_1 \dots m_k} = \frac{n!}{m_1! \dots m_k!}$  definiert, wobei  $\sum_{k=1}^K m_k = n$  gilt.

<sup>7</sup>Es wird die Eulersche Formel  $e^{j\alpha} = \cos(\alpha) + j \sin(\alpha)$  verwendet.

Es besteht der Zusammenhang

$$H_n = \binom{n}{m} I_{n,m} \quad (\text{B.23})$$

zwischen den Harmonischenabständen  $H_n$  gemäß (B.14) und den Intermodulationsabständen  $I_{n,m}$ , siehe Abbildung B.4.

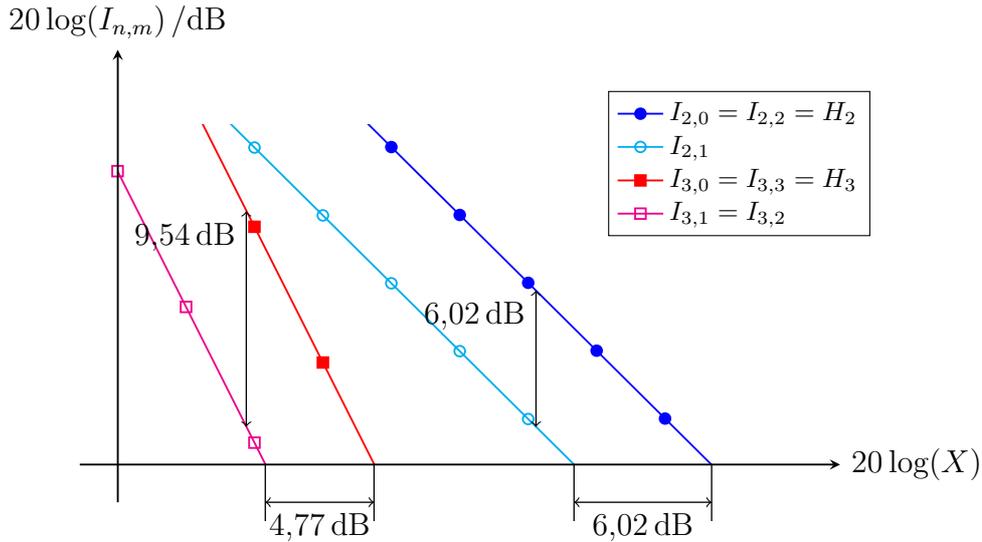


Abbildung B.4.: Intermodulationsabstände  $I_{n,m}$  als Funktionen der Eingangsamplitude  $X$  an einem Beispiel

In vielen Anwendungen sind die Intermodulationsprodukte dritter Ordnung besonders kritisch. Beispielsweise erzeugen Störsignale der sich bei kleinem  $\Delta\omega$  nur geringfügig von der Kreisfrequenz  $\omega_0$  eines Nutzsignals unterscheidenden Kreisfrequenzen  $\omega_1 = \omega_0 + \Delta\omega$  und  $\omega_2 = \omega_0 + 2\Delta\omega$  ein Intermodulationsprodukt dritter Ordnung der gleichen Kreisfrequenz  $2\omega_1 - \omega_2 = \omega_0$  wie das Nutzsignal. Der hier relevante Intermodulationsabstand dritter Ordnung ist

$$I_{3,1} = I_{3,2} = \underbrace{\frac{1}{3}}_{\hat{=} -9,54 \text{ dB}} H_3.$$

Am Interceptpunkt wird der unter Verwenden der Kleinsignalnäherung berechnete Intermodulationsabstand  $I_{n,m}$  eins, das heißt 0 dB. Der eingangsseitige Interceptpunkt ergibt sich zu

$$X_{\text{IP},n,m} = 2^{n-1} \sqrt{\left| \frac{c_1}{c_n} \right| \frac{1}{\binom{n}{m}}}. \quad (\text{B.24})$$

Speziell für den in der Praxis häufig zum quantitativen Beurteilen der Nichtlinearität verwendeten eingangsseitigen Interceptpunkt dritter Ordnung gilt

$$X_{\text{IP},3,1} = \sqrt{\left| \frac{4c_1}{3c_3} \right|}. \quad (\text{B.25})$$

Aus dem Intermodulationsabstand  $I_{n,m}$  bei einer Eingangsamplitude  $X$  kann man den eingangsseitigen Interceptpunkt gemäß

$$X_{\text{IP},n,m} = {}^{n-1}\sqrt{I_{n,m}} X \quad (\text{B.26})$$

berechnen.

Es besteht der Zusammenhang

$$X_{\text{IPH},n} = {}^{n-1}\sqrt{\binom{n}{m}} X_{\text{IP},n,m} \quad (\text{B.27})$$

zwischen den eingangsseitigen Interceptpunkten der Harmonischen  $X_{\text{IPH},n}$  gemäß (B.15) und den eingangsseitigen Interceptpunkten  $X_{\text{IP},n,m}$ , siehe Abbildung B.4.

Der ausgangsseitige Interceptpunkt ergibt sich zu

$$Y_{\text{IP},n,m} = |c_1| X_{\text{IP},n,m} = {}^{n-1}\sqrt{I_{n,m}} Y_1 = 2 |c_1| {}^{n-1}\sqrt{\left| \frac{c_1}{c_n} \right| \frac{1}{\binom{n}{m}}}. \quad (\text{B.28})$$

Speziell für den in der Praxis häufig zum quantitativen Beurteilen der Nichtlinearität verwendeten ausgangsseitigen Interceptpunkt dritter Ordnung gilt

$$Y_{\text{IP},3,1} = \sqrt{\left| \frac{4c_1^3}{3c_3} \right|}. \quad (\text{B.29})$$

Für statische nichtlineare Systeme dritter Ordnung gemäß (B.8) folgt aus (B.10) der Zusammenhang

$$X_{\text{KP}} = \underbrace{\sqrt{0,1087}}_{\hat{=}-9,64 \text{ dB}} X_{\text{IP},3,1} \quad (\text{B.30})$$

zwischen dem Eingangskompressionspunkt  $X_{\text{KP}}$  und dem eingangsseitigen Interceptpunkt dritter Ordnung  $X_{\text{IP},3,1}$ .

## B.4. Dynamikbereich

Ziel ist es, ein Eingangssignal in einem System möglichst störungsfrei, das heißt linear zu verarbeiten. Neben den durch das nichtlineare Verhalten des Systems erzeugten Störungen in Form von Intermodulationsprodukten gibt es in der Praxis auch noch Störungen in Form von mittelwertfreiem additivem Rauschen. Die störende Wirkung der Intermodulationsprodukte wird durch die Intermodulationsabstände  $I_{m,n}$  quantifiziert. Die Amplitude  $Y_R$  des dem Ausgangssignal überlagerten Rauschsignals ist eine Zufallsvariable [Bos11]. Da die störende Wirkung auf der zum Quadrat der Amplitude  $Y_R$  proportionalen Leistung des Rauschsignals beruht, ist es sinnvoll die Wurzel des zweiten Moments der Rauschamplitude  $Y_R$  als mittlere Rauschamplitude in der quantitativen Bewertung zu verwenden. Man definiert den Rauschabstand

$$R = \frac{Y_1}{\sqrt{E\{Y_R^2\}}}. \quad (\text{B.31})$$

Der Rauschabstand nimmt mit wachsender Eingangsamplitude  $X$  zu, siehe Abbildung B.5.

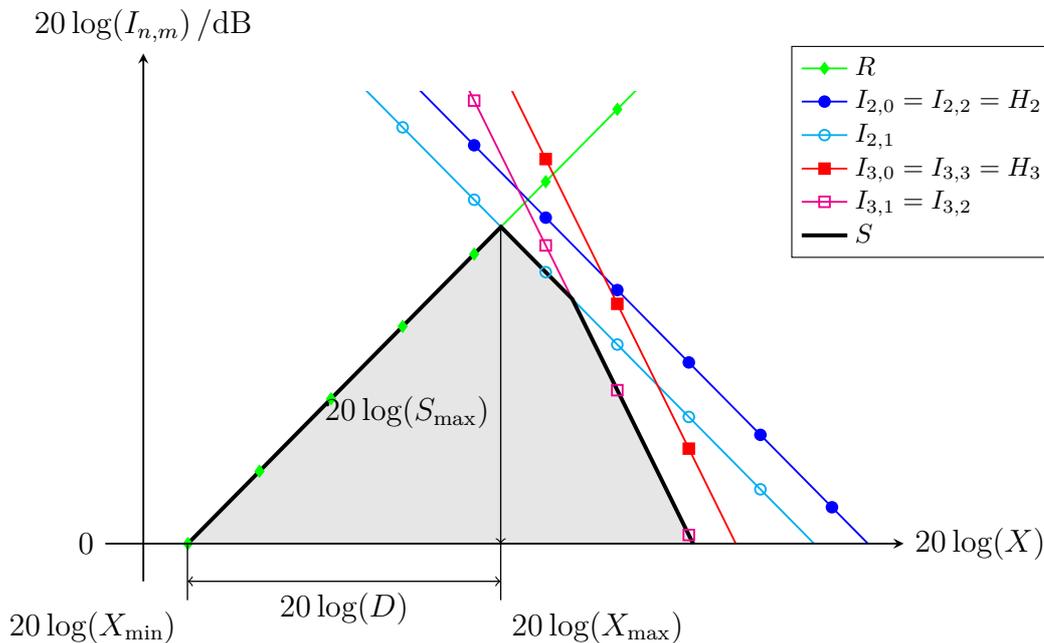


Abbildung B.5.: Rauschabstand  $R$  und Intermodulationsabstände  $I_{n,m}$  als Funktionen der Eingangsamplitude  $X$  an einem Beispiel

Die störende Wirkung resultiert im Wesentlichen aus dem stärksten Störsignal. Es ist daher sinnvoll, den Störabstand als das Minimum von Rauschabstand  $R$  und allen Intermodulationsabständen  $I_{n,m}$  zu definieren:

$$S = \min\{R, I_{2,0}, I_{2,1}, I_{2,2}, I_{3,0}, I_{3,1}, I_{3,3}, \dots\}. \quad (\text{B.32})$$

Da der Rauschabstand  $R$  und die Intermodulationsabstände  $I_{n,m}$  von der Eingangsamplitude  $X$  abhängen, hängt der Störabstand  $S$  auch von der Eingangsamplitude  $X$  ab. Bei einer bestimmten Eingangsamplitude  $X_{\max}$  wird der maximale Störabstand  $S_{\max}$  erzielt. Für Eingangsamplituden  $X$ , die größer als die maximale Eingangsamplitude  $X_{\max}$  sind, gibt es Intermodulationsprodukte die stärker als das Rauschen sind. Die maximale Eingangsamplitude  $X_{\max}$  ist daher die größtmögliche Eingangsamplitude  $X$ , bei der das System noch in guter Näherung linear ist. Bei der Eingangsamplitude  $X_{\min}$  wird der Rauschabstand  $R$  eins, das heißt 0 dB. Für Eingangsamplituden  $X$ , die kleiner als die minimale Eingangsamplitude  $X_{\min}$  sind, ist das Rauschen stärker als das Ausgangssignal. Für die minimale Eingangsamplitude gilt

$$X_{\min} = \frac{X_{\max}}{S_{\max}},$$

siehe Abbildung B.5. Man definiert den Dynamikbereich<sup>8</sup>

$$D = \frac{X_{\max}}{X_{\min}} = S_{\max}. \quad (\text{B.33})$$

Wenn das Rauschen im Wesentlichen im nichtlinearen System selbst erzeugt wird und nicht bereits im Eingangssignal enthalten war, ändert sich die mittlere Rauschamplitude bei Vorschalten eines linearen Dämpfungsglieds nicht. Man kann nun eine Eingangsamplitude  $X$ , die in einer konkreten Anwendung größer als die maximale Eingangsamplitude  $X_{\max}$  des nichtlinearen Systems ist, durch das Vorschalten eines Dämpfungsglieds auf die maximale Eingangsamplitude  $X_{\max}$  reduzieren und so einen maximalen Störabstand  $S_{\max}$  erzielen.

## B.5. Kaskade statischer nichtlinearer Systeme

Einsetzen der Kennlinie des ersten Systems

$$y^{(1)}(t) = f^{(1)}(x^{(1)}(t)) = \sum_{l=0}^{\infty} c_l^{(1)} (x^{(1)}(t))^l \quad (\text{B.34})$$

---

<sup>8</sup>Genauer handelt es sich bei dieser Definition um den sogenannten Spurious Free Dynamic Range (SFDR).

in die Kennlinie des zweiten Systems

$$y^{(2)}(t) = f^{(2)}(x^{(2)}(t)) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m^{(2)} (x^{(2)}(t))^m \quad (\text{B.35})$$

ergibt die Kennlinie der Kaskade

$$y(t) = f(x(t)) = f^{(2)}(f^{(1)}(x(t))) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n(t), \quad (\text{B.36})$$

siehe Abbildung B.6.

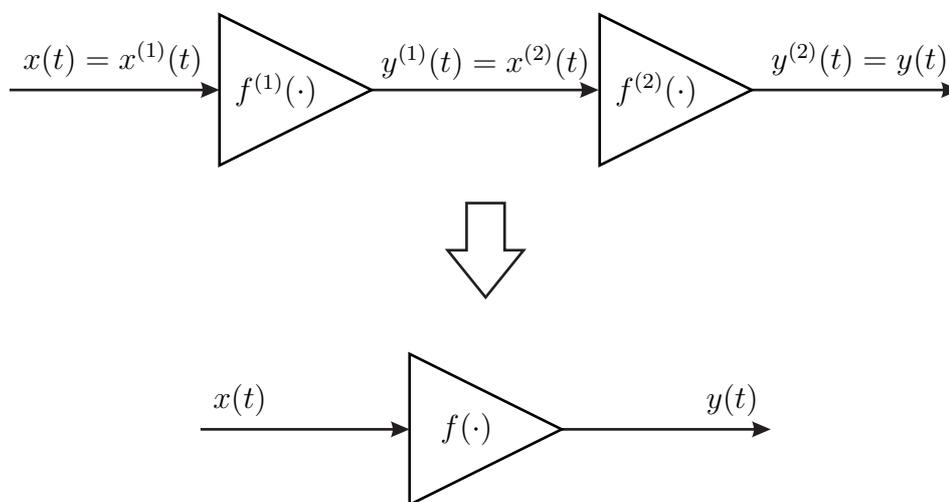


Abbildung B.6.: Kaskade statischer nichtlinearer Systeme

Falls die Systeme wie in der Hochfrequenztechnik üblich wechsellspannungsgelkoppelt sind, sind die Koeffizienten der konstanten Terme

$$c_0^{(2)} = c_0^{(1)} = 0.$$

Dann ergeben sich die Koeffizienten der Kaskade wie folgt:

$$\begin{aligned} c_0 &= 0 \\ c_1 &= c_1^{(2)} c_1^{(1)}, \\ c_2 &= c_1^{(2)} c_2^{(1)} + c_2^{(2)} c_1^{(1)2}, \\ c_3 &= c_1^{(2)} c_3^{(1)} + c_3^{(2)} c_1^{(1)3} + 2c_2^{(2)} c_2^{(1)} c_1^{(1)}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Im Folgenden soll als wichtiges Maß zum quantitativen Beurteilen der Nichtlinearität der Interceptpunkt dritter Ordnung der Kaskade bestimmt werden. Der eingangsseitige Interceptpunkt dritter Ordnung der Kaskade ist

$$X_{\text{IP},3,1} = \sqrt{\left| \frac{4c_1}{3c_3} \right|} = \sqrt{\left| \frac{4c_1^{(2)} c_1^{(1)}}{3 \left( c_1^{(2)} c_3^{(1)} + c_3^{(2)} c_1^{(1)^3} + 2c_2^{(2)} c_2^{(1)} c_1^{(1)} \right)} \right|},$$

siehe (B.25). Es folgt

$$\begin{aligned} \frac{1}{X_{\text{IP},3,1}} &= \sqrt{\left| \frac{3c_3^{(1)}}{4c_1^{(1)}} + \frac{3c_3^{(2)} c_1^{(1)^2}{4c_1^{(2)}} + 2 \frac{3c_2^{(2)} c_2^{(1)}}{4c_1^{(2)}} \right|} \\ &\approx \sqrt{\left| \frac{3c_3^{(1)}}{4c_1^{(1)}} \right| + \left| \frac{3c_3^{(2)} c_1^{(1)^2}{4c_1^{(2)}} \right|} \\ &= \sqrt{\frac{1}{X_{\text{IP},3,1}^{(1)^2} + \frac{c_1^{(1)^2}}{X_{\text{IP},3,1}^{(2)^2}}}. \end{aligned}$$

Diese Approximation entspricht der Vorstellung, dass keine weiteren Intermodulationsprodukte durch Wechselwirkungen zwischen den vom ersten System erzeugten Intermodulationsprodukten im zweiten System entstehen. Aufgelöst nach dem eingangsseitigen Interceptpunkt dritter Ordnung der Kaskade erhält man

$$X_{\text{IP},3,1} \approx \sqrt{\frac{1}{X_{\text{IP},3,1}^{(1)^2} + \frac{c_1^{(1)^2}}{X_{\text{IP},3,1}^{(2)^2}}}}^{-1}. \quad (\text{B.37})$$

Für den ausgangsseitigen Interceptpunkt dritter Ordnung der Kaskade folgt mit (B.29)

$$\begin{aligned} Y_{\text{IP},3,1} &= |c_1| X_{\text{IP},3,1} = |c_1^{(2)}| |c_1^{(1)}| X_{\text{IP},3,1} \\ &\approx \sqrt{\frac{1}{c_1^{(2)^2} c_1^{(1)^2} \left( \frac{1}{X_{\text{IP},3,1}^{(1)^2} + \frac{c_1^{(1)^2}}{X_{\text{IP},3,1}^{(2)^2}} \right)}}^{-1} \\ &= \sqrt{\frac{1}{c_1^{(2)^2} c_1^{(1)^2} \left( \frac{c_1^{(1)^2}}{Y_{\text{IP},3,1}^{(1)^2} + \frac{c_1^{(2)^2} c_1^{(1)^2}}{Y_{\text{IP},3,1}^{(2)^2}} \right)}}^{-1} \\ &= \sqrt{\frac{1}{c_1^{(2)^2} Y_{\text{IP},3,1}^{(1)^2} + \frac{1}{Y_{\text{IP},3,1}^{(2)^2}}}}^{-1}. \end{aligned} \quad (\text{B.38})$$

In einer Hochfrequenzverstärkerkaskade dominiert im allgemeinen der Interceptpunkt des letzten Hochfrequenzverstärkers der Kaskade. Die Anforderungen an die Großsignalfestigkeit steigen zum Ende der Hochfrequenzverstärkerkaskade hin an. Im Gegensatz dazu steigen die Anforderungen bezüglich der Rauscharmut zum Anfang der Hochfrequenzverstärkerkaskade hin an, siehe (13.31). Weiterhin erkennt man, dass man den eingangsseitigen Interceptpunkt durch Vorschalten eines linearen Dämpfungsgliedes erhöhen kann. Der ausgangsseitige Interceptpunkt bleibt dabei jedoch unverändert.

## B.6. Mischer

### B.6.1. Idealer Mischer

Aufgabe eines Mixers ist es, ein Eingangssignal in einen anderen Frequenzbereich umzusetzen. Mixer werden beispielsweise in Sendern und in Empfängern eingesetzt. Ein idealer Mischer entspricht einem Multiplizierer, siehe Abbildung B.7. Das Ausgangssignal

$$y(t) = x_E(t) x_O(t) \quad (\text{B.39})$$

ist das Produkt aus Eingangssignal  $x_E(t)$  und Oszillatorsignal  $x_O(t)$ .

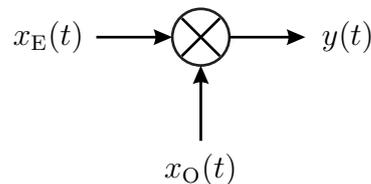


Abbildung B.7.: Idealer Mischer

Die Wirkungsweise eines idealen Mixers soll anhand eines sinusförmigen Eingangssignals<sup>9</sup>

$$x_E(t) = X \cos(\omega_E t) = \frac{X}{2} (e^{j\omega_E t} + e^{-j\omega_E t})$$

und eines sinusförmigen Oszillatorsignals<sup>9</sup>

$$x_O(t) = \cos(\omega_O t) = \frac{1}{2} (e^{j\omega_O t} + e^{-j\omega_O t})$$

<sup>9</sup>Es wird die Eulersche Formel  $e^{j\alpha} = \cos(\alpha) + j \sin(\alpha)$  verwendet.

untersucht werden. Das Ausgangssignal ergibt sich in diesem Fall zu<sup>10</sup>

$$\begin{aligned}
 y(t) &= \frac{X}{2} \left( e^{j\omega_E t} + e^{-j\omega_E t} \right) \frac{1}{2} \left( e^{j\omega_O t} + e^{-j\omega_O t} \right) \\
 &= \frac{X}{4} \left( e^{j(\omega_E + \omega_O)t} + e^{j(\omega_E - \omega_O)t} + e^{-j(\omega_E + \omega_O)t} + e^{-j(\omega_E - \omega_O)t} \right) \\
 &= \underbrace{\frac{1}{2}}_{\hat{=} -6,02 \text{ dB}} X \cos((\omega_E + \omega_O)t) + \underbrace{\frac{1}{2}}_{\hat{=} -6,02 \text{ dB}} X \cos((\omega_E - \omega_O)t).
 \end{aligned}$$

Es entstehen Signalanteile bei der Summe  $\omega_E + \omega_O$  und bei der Differenz  $\omega_E - \omega_O$  der Kreisfrequenzen. Üblicherweise wird nur einer der beiden entstehenden Signalanteile weiter genutzt und der andere durch Filter unterdrückt.

### B.6.2. Additiver Mischer

Analoge Multiplizierer für hochfrequente Signale lassen sich nur schwer realisieren. Man behilft sich mit Mischern, die neben weiteren durch Filter zu unterdrückenden störenden Signalanteilen auch den gewünschten Signalanteil erzeugen. Der in Abbildung B.8 gezeigte additive Mischer ist ein solcher Mischer. Er besteht aus der Kaskade eines Addierers und eines statischen nichtlinearen Systems mit quadratischer Kennlinie. Als nichtlineare Bauelemente zum näherungsweise Realisieren eines statischen nichtlinearen Systems mit quadratischer Kennlinie kann man beispielsweise Dioden verwenden.

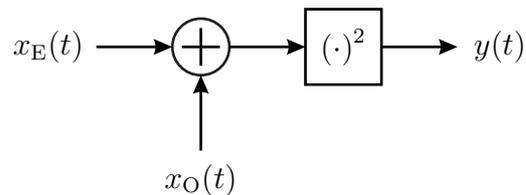


Abbildung B.8.: Additiver Mischer

Das Ausgangssignal ergibt sich zu

$$y(t) = (x_E(t) + x_O(t))^2 = x_E^2(t) + 2x_E(t)x_O(t) + x_O^2(t)$$

und enthält offensichtlich auch den gewünschten Signalanteil  $x_E(t)x_O(t)$ . Falls das statische nichtlineare System keine perfekt quadratische Kennlinie hat, entstehen weitere Signalanteile.

---

<sup>10</sup>Es wird die Eulersche Formel  $e^{j\alpha} = \cos(\alpha) + j \sin(\alpha)$  verwendet.

### B.6.3. Multiplikativer Mischer

Die Idee des multiplikativen Mixers besteht darin, dass eine Multiplikation mit einer Rechteckschwingung einem periodischen Umpolen des Signals entspricht und dies lässt sich relativ einfach mit Schaltern realisieren, siehe Abbildung B.9a. Aufgrund der charakteristischen Schaltungstopologie wird der multiplikative Mischer auch als Ringmischer bezeichnet. In der Hochfrequenztechnik können Schalter mit Dioden oder Transistoren realisiert werden, siehe Abbildung B.9b und [Gil68].

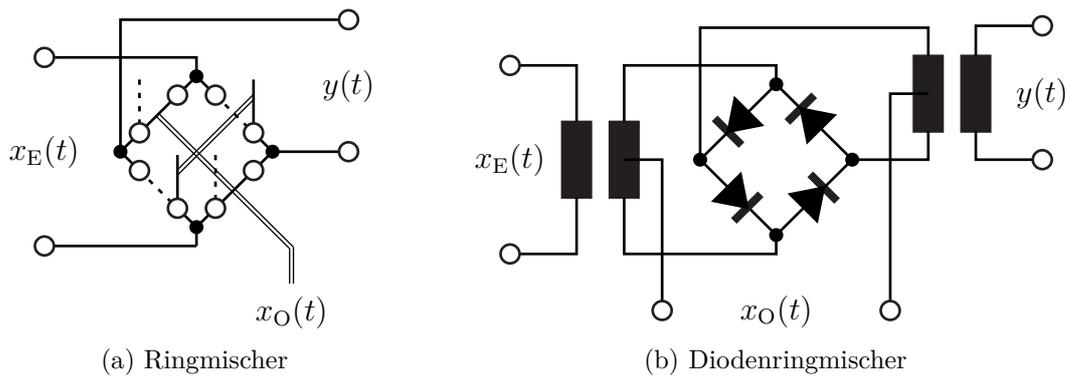


Abbildung B.9.: Multiplikativer Mischer

Die Rechteckschwingung kann man als Fourier-Reihe darstellen:

$$x_O(t) = \frac{4}{\pi} \left( \cos(\omega_O t) - \frac{1}{3} \cos(3\omega_O t) + \frac{1}{5} \cos(5\omega_O t) - \dots \right).$$

Es folgt

$$\begin{aligned} y(t) &= x_E(t) x_O(t) \\ &= \underbrace{\frac{2}{\pi}}_{\hat{=} -3,92 \text{ dB}} X \cos((\omega_E + \omega_O) t) + \underbrace{\frac{2}{\pi}}_{\hat{=} -3,92 \text{ dB}} X \cos((\omega_E - \omega_O) t) \\ &\quad - \frac{2}{3\pi} X \cos((\omega_E + 3\omega_O) t) - \frac{2}{3\pi} X \cos((\omega_E - 3\omega_O) t) \\ &\quad + \frac{2}{5\pi} X \cos((\omega_E + 5\omega_O) t) + \frac{2}{5\pi} X \cos((\omega_E - 5\omega_O) t) - \dots \end{aligned}$$

Das Eingangssignal  $x_E(t)$  wird nicht nur mit einem sinusförmigen Oszillatorsignal der gewünschten Kreisfrequenz  $\omega_O$  multipliziert, sondern es entstehen auch noch Mischprodukte mit allen ungeraden Harmonischen des Oszillatorsignals.

### B.6.4. Quadraturmodulator

Ein Quadraturmodulator dient dem Erzeugen eines Bandpasssignals  $a(t)$  aus dem äquivalenten komplexwertigen Tiefpasssignal  $\underline{u}(t)$ . Für die Tiefpass-Bandpass-Transformation gilt<sup>11</sup>

$$a(t) = \operatorname{Re}(\underline{u}(t) e^{j\omega_0 t}) = \operatorname{Re}(\underline{u}(t)) \cos(\omega_0 t) - \operatorname{Im}(\underline{u}(t)) \sin(\omega_0 t). \quad (\text{B.40})$$

Den Realteil  $\operatorname{Re}(\underline{u}(t))$  des äquivalenten komplexwertigen Tiefpasssignals bezeichnet man auch als Inphasekomponente und den Imaginärteil  $\operatorname{Im}(\underline{u}(t))$  als Quadraturkomponente. Die Bezugskreisfrequenz  $\omega_0$  der Tiefpass-Bandpass-Transformation entspricht in der Regel der Mittenkreisfrequenz des Bandpasssignals.

Die Realisierung eines Quadraturmodulators erfordert zwei Mischer, siehe Abbildung B.10. Die beiden um  $\pi/2$  gegeneinander phasenverschobenen Oszillatorsignale kann man aus einem einzigen Oszillatorsignal unter Verwenden eines Phasenschiebers erzeugen. Der Phasenschieber besteht im einfachsten Fall aus einem Leitungsstück passender Länge.

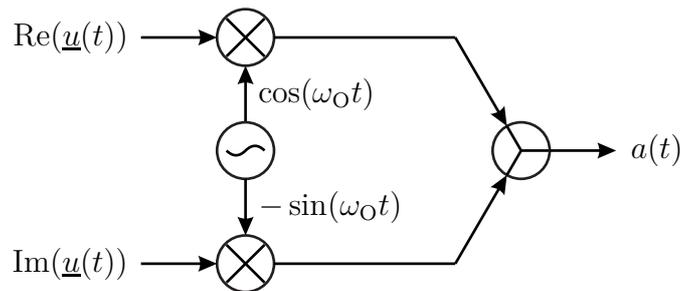


Abbildung B.10.: Quadraturmodulator

Moderne nach dem sogenannten direktumsetzenden Prinzip arbeitende Sender bestehen im Wesentlichen aus einem Quadraturmodulator. Das äquivalente komplexwertige Tiefpasssignal  $\underline{u}(t)$  wird auf einem digitalen Signalprozessor berechnet und mit einem Digital-Analog-Wandler erzeugt [Pir96; TH07].

### B.6.5. Quadraturdemodulator

Ein Quadraturdemodulator dient dem Erzeugen des zu einem Bandpasssignal  $a(t)$  äquivalenten komplexwertigen Tiefpasssignals  $\underline{u}(t)$ . Das Bandpasssignal gemäß (B.40) kann man umformen in<sup>12</sup>

$$a(t) = \frac{1}{2} \underline{u}(t) e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2} \underline{u}^*(t) e^{-j\omega_0 t}.$$

<sup>11</sup>Es wird die Eulersche Formel  $e^{j\alpha} = \cos(\alpha) + j \sin(\alpha)$  verwendet.

<sup>12</sup>Der Realteil einer komplexen Größe berechnet sich zu  $\operatorname{Re}(\underline{x}) = \frac{1}{2} (\underline{x} + \underline{x}^*)$ .

Multiplizieren des Bandpasssignals  $a(t)$  mit<sup>13</sup>

$$2 \cos(\omega_0 t) - j2 \sin(\omega_0 t) = 2 e^{-j\omega_0 t}$$

ergibt

$$\left( \frac{1}{2} \underline{u}(t) e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2} \underline{u}^*(t) e^{-j\omega_0 t} \right) 2 e^{-j\omega_0 t} = \underline{u}(t) + \underbrace{\underline{u}^*(t) e^{-j2\omega_0 t}}_{\text{hochfrequent}}.$$

Nach Unterdrücken der Signalanteile  $\underline{u}^*(t) e^{-j2\omega_0 t}$  bei der doppelten Kreisfrequenz  $2\omega_0$  mit einem Tiefpass verbleibt das gesuchte äquivalente komplexwertige Tiefpasssignal  $\underline{u}(t)$ . Man erhält die in Abbildung B.11 gezeigte Realisierung eines Quadraturdemodulators.

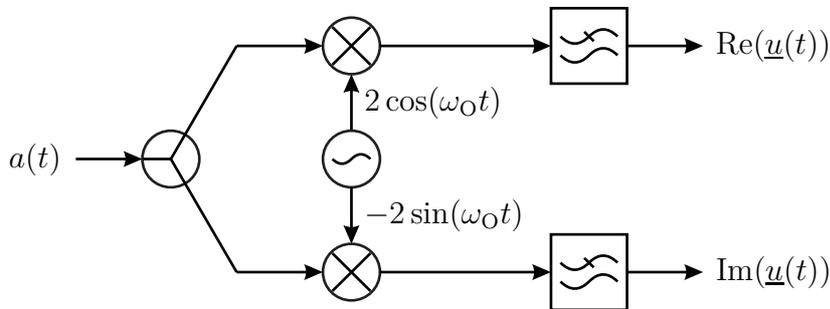


Abbildung B.11.: Quadraturdemodulator

Moderne nach dem sogenannten direktumsetzenden Prinzip arbeitende Empfänger bestehen im Wesentlichen aus einem Quadraturdemodulator. Das äquivalente komplexwertige Tiefpasssignal  $\underline{u}(t)$  wird mit einem Analog-Digital-Wandler erfasst und auf einem digitalen Signalprozessor ausgewertet [Pir96; TH07].

<sup>13</sup>Es wird die Eulersche Formel  $e^{j\alpha} = \cos(\alpha) + j \sin(\alpha)$  verwendet.



# Anhang C.

## Fourier-Analyse

### C.1. Zeitbereichsanalyse

#### C.1.1. Anwendungsbeispiel der Zeitbereichsanalyse

Die Fourier-Analyse ist ein wichtiger Bestandteil vieler Messverfahren in der Hochfrequenztechnik. Im Folgenden sollen einige diesbezügliche Signalverarbeitungsaspekte diskutiert werden, die neben hochfrequenztechnischen Aspekten beim Konzipieren von Messsystemen und beim Interpretieren von Messergebnissen zu berücksichtigen sind.

Als Beispiel eines linearen zeitinvarianten Systems wird eine Leitung betrachtet, siehe Abbildung C.1. Es wird angenommen, dass die Leitung verlustfrei und dispersionsfrei ist. Die Phasengeschwindigkeit  $v_p$  ist dann frequenzunabhängig und gleich der Lichtgeschwindigkeit  $c$ , siehe (2.44). Die dem Streuparameter  $\underline{S}_{2,1}$  gemäß (10.19) entsprechende Übertragungsfunktion der Leitung ergibt sich mit (2.43) und (1.1) zu

$$\underline{H}(f) = e^{-j2\pi f \frac{l}{c}}.$$

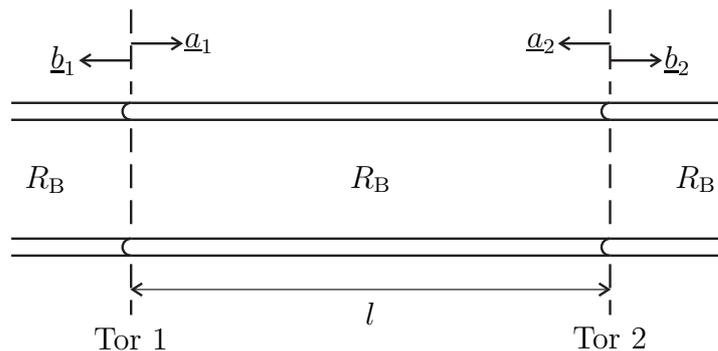


Abbildung C.1.: Leitung mit Verzögerung  $t_0 = l/c$

Durch inverse Fourier-Transformation der Übertragungsfunktion  $\underline{H}(f)$  erhält

man die Impulsantwort

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}(\underline{H}(f)) = \int_{-\infty}^{\infty} \underline{H}(f) e^{j2\pi ft} df. \quad (\text{C.1})$$

Im obigen Beispiel erhält man die Impulsantwort<sup>12</sup>

$$\begin{aligned} h(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi f \frac{l}{c}} e^{j2\pi ft} df = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi f(t - \frac{l}{c})} df = \left[ \frac{e^{j2\pi f(t - \frac{l}{c})}}{j2\pi(t - \frac{l}{c})} \right]_{f=-\infty}^{\infty} \\ &= \lim_{f \rightarrow \infty} \frac{e^{j2\pi f(t - \frac{l}{c})} - e^{-j2\pi f(t - \frac{l}{c})}}{j2\pi(t - \frac{l}{c})} = \lim_{f \rightarrow \infty} \frac{\sin(2\pi f(t - \frac{l}{c}))}{\pi(t - \frac{l}{c})} \\ &= \delta\left(t - \frac{l}{c}\right) \end{aligned}$$

der Leitung. Insbesondere ist die Fourier-Transformierte des Dirac-Impulses

$$\mathcal{F}(\delta(t)) = 1. \quad (\text{C.2})$$

Die Impulsantwort  $h(t)$  der Leitung beschreibt die Verzögerung

$$t_0 = \frac{l}{c}$$

eines Signals, das sich mit der Lichtgeschwindigkeit  $c$  über die Leitung der Länge  $l$  ausbreitet. Auch in vielen anderen Beispielen besteht ein direkter Zusammenhang zwischen der Impulsantwort  $h(t)$  und der Geometrie des Systems. Es ist daher von Interesse, aus der messtechnisch einfacher zu ermittelnden Übertragungsfunktion  $\underline{H}(f)$  die Impulsantwort  $h(t)$  zu berechnen. Die praktische Umsetzung dieser Zeitbereichsanalyse wird in den folgenden Abschnitten diskutiert.

## C.1.2. Eigenschaften der Fourier-Transformation

### C.1.2.1. Umkehrtransformation

Die Fourier-Transformation

$$\underline{H}(f) = \mathcal{F}(h(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j2\pi ft} dt \quad (\text{C.3})$$

---

<sup>1</sup>Es wird die Eulersche Formel  $e^{j\alpha} = \cos(\alpha) + j \sin(\alpha)$  verwendet.

<sup>2</sup>Es gilt  $\delta(t) = \lim_{f \rightarrow \infty} \frac{\sin(2\pi ft)}{\pi t}$ .

ist die Umkehrtransformation der inversen Fourier-Transformation (C.1). Mit der Ausblendeigenschaft des Dirac-Impulses gilt

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(\underline{H}(f))) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \underline{H}(\varphi) e^{j2\pi\varphi t} d\varphi e^{-j2\pi ft} dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \underline{H}(\varphi) \int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi(\varphi-f)t} dt d\varphi \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \underline{H}(\varphi) \delta(\varphi - f) d\varphi \\
 &= \underline{H}(f).
 \end{aligned}$$

### C.1.2.2. Linearität

Die Fourier-Transformation (C.3) ist eine lineare Transformation. Es gelten das Proportionalitätsprinzip

$$\mathcal{F}(h(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} ch(t) e^{-j2\pi ft} dt = c \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j2\pi ft} dt = c\mathcal{F}(h(t)) \quad (\text{C.4})$$

und das Superpositionsprinzip

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}(g(t) + h(t)) &= \int_{-\infty}^{\infty} (g(t) + h(t)) e^{-j2\pi ft} dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j2\pi ft} dt + \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j2\pi ft} dt \\
 &= \mathcal{F}(g(t)) + \mathcal{F}(h(t)).
 \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

### C.1.2.3. Ähnlichkeitssatz

Weiterhin gilt für die Fourier-Transformation (C.3) der Ähnlichkeitssatz

$$\mathcal{F}(h(ct)) = \int_{-\infty}^{\infty} h(ct) e^{-j2\pi ft} dt = \frac{1}{|c|} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j2\pi \frac{f}{c} \tau} d\tau = \frac{1}{|c|} \underline{H}\left(\frac{f}{c}\right), \quad (\text{C.6})$$

wobei von der Substitution  $\tau = ct$  Gebrauch gemacht wurde. Insbesondere gilt für die Zeitumkehr

$$\mathcal{F}(h(-t)) = \underline{H}(-f). \quad (\text{C.7})$$

#### C.1.2.4. Differentiation

Mit der inversen Fourier-Transformation (C.1) zeigt man, dass die Differentiation im Zeitbereich einer Multiplikation mit  $j2\pi f$  im Frequenzbereich entspricht:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h(t)}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} \underline{H}(f) e^{j2\pi ft} df = \int_{-\infty}^{\infty} \underline{H}(f) \frac{\partial}{\partial t} (e^{j2\pi ft}) df \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} j2\pi f \underline{H}(f) e^{j2\pi ft} df = \mathcal{F}^{-1}(j2\pi f \underline{H}(f)). \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

#### C.1.2.5. Dualität

Aus der Symmetrie der Formeln (C.1) und (C.3) folgt die Dualität der Fourier-Transformation:

$$\mathcal{F}^{-1}(h(f)) = \int_{-\infty}^{\infty} h(f) e^{j2\pi ft} df = \int_{-\infty}^{\infty} h(f) e^{-j2\pi f(-t)} df = \underline{H}(-t). \quad (\text{C.9})$$

Hiermit erhält man aus (C.2) die Fourier-Transformierte der konstanten Funktion

$$\mathcal{F}(1) = \delta(f). \quad (\text{C.10})$$

#### C.1.2.6. Faltungstheorem

Mit der inversen Fourier-Transformation

$$s(t) = \mathcal{F}^{-1}(\underline{S}(f)) = \int_{-\infty}^{\infty} \underline{S}(f) e^{j2\pi ft} df$$

von  $s(t)$ , siehe (C.1), folgt das Faltungstheorem

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(s(t) h(t)) &= \int_{-\infty}^{\infty} s(t) h(t) e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \underline{S}(\varphi) e^{j2\pi\varphi t} d\varphi h(t) e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \underline{S}(\varphi) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j2\pi(f-\varphi)t} dt}_{\underline{H}(f-\varphi)} d\varphi \\ &= \underline{S}(f) * \underline{H}(f) \\ &= \mathcal{F}(s(t)) * \mathcal{F}(h(t)). \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

Die Multiplikation im Zeitbereich entspricht einer Faltung im Frequenzbereich. Wegen der Dualität der Fourier-Transformation gilt weiterhin

$$\mathcal{F}^{-1}(\underline{S}(f) \underline{H}(f)) = \mathcal{F}^{-1}(\underline{S}(f)) * \mathcal{F}^{-1}(\underline{H}(f)), \quad (\text{C.12})$$

siehe (C.9).

### C.1.2.7. Symmetrie

Die inverse Fourier-Transformierte (C.1) der konjugiert komplexen gespiegelten Übertragungsfunktion  $\underline{H}^*(-f)$  ergibt sich mit der Substitution  $\varphi = -f$  zu

$$\mathcal{F}^{-1}(\underline{H}^*(-f)) = \int_{-\infty}^{\infty} \underline{H}^*(-f) e^{j2\pi ft} df = \left( \int_{-\infty}^{\infty} \underline{H}(\varphi) e^{j2\pi\varphi t} d\varphi \right)^* = h^*(t). \quad (\text{C.13})$$

Die Impulsantwort  $h(t)$  eines physikalischen Systems ist stets reell, das heißt es gilt

$$h(t) = h^*(t).$$

Daraus folgt mit (C.13) die Symmetrie

$$\underline{H}(f) = \underline{H}^*(-f) \quad (\text{C.14})$$

der Übertragungsfunktion  $\underline{H}(f)$ . Der Realteil  $\text{Re}(\underline{H}(f))$  der Übertragungsfunktion  $\underline{H}(f)$  ist eine gerade Funktion der Frequenz  $f$  und der Imaginärteil  $\text{Im}(\underline{H}(f))$  der Übertragungsfunktion  $\underline{H}(f)$  ist eine ungerade Funktion der Frequenz  $f$ .

### C.1.2.8. Modulationssatz

Durch inverse Fourier-Transformation (C.1) erhält man mit der Substitution  $\varphi = f - f_0$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}(\underline{W}(f - f_0)) &= \int_{-\infty}^{\infty} \underline{W}(f - f_0) e^{j2\pi ft} df \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \underline{W}(\varphi) e^{j2\pi(\varphi+f_0)t} d\varphi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \underline{W}(\varphi) e^{j2\pi\varphi t} d\varphi e^{j2\pi f_0 t} \\ &= w(t) e^{j2\pi f_0 t}. \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$

Die Frequenzverschiebung  $\underline{W}(f - f_0)$  entspricht einer Multiplikation mit  $e^{j2\pi f_0 t}$  im Zeitbereich.

### C.1.3. Kausalität

Die Impulsantwort  $h(t)$  eines physikalischen Systems ist stets kausal. Mit der Vorzeichenfunktion

$$\text{sign}(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases}$$

gilt daher im Zeitbereich

$$h(t) = h(t) \text{sign}(t).$$

Die Fourier-Transformierte (C.3) der Vorzeichenfunktion ergibt sich zu<sup>3</sup>

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\text{sign}(t)) &= \int_{-\infty}^{\infty} \text{sign}(t) e^{-j2\pi ft} dt = - \int_{-\infty}^0 e^{-j2\pi ft} dt + \int_0^{\infty} e^{-j2\pi ft} dt \\ &= -2j \int_0^{\infty} \sin(2\pi ft) dt = -2j \left[ -\frac{\cos(2\pi ft)}{2\pi f} \right]_{t=0}^{\infty} \\ &= -\frac{j}{\pi f}. \end{aligned} \quad (\text{C.16})$$

Mit dem Faltungstheorem (C.11) folgt bei kausaler Impulsantwort  $h(t)$  für die Übertragungsfunktion<sup>4</sup>

$$\underline{H}(f) = \mathcal{F}(h(t)) = \mathcal{F}(h(t) \text{sign}(t)) = \underline{H}(f) * \left( -\frac{j}{\pi f} \right) = -\frac{j}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\underline{H}(\varphi)}{f - \varphi} d\varphi.$$

Nach Realteil und Imaginärteil getrennt gilt:

$$\begin{aligned} \text{Re}(\underline{H}(f)) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Im}(\underline{H}(\varphi))}{f - \varphi} d\varphi, \\ \text{Im}(\underline{H}(f)) &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Re}(\underline{H}(\varphi))}{f - \varphi} d\varphi. \end{aligned}$$

Man kann den Realteil  $\text{Re}(\underline{H}(f))$  der Übertragungsfunktion  $\underline{H}(f)$  aus dem Imaginärteil  $\text{Im}(\underline{H}(f))$  der Übertragungsfunktion  $\underline{H}(f)$  berechnen und umgekehrt.

---

<sup>3</sup>Es wird die Eulersche Formel  $e^{j\alpha} = \cos(\alpha) + j \sin(\alpha)$  verwendet.

<sup>4</sup>Bis auf den Faktor  $-j$  entspricht dies der Hilbert-Transformation  $\mathcal{H}(\underline{H}(f)) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\underline{H}(\varphi)}{f - \varphi} d\varphi$ .

Unter Ausnutzen der Symmetrie der Übertragungsfunktion  $\underline{H}(f)$  bei reeller Impulsantwort  $h(t)$  gemäß (C.14) folgt

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\underline{H}(f)) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{\operatorname{Im}(\underline{H}(\varphi))}{f - \varphi} d\varphi + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Im}(\underline{H}(\varphi))}{f - \varphi} d\varphi \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Im}(\underline{H}(\varphi))}{f + \varphi} d\varphi + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Im}(\underline{H}(\varphi))}{f - \varphi} d\varphi \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\varphi \operatorname{Im}(\underline{H}(\varphi))}{f^2 - \varphi^2} d\varphi. \end{aligned} \quad (\text{C.17})$$

Analog erhält man

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(\underline{H}(f)) &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{\operatorname{Re}(\underline{H}(\varphi))}{f - \varphi} d\varphi - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Re}(\underline{H}(\varphi))}{f - \varphi} d\varphi \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Re}(\underline{H}(\varphi))}{f + \varphi} d\varphi - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Re}(\underline{H}(\varphi))}{f - \varphi} d\varphi \\ &= -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{f \operatorname{Re}(\underline{H}(\varphi))}{f^2 - \varphi^2} d\varphi. \end{aligned} \quad (\text{C.18})$$

Dies sind die Kramers-Kronig-Beziehungen [Kra27; Kro26].

### C.1.4. Bandbegrenzung

In der Praxis wird man die Messung der Übertragungsfunktion  $\underline{H}(f)$  nur in einem begrenzten Frequenzbereich mit einer Bandbreite  $B$ , das heißt für Frequenzen  $-B/2 < f < B/2$  durchführen können. Mathematisch entspricht dies einer Multiplikation

$$\underline{G}(f) = \underline{H}(f) \underline{W}(f) \quad (\text{C.19})$$

mit der Fensterfunktion

$$\underline{W}(f) = \frac{1}{B} \operatorname{rect}\left(\frac{f}{B}\right) = \begin{cases} \frac{1}{B} & -\frac{B}{2} < f < \frac{B}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (\text{C.20})$$

im Frequenzbereich, siehe Abbildung C.2.

Gemäß dem Faltungstheorem (C.12) ergibt sich die Impulsantwort  $g(t)$  durch Faltung mit der Impulsantwort  $w(t)$  des Fensters zu

$$g(t) = \mathcal{F}^{-1}(\underline{H}(f) \underline{W}(f)) = h(t) * w(t). \quad (\text{C.21})$$

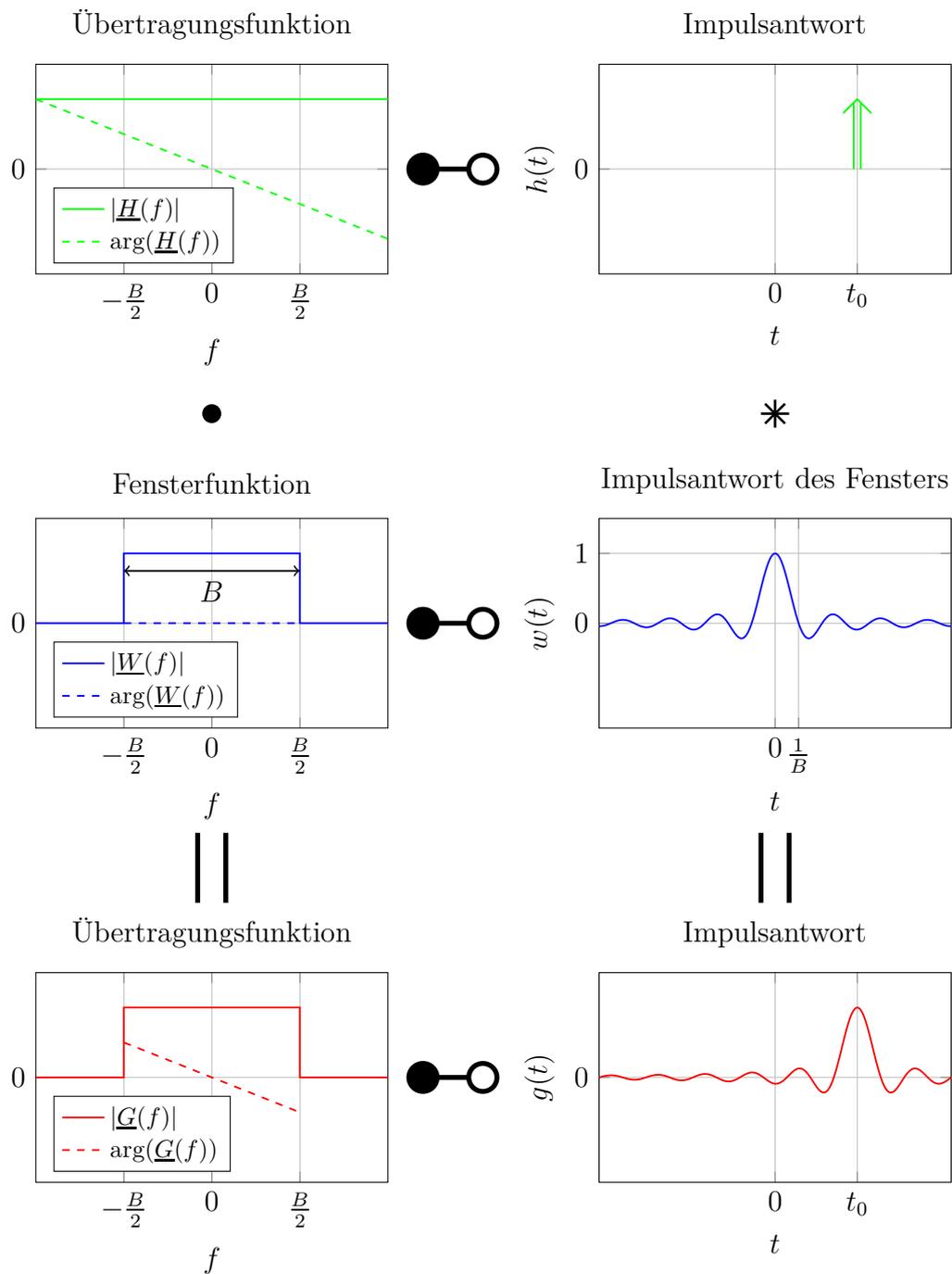


Abbildung C.2.: Bandbegrenzung am Beispiel der Übertragungsfunktion  $\underline{G}(f)$  und der Impulsantwort  $g(t)$  einer Leitung

Die Impulsantwort des Rechteckfensters  $\underline{W}(f)$  ergibt sich mit der inversen Fourier-Transformation (C.1) zu<sup>5</sup>

$$\begin{aligned}
 w(t) = \mathcal{F}^{-1}(\underline{W}(f)) &= \int_{-\infty}^{\infty} \underline{W}(f) e^{j2\pi ft} df \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{B} \operatorname{rect}\left(\frac{f}{B}\right) e^{j2\pi ft} df \\
 &= \int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} \frac{1}{B} e^{j2\pi ft} df \\
 &= \int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} \frac{1}{B} \cos(2\pi ft) df \\
 &= \left[ \frac{1}{B} \frac{\sin(2\pi ft)}{2\pi t} \right]_{f=-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} \\
 &= \frac{\sin(\pi Bt)}{\pi Bt} \\
 &= \operatorname{si}(\pi Bt).
 \end{aligned} \tag{C.22}$$

Diese unter dem Namen Spaltfunktion bekannte Impulsantwort  $w(t)$  hat große Nebenmaxima, was in manchen Anwendungen störend ist. Man verwendet dann andere optimierte Fensterfunktionen  $\underline{W}(f)$  [KK12; OS10; SM05].

Die Fensterfunktion  $\underline{W}(f)$ , siehe (C.20), wurde so normiert, dass das Maximum der Impulsantwort  $w(t)$  des Fensters eins ist:

$$1 = w(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \underline{W}(f) df. \tag{C.23}$$

Falls die Impulsantwort  $h(t)$  aus einem einzigen Dirac-Impuls besteht, kann man das Gewicht des Dirac-Impulses bei derartiger Normierung der Fensterfunktion  $\underline{W}(f)$  direkt am Maximalwert der Impulsantwort  $g(t)$  ablesen.

### C.1.5. Tiefpassmodus

Messungen der Übertragungsfunktion  $\underline{H}(f)$  erfolgen typischerweise beginnend bei einer Startfrequenz  $f_{\text{Start}}$  bis zu einer Stopffrequenz  $f_{\text{Stop}}$ , das heißt mit einer Mit-

<sup>5</sup>Es wird die Eulersche Formel  $e^{j\alpha} = \cos(\alpha) + j \sin(\alpha)$  verwendet.

tenfrequenz

$$f_0 = \frac{f_{\text{Stop}} + f_{\text{Start}}}{2}$$

und einer Bandbreite

$$B = f_{\text{Stop}} - f_{\text{Start}}.$$

Bei bekannter Übertragungsfunktion  $\underline{H}(f)$  bei positiven Frequenzen  $f$  kann die Übertragungsfunktion  $\underline{H}(-f)$  bei negativen Frequenzen  $-f$  wegen der Symmetrie der Übertragungsfunktion  $\underline{H}(f)$  bei reellen Impulsantworten  $h(t)$  gemäß (C.14) durch konjugiert komplexe Spiegelung leicht ergänzt werden:

$$\underline{H}(f) = \begin{cases} \underline{H}(f) & f > 0 \\ \underline{H}^*(-f) & f < 0 \end{cases}. \quad (\text{C.24})$$

Es bleibt die Bandbegrenzung auf  $f_{\text{Start}} < |f| < f_{\text{Stop}}$ . Diese in einer Bandpassübertragungsfunktion  $\underline{G}_{\text{BP}}(f)$  resultierende Vorgehensweise wird als Tiefpassmodus bezeichnet.

Die Bandpassübertragungsfunktion

$$\underline{G}_{\text{BP}}(f) = \underline{H}(f) \underline{W}_{\text{BP}}(f) \quad (\text{C.25})$$

kann man sich als durch Verwenden einer speziellen Fensterfunktion

$$\underline{W}_{\text{BP}}(f) = \frac{1}{2} \underbrace{\frac{1}{B} \text{rect}\left(\frac{-f - f_0}{B}\right)}_{\underline{W}^*(-f - f_0)} + \frac{1}{2} \underbrace{\frac{1}{B} \text{rect}\left(\frac{f - f_0}{B}\right)}_{\underline{W}(f - f_0)} \quad (\text{C.26})$$

entstanden denken, siehe (C.20) und Abbildung C.3. Auch diese Fensterfunktion  $\underline{W}_{\text{BP}}(f)$  ist entsprechend (C.23) normiert.

Mit Proportionalitätsprinzip (C.4), Superpositionsprinzip (C.5), (C.13), dem Modulationssatz (C.15) und (C.22) die Impulsantwort<sup>6</sup>

$$\begin{aligned} w_{\text{BP}}(t) &= \mathcal{F}^{-1}(\underline{W}_{\text{BP}}(f)) \\ &= \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{2}\underline{W}^*(-f - f_0) + \frac{1}{2}\underline{W}(f - f_0)\right) \\ &= \frac{1}{2}w^*(t) e^{-j2\pi f_0 t} + \frac{1}{2}w(t) e^{j2\pi f_0 t} \\ &= \text{si}(\pi B t) \cos(2\pi f_0 t) \end{aligned} \quad (\text{C.27})$$

des Fensters. Insbesondere bei im Vergleich zur Bandbreite  $B$  großer Mittenfrequenz  $f_0$  ergibt sich eine stark oszillierende Impulsantwort  $w_{\text{BP}}(t)$  des Fensters, siehe Abbildung C.3. Die gepunktet gezeichnete Hüllkurve der Impulsantwort  $w_{\text{BP}}(t)$  des Fensters entspricht der Impulsantwort  $w(t)$  des Rechteckfensters gemäß (C.22).

---

<sup>6</sup>Es wird die Eulersche Formel  $e^{j\alpha} = \cos(\alpha) + j \sin(\alpha)$  verwendet.

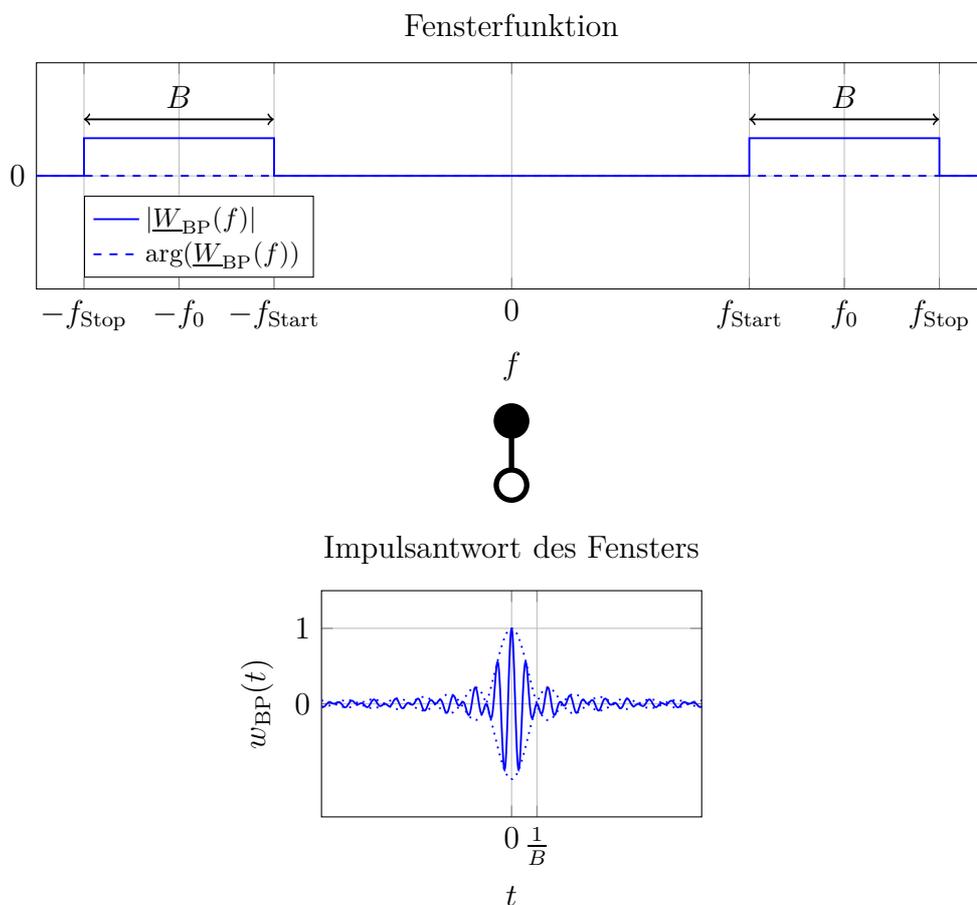


Abbildung C.3.: Fensterfunktion  $\underline{G}_{\text{BP}}(f)$  und Impulsantwort  $w_{\text{BP}}(t)$  des Fensters im Tiefpassmodus am Beispiel  $f_0 = 1,75B$

### C.1.6. Bandpassmodus

Beim Bandpassmodus verschiebt man die im Frequenzbereich  $f_{\text{Start}} < f < f_{\text{Stop}}$  mit einer Mittenfrequenz  $f_0$  gemessene Übertragungsfunktion  $\underline{H}(f)$  um  $f_0$  zu kleineren Frequenzen  $f$  hin, ohne den konjugiert komplex gespiegelten Anteil der Übertragungsfunktion  $\underline{H}(f)$  bei negativen Frequenzen  $f$  zu verwenden. Unter Berücksichtigen der Fensterfunktion  $\underline{W}(f)$  gemäß (C.20) erhält man die auf  $-B/2 < f < B/2$  bandbegrenzte Tiefpassübertragungsfunktion

$$\underline{G}_{\text{TP}}(f) = \underline{H}(f + f_0) \underline{W}(f). \quad (\text{C.28})$$

Diese Tiefpassübertragungsfunktion  $\underline{G}_{\text{TP}}(f)$  erfüllt im Allgemeinen nicht die Symmetrieeigenschaften gemäß (C.14). Die aus der Tiefpassübertragungsfunktion  $\underline{G}_{\text{TP}}(f)$

durch inverse Fourier-Transformation (C.1) berechnete Tiefpassimpulsantwort

$$\underline{g}_{\text{TP}}(t) = \mathcal{F}^{-1}(\underline{G}_{\text{TP}}(f)) = \int_{-\infty}^{\infty} \underline{G}_{\text{TP}}(f) e^{j2\pi ft} df \quad (\text{C.29})$$

ist daher im Allgemeinen komplex.

Mit (C.24), (C.25) und (C.26) ergibt sich die Bandpassübertragungsfunktion als Funktion der Tiefpassübertragungsfunktion zu

$$\underline{G}_{\text{BP}}(f) = \frac{1}{2} \underline{G}_{\text{TP}}^*(-f - f_0) + \frac{1}{2} \underline{G}_{\text{TP}}(f - f_0).$$

Durch inverse Fourier-Transformation (C.1) erhält man mit Proportionalitätsprinzip (C.4), Superpositionsprinzip (C.5), (C.13) und (C.15) die reelle Bandpassimpulsantwort<sup>7</sup>

$$\begin{aligned} g_{\text{BP}}(t) &= \mathcal{F}^{-1}(\underline{G}_{\text{BP}}(f)) \\ &= \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{2} \underline{G}_{\text{TP}}^*(-f - f_0) + \frac{1}{2} \underline{G}_{\text{TP}}(f - f_0)\right) \\ &= \frac{1}{2} g_{\text{TP}}^*(t) e^{-j2\pi f_0 t} + \frac{1}{2} g_{\text{TP}}(t) e^{j2\pi f_0 t} \\ &= \text{Re}\left(\underline{g}_{\text{TP}}(t) e^{j2\pi f_0 t}\right). \end{aligned} \quad (\text{C.30})$$

Das Verschieben um  $f_0$  im Frequenzbereich entspricht der Multiplikation mit  $e^{j2\pi f_0 t}$  im Zeitbereich und das Ergänzen des konjugiert komplex gespiegelten Anteils der Übertragungsfunktion  $\underline{G}_{\text{BP}}(f)$  bei negativen Frequenzen  $f$  im Frequenzbereich entspricht dem Bilden des Realteils im Zeitbereich. Die komplexe Tiefpassimpulsantwort  $\underline{g}_{\text{TP}}(t)$  und die reelle Bandpassimpulsantwort  $g_{\text{BP}}(t)$ , siehe Abbildung C.4, sind über die Tiefpass-Bandpass-Transformation miteinander verknüpft, vergleiche (B.40).

## C.1.7. Abtastung

### C.1.7.1. Abtastung im Frequenzbereich

In der Praxis wird man die Messung der Übertragungsfunktion  $\underline{G}(f)$  nur bei einigen diskreten Frequenzen  $f$  durchführen können, das heißt die Übertragungsfunktion  $\underline{G}(f)$  wird im Frequenzbereich abgetastet. Mit der Dirac-Impulsfolge<sup>8</sup>

$$\text{III}\left(\frac{f}{F}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\frac{f}{F} - n\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F \delta(f - nF) \quad (\text{C.31})$$

<sup>7</sup>Der Realteil einer komplexen Größe berechnet sich zu  $\text{Re}(\underline{x}) = \frac{1}{2}(\underline{x} + \underline{x}^*)$ .

<sup>8</sup>Für den Dirac-Impuls gilt mit (C.6) und (C.10)  $\delta(Ff) = \frac{1}{|F|} \delta(f)$ .

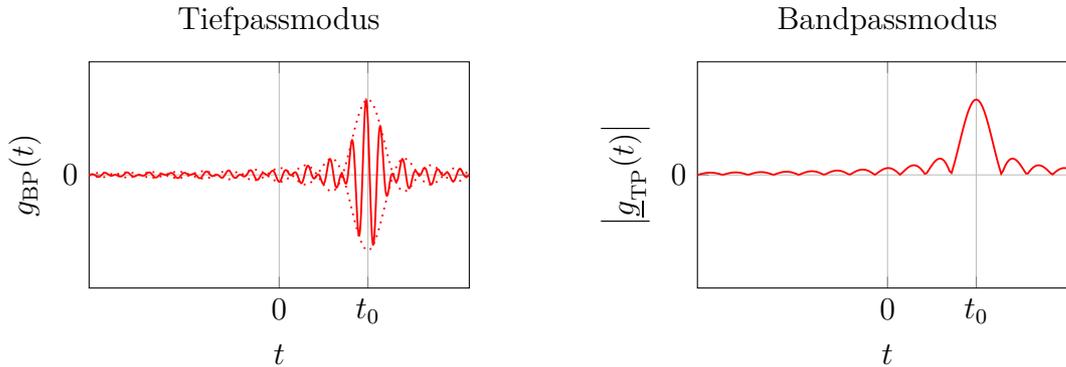


Abbildung C.4.: Vergleich von Tiefpassmodus und Bandpassmodus am Beispiel der Impulsantworten einer Leitung.  $f_0 = 1,75B$

erhält man die äquidistant mit der Abtastperiode  $F$  abgetastete Übertragungsfunktion

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \underline{G}(nF) F \delta(f - nF) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underline{G}(nF) \delta\left(\frac{f}{F} - n\right) = \underline{G}(f) \text{III}\left(\frac{f}{F}\right). \quad (\text{C.32})$$

### C.1.7.2. Dirac-Impulsfolge

Mit dem Superpositionsprinzip (C.5) und der Ausblendeigenschaft des Dirac-Impulses ergibt sich die inverse Fourier-Transformierte (C.1) der Dirac-Impulsfolge (C.31) zu

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}\left(\text{III}\left(\frac{f}{F}\right)\right) &= \mathcal{F}^{-1}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} F \delta(f - nF)\right) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F \delta(f - nF) e^{j2\pi ft} df \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} F e^{jnFt}. \end{aligned}$$

Diese Funktion ist offensichtlich periodisch mit der Periode  $1/F$ . Mit (C.2), dem Faltungstheorem (C.11) und (C.22) gilt weiterhin

$$\begin{aligned}\delta(t) &= \mathcal{F}^{-1}(1) = \mathcal{F}^{-1}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{rect}\left(\frac{f - nF}{F}\right)\right) \\ &= \mathcal{F}^{-1}\left(\operatorname{rect}\left(\frac{f}{F}\right) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - nF)\right) \\ &= \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{F} \operatorname{rect}\left(\frac{f}{F}\right) * \operatorname{III}\left(\frac{f}{F}\right)\right) \\ &= \operatorname{si}(\pi Ft) \mathcal{F}^{-1}\left(\operatorname{III}\left(\frac{f}{F}\right)\right).\end{aligned}$$

Für die inverse Fourier-Transformierte der Dirac-Impulsfolge gilt daher

$$\mathcal{F}^{-1}\left(\operatorname{III}\left(\frac{f}{F}\right)\right) = \begin{cases} \delta(t) & t = 0 \\ ? & t = \pm\frac{1}{F}, \pm\frac{2}{F}, \dots \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Zusammen mit der  $1/F$ -Periodizität der inversen Fourier-Transformierten der Dirac-Impulsfolge erhält man<sup>9</sup>

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}\left(\operatorname{III}\left(\frac{f}{F}\right)\right) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(t - \frac{n}{F}\right) \\ &= F \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(Ft - n) = F \operatorname{III}(Ft),\end{aligned}\tag{C.33}$$

das heißt die inverse Fourier-Transformierte der Dirac-Impulsfolge ist wieder eine Dirac-Impulsfolge.

### C.1.7.3. Periodizität im Zeitbereich

Entsprechend dem Faltungstheorem (C.12) entspricht die als Multiplikation mit der Dirac-Impulsfolge  $\operatorname{III}\left(\frac{f}{F}\right)$  beschriebene Abtastung im Frequenzbereich einer Faltung mit der Dirac-Impulsfolge  $F \operatorname{III}(Ft)$  im Zeitbereich:

$$g_p(t) = g(t) * (F \operatorname{III}(Ft)) = g(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(t - \frac{n}{F}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g\left(t - \frac{n}{F}\right).\tag{C.34}$$

---

<sup>9</sup>Für den Dirac-Impuls gilt mit (C.6) und (C.10)  $\delta(Ff) = \frac{1}{|F|} \delta(f)$ .

Bezüglich der Umformungen siehe auch (C.31). Die Faltung mit der Dirac-Impulsfolge  $F\text{III}(Ft)$  im Zeitbereich entspricht einer periodischen Wiederholung mit der Periodendauer

$$D = \frac{1}{F}. \quad (\text{C.35})$$

Falls die Impulsantwort  $g(t)$  auf das Intervall  $-D/2 < t < D/2$  zeitbegrenzt wäre, das heißt falls das Abtasttheorem erfüllt wäre, wäre eine perfekte Rekonstruktion der Impulsantwort  $g(t)$  durch Multiplikation mit einem Rechteckfenster möglich:

$$g(t) = g_p(t) \text{rect}\left(\frac{t}{D}\right) = g_p(t) \text{rect}(Ft). \quad (\text{C.36})$$

Da die Übertragungsfunktion  $\underline{G}(f)$  bandbegrenzt ist, kann die Impulsantwort  $g(t)$  allerdings nur näherungsweise zeitbegrenzt sein, so dass bei geschickter Parametrisierung bestenfalls eine näherungsweise Rekonstruktion möglich ist.

#### C.1.7.4. Fourier-Reihe

Die Impulsantwort berechnet sich durch inverse Fourier-Transformation (C.1) aus den Abtastwerten der Übertragungsfunktion  $\underline{G}(f)$  gemäß (C.32) unter Verwenden der Ausblendeigenschaft des Dirac-Impulses zu

$$\begin{aligned} g_p(t) &= \mathcal{F}^{-1}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \underline{G}(nF) F \delta(f - nF)\right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underline{G}(nF) F \delta(f - nF) e^{j2\pi ft} df \\ &= F \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underline{G}(nF) e^{j2\pi nFt}. \end{aligned} \quad (\text{C.37})$$

Dies ist eine Fourier-Reihe.

Die Übertragungsfunktion  $\underline{G}(f)$  ist aufgrund des Anwendens der Fensterfunktion  $\underline{W}(f)$  bandbegrenzt. Im Folgenden wird vereinfachend nur der Fall einer ungeraden Anzahl

$$M = 2N + 1 \quad (\text{C.38})$$

an nichtverschwindenden Abtastwerten

$$\underline{G}_n = \underline{G}(nF), \quad n = -N \dots + N, \quad (\text{C.39})$$

weiter betrachtet. Es ergibt sich die Impulsantwort

$$g_p(t) = F \sum_{n=-N}^N \underline{G}_n e^{j2\pi nFt}. \quad (\text{C.40})$$

Mit (C.21) und (C.34) ergibt sich die Impulsantwort zu

$$g_p(t) = h(t) * w(t) * (F\text{III}(Ft)).$$

Mit dem Faltungstheorem (C.12) und (C.33) gilt

$$w(t) * (F\text{III}(Ft)) = \mathcal{F}^{-1}(\underline{W}(f) \mathcal{F}(F\text{III}(Ft))) = \mathcal{F}^{-1}\left(\underline{W}(f) \text{III}\left(\frac{f}{F}\right)\right).$$

Falls ein Rechteckfenster (C.20) verwendet wird, folgt mit

$$B = MF, \tag{C.41}$$

(C.31), der inversen Fourier-Transformation (C.1) und der Ausblendeigenschaft des Dirac-Impulses<sup>1011</sup>

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}\left(\underline{W}(f) \text{III}\left(\frac{f}{F}\right)\right) &= \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{B} \text{rect}\left(\frac{f}{B}\right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} F \delta(f - nF)\right) \\ &= \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{B} \sum_{n=-N}^N F \delta(f - nF)\right) \\ &= \frac{1}{M} \sum_{n=-N}^N \mathcal{F}^{-1}(\delta(f - nF)) \\ &= \frac{1}{M} \sum_{n=-N}^N \int_{-\infty}^{\infty} \delta(f - nF) e^{j2\pi ft} df \\ &= \frac{1}{M} \sum_{n=-N}^N e^{j2\pi nFt} \\ &= \frac{1}{M} e^{-j2\pi NFt} \sum_{n=0}^{2N=M-1} e^{j2\pi nFt} \\ &= \frac{1}{M} e^{-j2\pi NFt} \frac{1 - e^{j2\pi MFt}}{1 - e^{j2\pi Ft}} \\ &= \frac{1}{M} \frac{e^{-j\pi MFt} - e^{j\pi MFt}}{e^{-j\pi Ft} - e^{j\pi Ft}} \\ &= \frac{\sin(\pi MFt)}{M \sin(\pi Ft)} = \text{di}_M(2\pi Ft). \end{aligned} \tag{C.42}$$

Das heißt die Bandbegrenzung und die Abtastung zusammen bewirken eine Faltung der Impulsantwort  $h(t)$  mit dem Dirichlet-Kern  $\text{di}_M(2\pi Ft)$ .

---

<sup>10</sup>Die Summenformel der geometrischen Reihe lautet  $\sum_{m=0}^{M-1} q^m = \frac{1-q^M}{1-q}$ .

<sup>11</sup>Es wird die Eulersche Formel  $e^{j\alpha} = \cos(\alpha) + j \sin(\alpha)$  verwendet.

### C.1.7.5. Diskrete Fourier-Transformation

Für die Abtastwerte der mit der Abtastperiode

$$T = \frac{D}{M} = \frac{1}{MF} \quad (\text{C.43})$$

abgetasteten Impulsantwort  $g_p(t)$  folgt aus (C.40)

$$g_{p,m} = g_p(mT) = \frac{1}{MT} \sum_{n=-N}^N \underline{G}_n e^{j2\pi \frac{mn}{M}}, \quad m = -N \dots + N. \quad (\text{C.44})$$

Dies ist eine inverse diskrete Fourier-Transformation, siehe Abbildung C.5.<sup>12</sup> Eine Periode der Impulsantwort  $g_p(t)$  enthält  $M$  Abtastwerte.

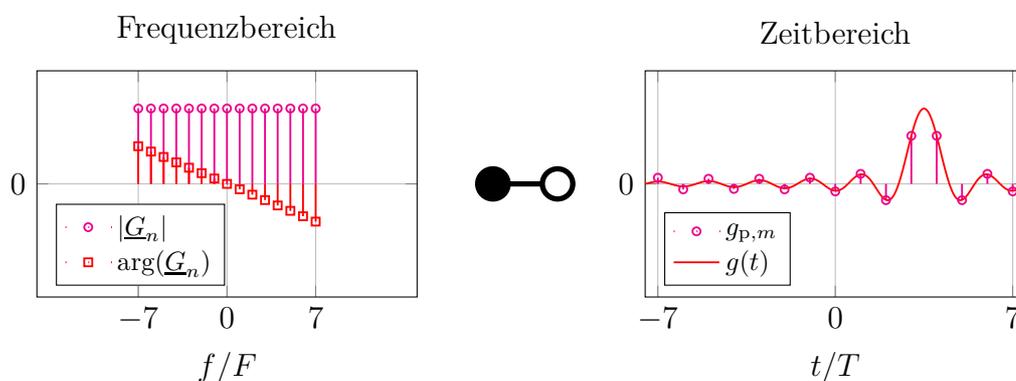


Abbildung C.5.: Abtastung im Frequenzbereich und im Zeitbereich. Die am linken Bildrand deutlich sichtbare Abweichung der Abtastwerte  $g_{p,m}$  von der Impulsantwort  $g(t)$  resultiert aus der periodischen Wiederholung

Mit der schnellen Fourier-Transformation existiert ein aufwandsgünstiger Algorithmus zum Berechnen der inversen diskreten Fourier-Transformation [CT65; PTVF07; SK11]. Die üblichen Implementierungen der inversen diskreten Fourier-Transformation erwarten abweichend, dass der erste Abtastwert der zur Frequenz  $f = 0$  beziehungsweise der zum Zeitpunkt  $t = 0$  gehörende ist. Mit dem die Abtastwerte  $\underline{G}_n$  der Übertragungsfunktion  $\underline{G}(f)$  enthaltenden Vektor  $\mathbf{G}$  und der Abtastperiode  $T$  im Zeitbereich ergibt sich der Matlab-Code

<sup>12</sup>Bei der allgemein üblichen Definition der inversen diskreten Fourier-Transformation ist der Vorfaktor nicht  $\frac{1}{MT}$  sondern  $\frac{1}{M}$ . Bei Verwenden eines Rechteckfensters (C.20) kürzt sich der zusätzliche Vorfaktor  $1/T$  der inversen diskreten Fourier-Transformation mit dem Vorfaktor  $1/B = T$  der Fensterfunktion weg.

`gp = fftshift(ifft(ifftshift(G)))/T;`

zum Berechnen des Vektors  $gp$  mit den Abtastwerten  $g_{p,m}$  der Impulsantwort  $g_p(t)$ .<sup>13</sup>

Hinsichtlich der Parametrisierung gilt:

- Die Bandbreite  $B$  ist hinreichend groß zu wählen, so dass eine ausreichende zeitliche Auflösung  $T$  der Impulsantwort  $h(t)$  erzielt wird.
- Die Abtastperiode  $F$  im Frequenzbereich ist hinreichend klein zu wählen, so dass die Periodendauer  $D$  im Zeitbereich deutlich größer als die Dauer der Impulsantwort  $h(t)$  ist.
- Bei Kombination der Abtastung mit dem Tiefpassmodus ist besonders darauf zu achten, dass die Übertragungsfunktion  $\underline{H}(f)$  bei ganzzahligen Vielfachen der Abtastperiode  $F$  abgetastet wird. Insbesondere muss die Startfrequenz  $f_{\text{start}}$  ein ganzzahliges Vielfaches der Abtastperiode  $F$  sein.

Anwenden der diskreten Fourier-Transformation auf die Abtastwerte  $g_{p,m}$ ,  $m = -N \dots +N$ , der Impulsantwort  $g_p(t)$  ergibt unter Ausnutzen der Periodizität der komplexen Exponentialfunktion<sup>1415</sup>

$$\begin{aligned}
 T \sum_{m=-N}^N g_{p,m} e^{-j2\pi \frac{mn}{M}} &= T \sum_{m=-N}^N \frac{1}{MT} \sum_{l=-N}^N \underline{G}_l e^{j2\pi \frac{ml}{M}} e^{-j2\pi \frac{mn}{M}} \\
 &= \frac{1}{M} \sum_{l=-N}^N \underline{G}_l \sum_{m=n}^{M-1} e^{j2\pi m \frac{l-n}{M}} \\
 &= \frac{1}{M} \sum_{l=-N}^N \underline{G}_l \begin{cases} M & l = n \\ \frac{1 - e^{j2\pi m(l-n)}}{1 - e^{j2\pi m \frac{l-n}{M}}} = 0 & l \neq n \end{cases} \\
 &= \underline{G}_n.
 \end{aligned} \tag{C.45}$$

Die diskrete Fourier-Transformation ist die exakte Umkehrtransformation der inversen diskreten Fourier-Transformation. Die  $M$  Abtastwerte  $g_{p,m}$ ,  $m = -N \dots +$

---

<sup>13</sup>Der angegebene Matlab-Code berücksichtigt neben dem Fall der ungeraden Anzahl  $M = 2N + 1$  an Abtastwerten auch den Fall der geraden Anzahl  $M = 2N$  an Abtastwerten. In beiden Fällen gibt es einen Abtastwert der Übertragungsfunktion  $\underline{G}(f)$  exakt bei der Frequenz  $f = 0$ . Per Konvention gibt es dann bei einer geraden Anzahl an Abtastwerten einen zusätzlichen Abtastwert der Übertragungsfunktion  $\underline{G}(f)$  bei negativen Frequenzen  $f$ .

<sup>14</sup>Bei der allgemein üblichen Definition der diskreten Fourier-Transformation fehlt der Vorfaktor  $T$ .

<sup>15</sup>Die Summenformel der geometrischen Reihe lautet  $\sum_{m=0}^{M-1} q^m = \frac{1-q^M}{1-q}$ .

$N$ , der Impulsantwort  $g_p(t)$  im Zeitbereich enthalten exakt die selbe Information wie die  $M$  Abtastwerte  $\underline{G}_n$ ,  $n = -N \dots + N$ , der Übertragungsfunktion  $\underline{G}(f)$  im Frequenzbereich.

### C.1.8. Überabtastung im Zeitbereich

Zur besseren graphischen Darstellung der Impulsantwort  $g_p(t)$  möchte man die Verläufe zwischen den Abtastwerten  $g_{p,m}$ ,  $m = -N \dots + N$ , der Impulsantwort  $g_p(t)$  mit der Abtastperiode  $T$  interpolieren, das heißt man möchte viele Zwischenwerte bestimmen. Das Resultat ist eine Überabtastung um einen ganzzahligen, vereinfachend wieder ungeraden Faktor  $M_z/M$  im Zeitbereich. Die Abtastperiode im Zeitbereich ist dann

$$T_z = \frac{M}{M_z} T = \frac{D}{M_z} = \frac{1}{M_z F}, \quad (\text{C.46})$$

vergleiche (C.43).

Das korrekte Interpolationsverfahren zum Berechnen der

$$M_z = 2N_z + 1 \quad (\text{C.47})$$

Abtastwerte

$$g_{p,m} = g_p(mT_z), \quad m = -N_z \dots + N_z, \quad (\text{C.48})$$

der Impulsantwort  $g_p(t)$  resultiert aus dem Auswerten der Fourier-Reihe (C.40):

$$g_{p,m} = g_p(mT_z) = \frac{1}{MT} \sum_{n=-N}^N \underline{G}_n e^{j2\pi \frac{mn}{M_z}} = \frac{1}{M_z T_z} \sum_{n=-N_z}^{N_z} \underline{G}_n e^{j2\pi \frac{mn}{M_z}}. \quad (\text{C.49})$$

Dies ist wieder eine inverse diskrete Fourier-Transformation. Im Vergleich zu (C.44) wurden jetzt  $M_z$  statt  $M$  Abtastwerte berechnet. Das Reduzieren der Abtastperiode  $T_z$  im Zeitbereich entspricht einem Erhöhen der Bandbreite im Frequenzbereich, wobei allerdings die zusätzlichen berücksichtigten Abtastwerte  $\underline{G}_n$  der Übertragungsfunktion  $\underline{G}(f)$  außerhalb des Fensters liegen, das heißt alle Null sind und somit keine zusätzliche Information verwendet wurde. Man spricht auch von Zero-Padding, siehe Abbildung C.6. Die mit der Periodendauer  $D$  im Zeitbereich verknüpfte Abtastperiode  $F$  im Frequenzbereich bleibt unverändert.

Mit dem die  $M$  Abtastwerte  $\underline{G}_n$  der Übertragungsfunktion  $\underline{G}(f)$  enthaltenden Vektor  $\mathbf{G}$ , der Anzahl  $N$  der Abtastwerte  $\underline{G}_n$  der Übertragungsfunktion  $\underline{G}(f)$  bei negativen Frequenzen  $f < 0$  und der Abtastperiode  $T_z$  im Zeitbereich bei Überabtastung ergibt sich der Matlab-Code

```
gp = fftshift(iffshift([G(N+1:M); zeros(Mz-M); G(1:N)]))/Tz;
```

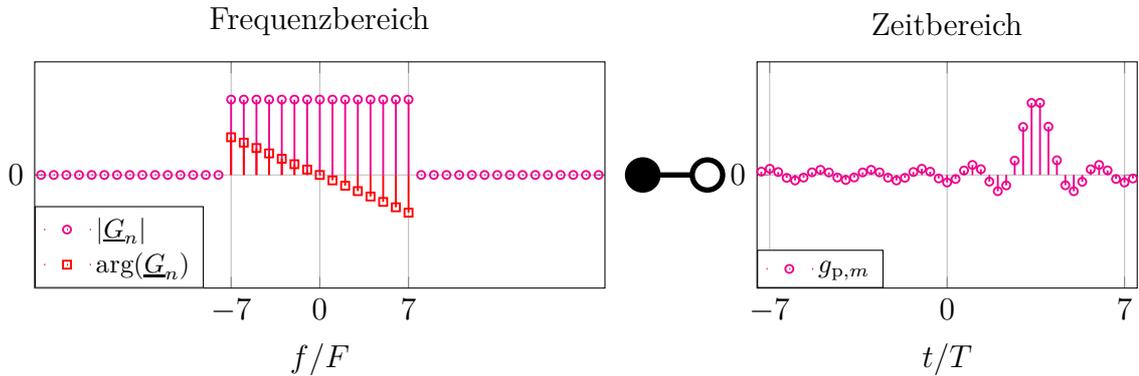


Abbildung C.6.: Zero Padding im Frequenzbereich und Überabtastung im Zeitbereich. Dreifache Überabtastung  $M_z/M = 3$ .  $M = 15$

zum Berechnen des Vektors  $\mathbf{g}_p$  mit den  $M_z$  Abtastwerten  $g_{p,m}$  der überabgetasteten Impulsantwort  $g_p(t)$ .<sup>16</sup>

Wollte man ausgehend von den  $M$  Abtastwerten  $g_{p,m}$ ,  $m = -N \dots + N$ , der Impulsantwort  $g_p(t)$  die Zwischenwerte durch Interpolation bestimmen, müsste man zunächst mit einer diskreten Fourier-Transformation (C.45) die Abtastwerte  $\underline{G}_n$ ,  $n = -N \dots + N$ , der Übertragungsfunktion  $\underline{G}(f)$  berechnen.

## C.2. Spektralanalyse

### C.2.1. Spektralanalyse deterministischer Signale

Die Spektralanalyse deterministischer Signale ist dual zur Zeitbereichsanalyse, siehe Anhang C.1. Die Gleichungen folgen mit der Dualität der Fourier-Transformation (C.9) auf einfache Weise aus den entsprechenden Gleichungen der Zeitbereichsanalyse und werden daher im Folgenden nicht nochmals hergeleitet.

Ziel der Spektralanalyse ist das Bestimmen des Spektrums

$$\underline{X}(f) = \mathcal{F}(x(t)) \quad (\text{C.50})$$

eines Signals  $x(t)$  mit im Allgemeinen unbegrenzter Dauer. Der endlichen zur Verfügung stehenden Messdauer  $D$  entspricht die Multiplikation

$$y(t) = x(t) w(t) \quad (\text{C.51})$$

<sup>16</sup>Der angegebene Matlab-Code berücksichtigt beliebige ganzzahlige Faktoren  $M_z/M$  der Überabtastung und neben dem Fall der ungeraden Anzahl  $M = 2N + 1$  an Abtastwerten auch den Fall der geraden Anzahl  $M = 2N$  an Abtastwerten.

mit einer Fensterfunktion  $w(t)$  im Zeitbereich. Im Frequenzbereich entspricht dies einer Faltung

$$\underline{Y}(f) = \underline{X}(f) * \underline{W}(f) \quad (\text{C.52})$$

mit

$$\underline{W}(f) = \mathcal{F}(w(t)). \quad (\text{C.53})$$

Die Fensterfunktion sei auch hier wieder gemäß

$$\underline{W}(0) = 1 \quad (\text{C.54})$$

normiert.

Der Abtastung

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} y(nT) T \delta(t - nT) = y(t) \text{III}\left(\frac{t}{T}\right) \quad (\text{C.55})$$

des Signals  $y(t)$  mit der Abtastperiode  $T$  entspricht eine periodische Wiederholung des Spektrums  $\underline{Y}(f)$  mit der Periode

$$B = \frac{1}{T}. \quad (\text{C.56})$$

Falls das Spektrum  $\underline{Y}(f)$  auf  $-B/2 < f < B/2$  bandbegrenzt wäre, würden sich die periodischen Wiederholungen nicht überlappen und das Abtasttheorem wäre erfüllt. Da das Signal  $y(t)$  zeitbegrenzt ist, kann das Spektrum  $\underline{Y}(f)$  allerdings nur näherungsweise bandbegrenzt sein, so dass bei geschickter Parametrisierung bestenfalls eine näherungsweise Rekonstruktion möglich ist. Im Folgenden sei die Anzahl

$$M = 2N + 1 \quad (\text{C.57})$$

der nichtverschwindenden Abtastwerte

$$y_n = y(nT), \quad n = -N \dots + N, \quad (\text{C.58})$$

vereinfachend wieder ungerade.

Anwenden der Fensterfunktion und Abtasten im Zeitbereich zusammen entsprechen bei Verwenden eines Rechteckfensters

$$w(t) = \frac{1}{D} \text{rect}\left(\frac{t}{D}\right) \quad (\text{C.59})$$

der Dauer

$$D = MT \quad (\text{C.60})$$

einer Faltung

$$\underline{Y}_p(f) = \underline{X}(f) * \text{di}_M(2\pi fT) \quad (\text{C.61})$$

mit dem Dirichlet-Kern

$$\text{di}_M(2\pi fT) = \frac{\sin(\pi fMT)}{M \sin(\pi fT)} \quad (\text{C.62})$$

im Frequenzbereich.

Die gesamte Information ist in den  $M$  mit einer Abtastperiode

$$F = \frac{B}{M} = \frac{1}{MT} \quad (\text{C.63})$$

gewonnenen Abtastwerten

$$\underline{Y}_{p,m} = \underline{Y}_p(mF), \quad m = -N \dots + N, \quad (\text{C.64})$$

des Spektrums  $\underline{Y}_p(f)$  enthalten. Die Abtastperiode  $F$  wird auch als Auflösesebandbreite (Resolution Bandwidth, RBW) bezeichnet. Die Messdauer  $D$  ist umgekehrt proportional zur Auflösesebandbreite  $F$ .

Als Beispiel soll ein sinusförmiges Signal

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \varphi) \quad (\text{C.65})$$

betrachtet werden. Das Spektrum dieses Signals  $x(t)$  ergibt sich mit Proportionalitätsprinzip (C.4), Superpositionsprinzip (C.5) und (C.15) zu<sup>17</sup>

$$\begin{aligned} \underline{X}(f) &= \mathcal{F}(A \cos(2\pi f_0 t + \varphi)) = \mathcal{F}\left(\frac{A}{2} e^{-j(2\pi f_0 t + \varphi)} + \frac{A}{2} e^{j(2\pi f_0 t + \varphi)}\right) \\ &= \mathcal{F}\left(\frac{A}{2} e^{-j2\pi f_0 t} e^{-j\varphi} + \frac{A}{2} e^{j2\pi f_0 t} e^{j\varphi}\right) \\ &= \frac{A}{2} e^{-j\varphi} \delta(f + f_0) + \frac{A}{2} e^{j\varphi} \delta(f - f_0). \end{aligned} \quad (\text{C.66})$$

Mit der Ausblendeigenschaft des Dirac-Impulses folgt das Spektrum

$$\begin{aligned} \underline{Y}_p(f) &= \left(\frac{A}{2} e^{-j\varphi} \delta(f + f_0) + \frac{A}{2} e^{j\varphi} \delta(f - f_0)\right) * \text{di}_M(2\pi fT) \\ &= \frac{A}{2} e^{-j\varphi} \text{di}_M(2\pi (f + f_0) T) + \frac{A}{2} e^{j\varphi} \text{di}_M(2\pi (f - f_0) T) \end{aligned} \quad (\text{C.67})$$

des mit einem Rechteckfenster zeitbegrenzten abgetasteten Signals. In Abbildung C.7 sind die auch als Periodogramm bezeichneten Betragsquadrate  $|\underline{Y}_{p,m}|^2$ ,

---

<sup>17</sup>Es wird die Eulersche Formel  $e^{j\alpha} = \cos(\alpha) + j \sin(\alpha)$  verwendet.

$m = -N \dots + N$ , der mit der Abtastperiode  $F$  gewonnenen Abtastwerte  $\underline{Y}_{p,m}$ ,  $m = -N \dots + N$ , und die Betragsquadrate  $|\underline{Y}_p(f)|^2$  der durch Überabtastung berechneten Zwischenwerte  $\underline{Y}_p(f)$  dargestellt. Wegen  $F \ll f \ll B$  überlappen sich die Beiträge der beiden gegeneinander verschobenen Dirichlet-Kerne praktisch nicht, und man kann die Leistung des Signals  $x(t)$  direkt am Maximum des Betragsquadrates  $|\underline{Y}_p(f)|^2$  des Spektrums  $\underline{Y}_p(f)$  ablesen.

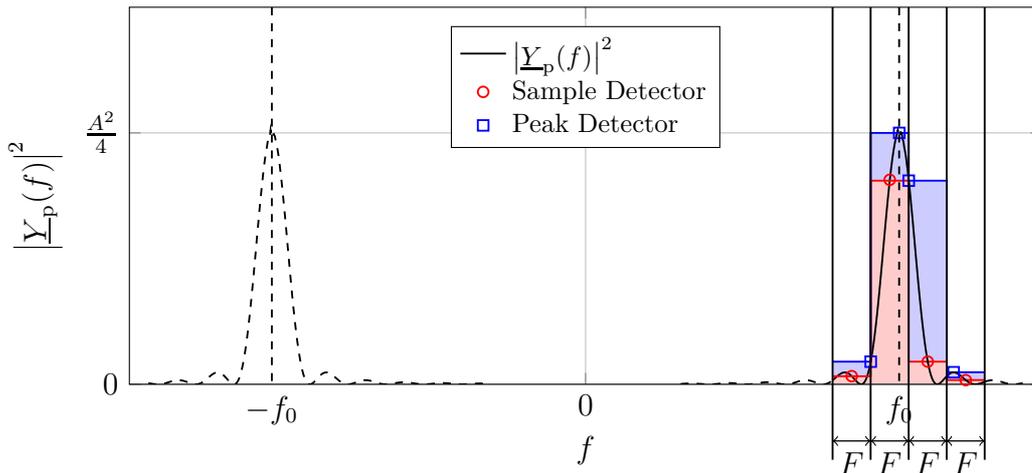


Abbildung C.7.: Spektralanalyse eines sinusförmigen Signals  $x(t)$ . Da das Betragsquadrat  $|\underline{Y}_p(f)|^2$  des Spektrums  $\underline{Y}_p(f)$  symmetrisch ist, wird üblicherweise nur der Anteil bei positiven Frequenzen  $f$  dargestellt

Ein praktisches Problem der Spektralanalyse besteht darin, dass man häufig eine große Bandbreite  $B$  mit einer kleinen Abtastperiode  $F$  abtastet, was eine sehr große Anzahl  $M$  an Abtastwerten  $|\underline{Y}_{p,m}|^2$ ,  $m = -N \dots + N$ , zur Folge hat. Es ist dann nicht mehr möglich, zusätzlich auch eine noch größere Anzahl an Zwischenwerten  $|\underline{Y}_p(f)|^2$  darzustellen. Man löst dieses Problem, indem man mit einem Detektor einen einzigen Repräsentanten je Abtastperiode  $m$  auswählt:

**Sample Detector:** Im einfachsten Fall ist dieser Repräsentant der Abtastwert  $|\underline{Y}_{p,m}|^2$  des Periodogramms. Diese mit einer vom Signal  $x(t)$  unabhängigen konstanten Abtastperiode  $F$  gewonnen Repräsentanten  $|\underline{Y}_{p,m}|^2$  eignen sich als Grundlage für eine weitere Signalverarbeitung, siehe zum Beispiel Anhang C.2.2.

**Peak Detector:** Wenn das Ziel jedoch das Bestimmen der Leistung eines sinusförmigen Signals  $x(t)$  ist, dessen Frequenz  $f_0$  in der Regel kein ganzzahli-

ges Vielfaches der Abtastperiode  $F$  ist, sollte man als Repräsentanten das Maximum  $\max_{(m-\frac{1}{2})F < f < (m+\frac{1}{2})F} \left\{ \left| \underline{Y}_p(f) \right|^2 \right\}$  des Betragsquadrates  $\left| \underline{Y}_p(f) \right|^2$  des Spektrums  $\underline{Y}_p(f)$  innerhalb der  $m$ -ten Abtastperiode wählen.

Übliche Spektralanalysatoren stellen die Repräsentanten des Spektrums  $\underline{Y}_p(f)$  logarithmisch dar und beschriften die Achse mit der Leistung, die ein entsprechendes sinusförmiges Signal  $x(t)$  hätte.

### C.2.2. Spektralanalyse stochastischer Signale

Es werden zufällige mittelwertfreie Signale  $x(t)$  betrachtet, aus denen durch Anwenden einer Fensterfunktion  $w(t)$  und Abtasten zufällige Abtastwerte  $y_n$  des Signals resultieren. Der  $m$ -te Abtastwert  $\underline{Y}_{p,m}$  des Spektrums  $\underline{Y}_p(f)$  ist eine, durch die diskrete Fourier-Transformation (C.45) beschriebene, lineare Funktion der Abtastwerte  $y_n$ . Durch Normieren der Varianz des mittelwertfreien Abtastwerts  $\underline{Y}_{p,m}$  des Spektrums  $\underline{Y}_p(f)$  auf die Rauschbandbreite  $R$  erhält man die Leistungsdichte

$$\frac{1}{R} \mathbb{E} \left\{ \left| \underline{Y}_{p,m} \right|^2 \right\} = \frac{1}{R} \mathbb{E} \left\{ \left| \underline{Y}_p(f = mF) \right|^2 \right\}. \quad (\text{C.68})$$

Falls die Überlappung der periodisch wiederholten Spektren infolge der Abtastung im Zeitbereich vernachlässigbar ist, folgt mit Faltungstheorem (C.12), (C.7), (C.13) und (C.51) die Näherung

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} \mathbb{E} \left\{ \left| \underline{Y}_p(f) \right|^2 \right\} &\approx \frac{1}{R} \mathbb{E} \left\{ \left| \underline{Y}(f) \right|^2 \right\} \\ &= \frac{1}{R} \mathbb{E} \left\{ \underline{Y}^*(f) \underline{Y}(f) \right\} \\ &= \frac{1}{R} \mathbb{E} \left\{ \mathcal{F} \left( y^*(-t) * y(t) \right) \right\} \\ &= \frac{1}{R} \mathbb{E} \left\{ \mathcal{F} \left( \int_{-\infty}^{\infty} y^*(\tau) y(\tau + t) d\tau \right) \right\} \\ &= \frac{1}{R} \mathbb{E} \left\{ \mathcal{F} \left( \int_{-\infty}^{\infty} x^*(\tau) w^*(\tau) x(\tau + t) w(\tau + t) d\tau \right) \right\} \\ &= \frac{1}{R} \mathcal{F} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{E} \left\{ x^*(\tau) x(\tau + t) \right\} w^*(\tau) w(\tau + t) d\tau \right). \end{aligned}$$

Die Autokorrelationsfunktion stationärer Signale  $x(t)$  ist von  $\tau$  unabhängig:

$$R_{xx}(t) = \mathbb{E} \left\{ x^*(\tau) x(\tau + t) \right\}. \quad (\text{C.69})$$

Mit den Faltungstheoremen (C.11), (C.12) dem Ähnlichkeitssatz (C.7), (C.13) und (C.53) folgt schließlich

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{R} \mathbb{E}\left\{\left|\underline{Y}_p(f)\right|^2\right\} &\approx \frac{1}{R} \mathcal{F}\left(\int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(t) w^*(\tau) w(\tau+t) d\tau\right) \\
 &= \frac{1}{R} \mathcal{F}\left(R_{xx}(t) \int_{-\infty}^{\infty} w^*(\tau) w(\tau+t) d\tau\right) \\
 &= \mathcal{F}(R_{xx}(t)) * \frac{\mathcal{F}(w^*(-t) * w(t))}{R} \\
 &= \mathcal{F}(R_{xx}(t)) * \frac{|\mathcal{F}(w(t))|^2}{R} = \underbrace{\mathcal{F}(R_{xx}(t))}_{S_{xx}(f)} * \frac{|\underline{W}(f)|^2}{R}.
 \end{aligned} \tag{C.70}$$

Das Leistungsdichtespektrum  $S_{xx}(f)$  ist reell und nichtnegativ.<sup>18</sup> Die Faltung mit  $|\underline{W}(f)|^2/R$  bewirkt eine Glättung des Leistungsdichtespektrums  $S_{xx}(f)$ . Die Frequenzauflösung ist aufgrund der endlichen Messdauer begrenzt. Die Leistungsdichte  $\mathbb{E}\left\{\left|\underline{Y}_{p,m}\right|^2\right\}/R$  entspricht näherungsweise dem Abtastwert  $S_{xx}(f = mF)$  des Leistungsdichtespektrums  $S_{xx}(f)$  von  $x(t)$ .

Aus der Forderung, dass ein konstantes Leistungsdichtespektrum  $S_{xx}(f)$  durch die Glättung unverändert bleiben muss, erhält man die Rauschbandbreite aus der gemäß (C.54) normierten Fensterfunktion zu

$$R = \int_{-\infty}^{\infty} |\underline{W}(f)|^2 df. \tag{C.71}$$

Beim Rechteckfenster (C.59) ist die Rauschbandbreite

$$R = \frac{1}{D}. \tag{C.72}$$

Wenn man die Messung  $K$ -mal wiederholt, stehen  $K$  Realisationen  $\underline{Y}_{p,m}^{(k)}$ ,  $k = 1 \dots K$ , der mittelwertfreien Zufallsvariablen  $\underline{Y}_{p,m}$  zum Schätzen der Leistungsdichte  $\mathbb{E}\left\{\left|\underline{Y}_{p,m}\right|^2\right\}/R$  zur Verfügung. Durch Mitteln (Averaging)  $\frac{1}{RK} \sum_{k=1}^K \left|\underline{Y}_{p,m}^{(k)}\right|^2$  über die Abtastwerte  $\left|\underline{Y}_{p,m}^{(k)}\right|^2$  der Periodogramme erhält man eine Schätzung der Leistungsdichte mit dem Erwartungswert [Kay93]

$$\mathbb{E}\left\{\frac{1}{RK} \sum_{k=1}^K \left|\underline{Y}_{p,m}^{(k)}\right|^2\right\} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \frac{1}{R} \mathbb{E}\left\{\left|\underline{Y}_{p,m}^{(k)}\right|^2\right\} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \frac{1}{R} \mathbb{E}\left\{\left|\underline{Y}_{p,m}\right|^2\right\} = \frac{1}{R} \mathbb{E}\left\{\left|\underline{Y}_{p,m}\right|^2\right\}.$$

<sup>18</sup>Man erkennt dies daran, dass (C.70) auch für konstante Fensterfunktionen  $w(t) = 1$  gilt.

Wegen der Glättung handelt es sich hierbei um eine nicht erwartungstreue Schätzung des Leistungsdichtespektrums  $S_{xx}(f)$  von  $x(t)$ . Diese Vorgehensweise ist auch als Bartlett-Methode bekannt [Bar48; KK12].

### C.3. Fourier-Korrespondenzen

Als weiteres Ergebnis der Herleitungen in diesem Kapitel erhält man die in Tabelle C.1 zusammengestellten Fourier-Korrespondenzen.

Tabelle C.1.: Zusammenstellung der wichtigsten Fourier-Korrespondenzen

Gleichung	Zeitbereich	Frequenzbereich
(C.1)	$\int_{-\infty}^{\infty} \underline{X}(f) e^{j2\pi ft} df$	$\underline{X}(f)$
(C.3)	$x(t)$	$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt$
(C.4)	$cx(t)$	$c\underline{X}(f)$
(C.5)	$x(t) + y(t)$	$\underline{X}(f) + \underline{Y}(f)$
(C.6)	$x(ct)$	$\frac{1}{ c } \underline{X}\left(\frac{f}{c}\right)$
(C.7)	$x(-t)$	$\underline{X}(-f)$
(C.8)	$\frac{\partial h(t)}{\partial t}$	$j2\pi f \underline{H}(f)$
(C.9)	$\underline{X}(-t)$	$x(f)$
(C.11)	$x(t) y(t)$	$\underline{X}(f) * \underline{Y}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \underline{X}(\varphi) \underline{Y}(f - \varphi) d\varphi$
(C.12)	$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) y(t - \tau) d\tau$	$\underline{X}(f) \underline{Y}(f)$
(C.13)	$\underline{x}^*(t)$	$\underline{X}^*(-f)$
(C.14)	$x(t) = x^*(t)$	$\underline{X}(f) = \underline{X}^*(-f)$
(C.15)	$x(t) e^{j2\pi f_0 t}$	$\underline{X}(f - f_0)$
(C.2)	$\delta(t)$	1
(C.10)	1	$\delta(f)$
(C.16)	sign(t)	$-\frac{j}{\pi f}$
(C.22)	$\text{si}(\pi Bt) = \frac{\text{sin}(\pi Bt)}{\pi Bt}$	$\frac{1}{B} \text{rect}\left(\frac{f}{B}\right)$
(C.33)	$F \text{III}(Ft)$	$\text{III}\left(\frac{f}{F}\right)$
(C.66)	$A \cos(2\pi f_0 t + \varphi)$	$\frac{A}{2} \delta(f + f_0) e^{-j\varphi} + \frac{A}{2} \delta(f - f_0) e^{j\varphi}$

# Anhang D.

## Signalgeneratoren

### D.1. Additives Rauschen

Ein idealer Signalgenerator erzeugt ein sinusförmiges Nutzsignal

$$s(t) = A \cos(2\pi f_0 t) \quad (\text{D.1})$$

der Frequenz  $f_0$ . Die Nullphase des Nutzsignals ist keine physikalische Eigenschaft, sondern ergibt sich im Rahmen der Modellbildung durch Wahl des Nullpunktes der Zeitmessung. Es genügt daher, nur eine einzige willkürliche Nullphase zu betrachten. Das Spektrum des Nutzsignals ist

$$\underline{S}(f) = \mathcal{F}(s(t)) = \frac{A}{2} \delta(f + f_0) + \frac{A}{2} \delta(f - f_0), \quad (\text{D.2})$$

siehe (C.66). Es folgt das Leistungsdichtespektrum

$$S_{\text{ss}}(f) = \frac{A^2}{4} \delta(f + f_0) + \frac{A^2}{4} \delta(f - f_0). \quad (\text{D.3})$$

Imperfektionen des von realen Signalgeneratoren erzeugten Signals  $x(t)$  können als additives Rauschen  $n(t)$  modelliert werden:

$$x(t) = s(t) + n(t) = A \cos(2\pi f_0 t) + n(t). \quad (\text{D.4})$$

Für stationäres additives Rauschen  $n(t)$  erhält man aus der Rauschautokorrelationsfunktion

$$R_{\text{nn}}(t) = \text{E}\{n^*(\tau) n(\tau + t)\} \quad (\text{D.5})$$

gemäß (C.69) durch Fourier-Transformation das Rauschleistungsdichtespektrum

$$S_{\text{nn}}(f) = \mathcal{F}(R_{\text{nn}}(t)), \quad (\text{D.6})$$

vergleiche (C.70). Da die Rauschautokorrelationsfunktion  $R_{\text{nn}}(t)$  eine gerade reelle Funktion ist, ist das Rauschleistungsdichtespektrum  $S_{\text{nn}}(f)$  reell, siehe (C.3).

Die Leistung des additiven Rauschens  $n(t)$  ergibt sich mit (C.1) zu

$$\text{E}\{|n(t)|^2\} = R_{\text{nn}}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\text{nn}}(f) \text{d}f. \quad (\text{D.7})$$

## D.2. Phasenrauschen

Alternativ kann man die Imperfektionen des erzeugten Signals als Amplitudenrauschen  $\Delta a(t)$  und Phasenrauschen  $\Delta\varphi(t)$  modellieren:<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} x(t) &= (A + \Delta a(t)) \cos(2\pi f_0 t + \Delta\varphi(t)) \\ &= (A + \Delta a(t)) (\cos(2\pi f_0 t) \cos(\Delta\varphi(t)) - \sin(2\pi f_0 t) \sin(\Delta\varphi(t))). \end{aligned} \quad (\text{D.8})$$

In vielen praktisch relevanten Anwendungen ist das additive Rauschen  $n(t)$  klein im Vergleich zum Nutzsignal  $s(t)$ . Mit den für kleines Phasenrauschen  $\Delta\varphi(t)$  gültigen linearen Approximationen

$$\cos(\Delta\varphi(t)) \approx 1$$

und

$$\sin(\Delta\varphi(t)) \approx \Delta\varphi(t)$$

erhält man

$$\begin{aligned} x(t) &\approx (A + \Delta a(t)) (\cos(2\pi f_0 t) - \sin(2\pi f_0 t) \Delta\varphi(t)) \\ &= A \cos(2\pi f_0 t) + \Delta a(t) \cos(2\pi f_0 t) - A \sin(2\pi f_0 t) \Delta\varphi(t) - \Delta a(t) \sin(2\pi f_0 t) \Delta\varphi(t). \end{aligned}$$

Falls weiterhin auch das Amplitudenrauschen  $\Delta a(t)$  klein im Vergleich zur Amplitude  $A$  ist, ist das Produkt  $\Delta a(t) \Delta\varphi(t)$  zweier kleiner Größen vernachlässigbar und es gilt

$$x(t) \approx \underbrace{A \cos(2\pi f_0 t)}_{s(t)} + \Delta a(t) \cos(2\pi f_0 t) - A \Delta\varphi(t) \sin(2\pi f_0 t),$$

vergleiche (D.4) und siehe Abbildung D.1. Das heißt das additive Rauschen ist<sup>2</sup>

$$\begin{aligned} n(t) &\approx \Delta a(t) \cos(2\pi f_0 t) - A \Delta\varphi(t) \sin(2\pi f_0 t) \\ &= \operatorname{Re}\left((\Delta a(t) + jA\Delta\varphi(t)) e^{j2\pi f_0 t}\right), \end{aligned} \quad (\text{D.9})$$

vergleiche (B.40). Das zum additiven Bandpassrauschen  $n(t)$  äquivalente Tiefpassrauschen bei Wahl der Bezugsfrequenz  $f_0$  ist  $\Delta a(t) + jA\Delta\varphi(t)$ .

<sup>1</sup>Es wird das Additionstheorem  $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\beta)$  verwendet.

<sup>2</sup>Es wird die Eulersche Formel  $e^{j\alpha} = \cos(\alpha) + j \sin(\alpha)$  verwendet.

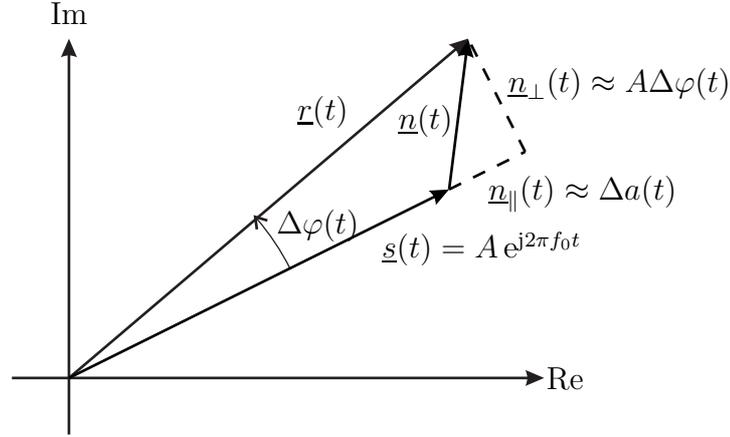


Abbildung D.1.: Überlagerung von Nutzsignal und Rauschen im Zeigerdiagramm

Falls das äquivalente Tiefpassrauschen stationär ist, ergibt sich seine Autokorrelationsfunktion zu

$$\begin{aligned}
\underline{R}_{\text{TP}}(t) &= \text{E}\{(\Delta a(\tau) - jA\Delta\varphi(\tau))(\Delta a(\tau + t) + jA\Delta\varphi(\tau + t))\} \\
&= \underbrace{\text{E}\{\Delta a(\tau)\Delta a(\tau + t)\}}_{R_{aa}(t)} \\
&\quad + A^2 \underbrace{\text{E}\{\Delta\varphi(\tau)\Delta\varphi(\tau + t)\}}_{R_{\varphi\varphi}(t)} \\
&\quad + jA \underbrace{\text{E}\{\Delta a(\tau)\Delta\varphi(\tau + t)\}}_{R_{a\varphi}(t)} \\
&\quad - jA \underbrace{\text{E}\{\Delta\varphi(\tau)\Delta a(\tau + t)\}}_{R_{\varphi a}(t)},
\end{aligned} \tag{D.10}$$

vergleiche (D.5). Durch Fourier-Transformation erhält man hieraus das Leistungsdichtespektrum

$$S_{\text{TP}}(f) = \mathcal{F}(\underline{R}_{\text{TP}}(t)) \tag{D.11}$$

des äquivalenten Tiefpassrauschens, vergleiche (D.6). Das Leistungsdichtespektrum  $S_{\text{TP}}(f)$  des äquivalenten Tiefpassrauschens ist reell, da der Realteil der Autokorrelationsfunktion  $\underline{R}_{\text{TP}}(t)$  des äquivalenten Tiefpassrauschens eine gerade Funktion ist und der Imaginärteil der Autokorrelationsfunktion  $\underline{R}_{\text{TP}}(t)$  des äquivalenten Tiefpassrauschens eine ungerade Funktion ist, siehe (C.3).

Das zu einem stationären Tiefpassrauschen äquivalente Bandpassrauschen  $n(t)$

ist nicht notwendigerweise stationär. Mit (D.9) folgt<sup>3</sup>

$$\begin{aligned}
 E\{n^*(\tau) n(\tau + t)\} &\approx E\left\{ (\Delta a(\tau) \cos(2\pi f_0 \tau) - A\Delta\varphi(\tau) \sin(2\pi f_0 \tau)) \right. \\
 &\quad \left. (\Delta a(\tau + t) \cos(2\pi f_0 (\tau + t)) - A\Delta\varphi(\tau + t) \sin(2\pi f_0 (\tau + t))) \right\} \\
 &= \frac{1}{2} E\left\{ \underbrace{\Delta a(\tau) \Delta a(\tau + t)}_{R_{aa}(t)} (\cos(2\pi f_0 t) + \cos(4\pi f_0 \tau + 2\pi f_0 t)) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} A^2 E\left\{ \underbrace{\Delta\varphi(\tau) \Delta\varphi(\tau + t)}_{R_{\varphi\varphi}(t)} (\cos(2\pi f_0 t) - \cos(4\pi f_0 \tau + 2\pi f_0 t)) \right\} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2} A E\left\{ \underbrace{\Delta a(\tau) \Delta\varphi(\tau + t)}_{R_{a\varphi}(t)} (\sin(2\pi f_0 t) + \sin(4\pi f_0 \tau + 2\pi f_0 t)) \right\} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2} A E\left\{ \underbrace{\Delta\varphi(\tau) \Delta a(\tau + t)}_{R_{\varphi a}(t)} (-\sin(2\pi f_0 t) + \sin(4\pi f_0 \tau + 2\pi f_0 t)) \right\} \right. \\
 &= \frac{1}{2} \left( R_{aa}(t) + A^2 R_{\varphi\varphi}(t) \right) \cos(2\pi f_0 t) \\
 &\quad + \frac{1}{2} (-AR_{a\varphi}(t) + AR_{\varphi a}(t)) \sin(2\pi f_0 t) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \left( R_{aa}(t) - A^2 R_{\varphi\varphi}(t) \right) \cos(4\pi f_0 \tau + 2\pi f_0 t) \\
 &\quad + \frac{1}{2} (-AR_{a\varphi}(t) - AR_{\varphi a}(t)) \sin(4\pi f_0 \tau + 2\pi f_0 t).
 \end{aligned}$$

Die mittlere Rauschautokorrelationsfunktion des zyklstationären Bandpassrauschens  $n(t)$  ergibt sich zu<sup>4</sup>

$$\begin{aligned}
 \overline{R}_{nn}(t) &\approx \frac{1}{2} \left( R_{aa}(t) + A^2 R_{\varphi\varphi}(t) \right) \cos(2\pi f_0 t) \\
 &\quad + \frac{1}{2} (-AR_{a\varphi}(t) + AR_{\varphi a}(t)) \sin(2\pi f_0 t) \quad (D.12) \\
 &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left( \underline{R}_{\text{TP}}(t) e^{j2\pi f_0 t} \right).
 \end{aligned}$$

Dies entspricht einer Tiefpass-Bandpass-Transformation mit der Bezugsfrequenz  $f_0$ , siehe (B.40).

---

<sup>3</sup>Es werden die Additionstheoreme  $\cos(\alpha) \cos(\beta) = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$ ,  $\sin(\alpha) \cos(\beta) = \frac{1}{2} (\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta))$  und  $\sin(\alpha) \sin(\beta) = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$  verwendet.

<sup>4</sup>Es wird die Eulersche Formel  $e^{j\alpha} = \cos(\alpha) + j \sin(\alpha)$  verwendet.

Nur wenn

$$R_{aa}(t) = A^2 R_{\varphi\varphi}(t) \quad (\text{D.13})$$

und

$$R_{a\varphi}(t) = -R_{\varphi a}(t) \quad (\text{D.14})$$

gelten, das heißt wenn das stationäre Tiefpassrauschen rotationsinvariant ist, ist das dazu äquivalente Bandpassrauschen  $n(t)$  stationär und man erhält die Rauschautokorrelationsfunktion

$$R_{nn}(t) = \overline{R}_{nn}(t). \quad (\text{D.15})$$

Durch Fourier-Transformation der mittleren Rauschautokorrelationsfunktion  $\overline{R}_{nn}(t)$  erhält man analog zu (D.6) das mittlere Rauschleistungsdichtespektrum<sup>5</sup>

$$\begin{aligned} \overline{S}_{nn}(f) &= \mathcal{F}(\overline{R}_{nn}(t)) \\ &\approx \mathcal{F}\left(\frac{1}{2} \operatorname{Re}(\underline{R}_{\text{TP}}(t) e^{j2\pi f_0 t})\right) \\ &= \mathcal{F}\left(\frac{1}{4} \underline{R}_{\text{TP}}^*(t) e^{-j2\pi f_0 t} + \frac{1}{4} \underline{R}_{\text{TP}}(t) e^{j2\pi f_0 t}\right) \\ &= \frac{1}{4} S_{\text{TP}}(-f - f_0) + \frac{1}{4} S_{\text{TP}}(f - f_0), \end{aligned} \quad (\text{D.16})$$

siehe (C.4), (C.5), (C.13) und (C.15). Die Frequenz  $f$  im Tiefpassbereich entspricht der Abweichung von der Mittenfrequenz  $f_0$  im Bandpassbereich.

In vielen technischen Anwendungen kann das Amplitudenrauschen  $\Delta a(t)$  durch nichtlineare Amplitudenbegrenzung unterdrückt werden, so dass nur das Phasenrauschen  $\Delta\varphi(t)$  mit der Autokorrelationsfunktion

$$R_{\varphi\varphi}(t) = \mathbb{E}\{\Delta\varphi^*(\tau) \Delta\varphi(\tau + t)\} = R_{\varphi\varphi}(-t) \quad (\text{D.17})$$

und dem Leistungsdichtespektrum

$$S_{\varphi\varphi}(f) = \mathcal{F}(R_{\varphi\varphi}(t)), \quad (\text{D.18})$$

vergleiche (D.5) und (D.6), relevant ist:

$$x(t) = A \cos\left(\underbrace{2\pi f_0 t + \Delta\varphi(t)}_{\varphi(t)}\right). \quad (\text{D.19})$$

Bei vernachlässigbarem Amplitudenrauschen  $\Delta a(t)$  ist das zum Bandpassrauschen  $n(t)$  äquivalente Tiefpassrauschen bei Wahl der Bezugfrequenz  $f_0$  gleich

<sup>5</sup>Der Realteil einer komplexen Größe berechnet sich zu  $\operatorname{Re}(\underline{x}) = \frac{1}{2}(\underline{x} + \underline{x}^*)$ .

$jA\Delta\varphi(t)$ , das heißt bis auf einen Faktor  $jA$  gleich dem Phasenrauschen  $\Delta\varphi(t)$ . Es ergeben sich die Autokorrelationsfunktion

$$\underline{R}_{\text{TP}}(t) = A^2 R_{\varphi\varphi}(t) \quad (\text{D.20})$$

des äquivalenten Tiefpassrauschens und das Leistungsdichtespektrum

$$S_{\text{TP}}(f) = A^2 S_{\varphi\varphi}(f) \quad (\text{D.21})$$

des äquivalenten Tiefpassrauschens. Das Bandpassrauschen  $n(t)$  ist in diesem Fall nur zyklstationär und nicht stationär und hat die mittlere Rauschautokorrelationsfunktion

$$\overline{R}_{\text{nn}}(t) \approx \frac{1}{2} A^2 R_{\varphi\varphi}(t) \cos(2\pi f_0 t) \quad (\text{D.22})$$

und das mittlere Rauschleistungsdichtespektrum

$$\overline{S}_{\text{nn}}(f) \approx \frac{1}{4} A^2 S_{\varphi\varphi}(-f - f_0) + \frac{1}{4} A^2 S_{\varphi\varphi}(f - f_0). \quad (\text{D.23})$$

Diese Zusammenhänge rechtfertigen es, das dem von einem Signalgenerator erzeugten Nutzsignal  $s(t)$  überlagerte additive Rauschen  $n(t)$  als Phasenrauschen zu bezeichnen. Zur quantitativen Beurteilung normiert man das mittlere Rauschleistungsdichtespektrum gemäß (D.3) auf  $A^2/4$  und erhält<sup>6</sup>

$$\frac{4\overline{S}_{\text{nn}}(f)}{A^2} \approx S_{\varphi\varphi}(-f - f_0) + S_{\varphi\varphi}(f - f_0). \quad (\text{D.24})$$

### D.3. Momentanfrequenz

Aus der Ableitung der Phase

$$\varphi(t) = 2\pi f_0 t + \Delta\varphi(t) \quad (\text{D.25})$$

gemäß (D.19) nach der Zeit  $t$  erhält man die Momentanfrequenz

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial\varphi(t)}{\partial t} = f_0 + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial\Delta\varphi(t)}{\partial t}. \quad (\text{D.26})$$

Dem Phasenrauschen  $\Delta\varphi(t)$  entspricht ein Frequenzrauschen

$$\Delta f(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial\Delta\varphi(t)}{\partial t}. \quad (\text{D.27})$$

---

<sup>6</sup>Angegeben wird üblicherweise die logarithmische innerhalb der Auflösungsbreite gemessene normierte Rauschleistung in der Pseudoeinheit dBc.

Ausgehend von der Autokorrelationsfunktion  $R_{\varphi\varphi}(t)$  des Phasenrauschens  $\Delta\varphi(t)$  gemäß (D.17) erhält man

$$\begin{aligned} R_{\varphi f}(t) &= \mathbb{E}\{\Delta\varphi(\tau) \Delta f(\tau + t)\} \\ &= \frac{1}{2\pi} \mathbb{E}\left\{\Delta\varphi(\tau) \frac{\partial\Delta\varphi(t)}{\partial t}\bigg|_{\tau+t}\right\} \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \mathbb{E}\{\Delta\varphi(\tau) \Delta\varphi(\tau + t)\} \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{\partial R_{\varphi\varphi}(t)}{\partial t}, \end{aligned}$$

mit der Substitution  $\tau' = \tau + t$  folgt

$$\begin{aligned} R_{f\varphi}(t) &= \mathbb{E}\{\Delta f(\tau) \Delta\varphi(\tau + t)\} \\ &= \mathbb{E}\{\Delta f(\tau' - t) \Delta\varphi(\tau')\} \\ &= R_{\varphi f}(-t) \\ &= -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial R_{\varphi\varphi}(t)}{\partial t} \end{aligned}$$

und schließlich erhält man die Autokorrelationsfunktion

$$\begin{aligned} R_{ff}(t) &= \mathbb{E}\{\Delta f(\tau) \Delta f(\tau + t)\} \\ &= \frac{1}{2\pi} \mathbb{E}\left\{\Delta f(\tau) \frac{\partial\Delta\varphi(t)}{\partial t}\bigg|_{\tau+t}\right\} \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \mathbb{E}\{\Delta f(\tau) \Delta\varphi(\tau + t)\} \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{\partial R_{f\varphi}(t)}{\partial t} \\ &= -\frac{1}{(2\pi)^2} \frac{\partial^2 R_{\varphi\varphi}(t)}{\partial t^2} \end{aligned} \tag{D.28}$$

des Frequenzrauschens  $\Delta f(t)$ . Für das Leistungsdichtespektrum des Frequenzrauschens  $\Delta f(t)$  folgt mit (C.8)

$$S_{ff}(f) = \mathcal{F}(R_{ff}(t)) = f^2 S_{\varphi\varphi}(f). \tag{D.29}$$

Weißes Frequenzrauschen  $\Delta f(t)$  mit einem konstanten Leistungsdichtespektrum  $S_{ff}(f)$  entspricht einem Phasenrauschen  $\Delta\varphi(t)$  mit einem Leistungsdichtespektrum

$$S_{\varphi\varphi}(f) \sim \frac{1}{f^2}. \tag{D.30}$$

## D.4. Synchronisation

### D.4.1. Phasenregelschleife

Ein häufig wiederkehrende Aufgabe besteht darin, einen Oszillator variabler Frequenz (Variable Frequency Oscillator, VFO) mit einem Referenzoszillator zu synchronisieren. Hierzu verwendet man eine Phasenregelschleife (Phase Locked Loop, PLL), siehe Abbildung D.2.

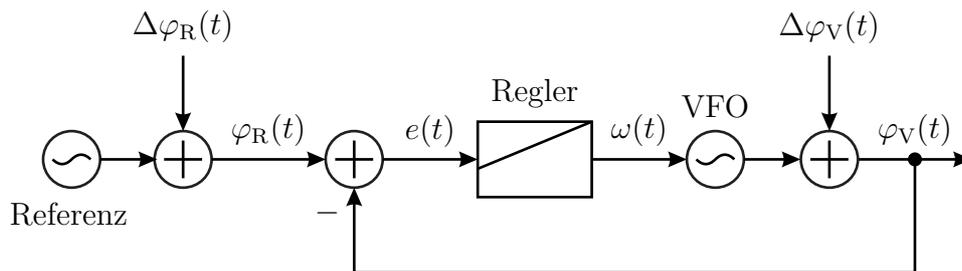


Abbildung D.2.: Phasenregelschleife

Zunächst wird in einem Phasendetektor die als Phasenfehler bezeichnete Differenz

$$e(t) = \varphi_R(t) - \varphi_V(t) \quad (\text{D.31})$$

der Phase

$$\varphi_R(t) = 2\pi f_0 t + \Delta\varphi_R(t) \quad (\text{D.32})$$

des Referenzoszillators und der Phase

$$\varphi_V(t) = 2\pi f_0 t + \int \omega(t) dt + \Delta\varphi_V(t) \quad (\text{D.33})$$

des Oszillators variabler Frequenz gebildet, vergleiche (D.25) und (D.26). Ziel der Phasenregelschleife ist es, den Phasenfehler  $e(t)$  verschwinden zu lassen, was einer Gleichheit der Momentanfrequenzen des Referenzoszillators und des Oszillators variabler Frequenz entspricht, siehe (D.26). Um diesem Ziels möglichst nahe zu kommen, verändert der Regler die Momentanfrequenz des Oszillators variabler Frequenz entsprechend. In den Folgenden Abschnitten werden die Komponenten der Phasenregelschleife genauer betrachtet und die Performanz der Phasenregelschleife analysiert. Bei der Performanzbeurteilung interessiert primär die dem Phasenrauschen der Phasenregelschleife entsprechende Abweichung

$$\Delta\varphi(t) = \varphi_V(t) - 2\pi f_0 t = \int \omega(t) dt + \Delta\varphi_V(t) \quad (\text{D.34})$$

der Phase  $\varphi_V(t)$  des Oszillators variabler Frequenz vom idealen linearen Verlauf  $2\pi f_0 t$ .

### D.4.2. Phasendetektor

Einen idealen Phasendetektor kann es nicht geben, da Phasen nur bis auf ein ganzzahliges Vielfaches von  $2\pi$  gemessen werden können. Dies führt insbesondere bei großen auftretenden Phasenfehlern  $e(t)$ , das heißt bei deutlich abweichenden Momentanfrequenzen des Referenzoszillators und des Oszillators variabler Frequenz, wie sie beispielsweise initial bei Inbetriebnahme der Phasenregelschleife noch auftreten können, zu Problemen. Das in diesem Fall relevante sogenannte Fangverhalten der Phasenregelschleife wird hier nicht weiter betrachtet. Im Folgenden wird nur der Fall betrachtet, dass die Phasenfehler  $e(t)$  klein sind und deshalb eindeutig gemessen werden können.

Ein sehr einfacher Phasendetektor lässt sich mit einem Multiplizierer realisieren, siehe Anhang B.6. Das Doppelte des Produkts des Signals  $\sin(\varphi_R(t))$  des Referenzoszillators und des Signals  $\cos(\varphi_V(t))$  des Oszillators variabler Frequenz, vergleiche (D.19), ergibt sich zu<sup>7</sup>

$$2 \sin(\varphi_R(t)) \cos(\varphi_V(t)) = \sin(\varphi_R(t) - \varphi_V(t)) + \underbrace{\sin(\varphi_R(t) + \varphi_V(t))}_{\text{hochfrequent}}.$$

Nach Unterdrücken des hochfrequenten Anteils mit einem Tiefpass, der üblicherweise bereits Bestandteil des Reglers ist, verbleibt ein bei kleinen Beträgen des Phasenfehlers  $e(t)$  dem Phasenfehler entsprechender Anteil

$$\sin(\varphi_R(t) - \varphi_V(t)) = \sin(e(t)) \approx e(t),$$

siehe (D.31).

Der auch bei anderen Phasendetektoren benötigte, möglicherweise als Bestandteil des Reglers realisierte Tiefpass bedingt eine Zeitkonstante  $T$ , die umgekehrt proportional zur Frequenz  $f_0$  ist. Niedrige Frequenzen  $f_0$  führen zu langsamen Phasenregelschleifen.

### D.4.3. Regler

Im Folgenden wird nur der in Phasenregelschleifen häufig eingesetzte Proportional-Integral-Regler

$$\omega(t) = k \left( e(t) + \frac{1}{T} \int e(t) dt \right) \quad (\text{D.35})$$

mit dem Proportionalitätsfaktor  $k > 0$  und der Nachstellzeit  $T$  genauer betrachtet. Für Entwurf und Performanzanalyse komplexerer Regler sei auf die entsprechende Fachliteratur der Regelungstechnik verwiesen [FKL+16; Lun16].

<sup>7</sup>Es wird das Additionstheorem  $\sin(\alpha) \cos(\beta) = \frac{1}{2} \sin(\alpha - \beta) + \frac{1}{2} \sin(\alpha + \beta)$  verwendet.

Mit (D.34) erhält man bei Einsatz des Proportional-Integral-Reglers

$$\Delta\varphi(t) = k \int e(t) dt + \frac{k}{T} \iint e(t) dt dt + \Delta\varphi_V(t).$$

Mit (D.31), (D.32) und (D.34) folgt

$$\begin{aligned} \Delta\varphi(t) &= k \int \varphi_R(t) dt - k \int \varphi_V(t) dt \\ &\quad + \frac{k}{T} \iint \varphi_R(t) dt dt - \frac{k}{T} \iint \varphi_V(t) dt dt + \Delta\varphi_V(t) \\ &= - \left( k \int \Delta\varphi(t) dt + \frac{k}{T} \iint \Delta\varphi(t) dt dt \right) \\ &\quad + \left( k \int \Delta\varphi_R(t) dt + \frac{k}{T} \iint \Delta\varphi_R(t) dt dt \right) + \Delta\varphi_V(t) \end{aligned}$$

und schließlich die das Verhalten der Phasenregelschleife beschreibende Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Delta\varphi(t)}{\partial t^2} &= - \left( k \frac{\partial \Delta\varphi(t)}{\partial t} + \frac{k}{T} \Delta\varphi(t) \right) \\ &\quad + \left( k \frac{\partial \Delta\varphi_R(t)}{\partial t} + \frac{k}{T} \Delta\varphi_R(t) \right) + \frac{\partial^2 \Delta\varphi_V(t)}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (\text{D.36})$$

Man führt noch die Eigenfrequenz

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{T}} \quad (\text{D.37})$$

und die Dämpfung

$$d = \frac{\sqrt{kT}}{2} \quad (\text{D.38})$$

ein, deren Bedeutungen später klar werden.

#### D.4.4. Dynamisches Verhalten der Phasenregelschleife

Im Fall rauschfreier Oszillatoren

$$\Delta\varphi_R(t) = \Delta\varphi_V(t) = 0$$

folgt aus (D.36)

$$0 = \frac{\partial^2 \Delta\varphi(t)}{\partial t^2} + k \frac{\partial \Delta\varphi(t)}{\partial t} + \frac{k}{T} \Delta\varphi(t).$$

Dies ist eine lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung für  $\Delta\varphi(t)$ . Sie hat Lösungen der Form

$$\Delta\varphi(t) \sim e^{\underline{s}t}.$$

Einsetzen dieses Lösungsansatzes in die Differentialgleichung ergibt die quadratische Gleichung

$$\underline{s}^2 + k\underline{s} + \frac{k}{T} = 0$$

für  $\underline{s}$  mit den Wurzeln

$$\underline{s}_{1,2} = -\frac{k}{2} \pm \sqrt{\frac{k^2}{4} - \frac{k}{T}}, = 2\pi f_0 \left( -d \pm \sqrt{d^2 - 1} \right) \quad (\text{D.39})$$

siehe (D.37) und (D.38). In der Wurzelortskurve ist die Lage der Wurzeln  $\underline{s}_{1,2}$  in der komplexen Ebene abhängig vom Proportionalitätsfaktor  $k > 0$  dargestellt, siehe Abbildung D.3.

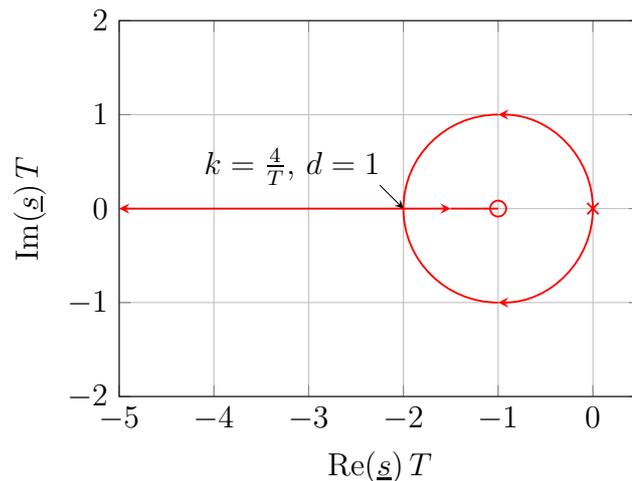


Abbildung D.3.: Wurzelortskurve

Für  $k > 0$  liegen die Wurzeln  $\underline{s}_{1,2}$  stets in der linken Halbebene und es ergeben sich folglich stets abklingende Verläufe  $\Delta\varphi(t)$ , das heißt die Phasenregelschleife ist stets stabil. Für  $t \rightarrow \infty$  konvergiert  $\Delta\varphi(t)$  gegen Null, das heißt die Phasenregelschleife ist stets stationär genau. Dies ergibt sich auch direkt aus dem Vorhandensein des Integrators als Bestandteil des Proportional-Integral-Reglers. Abhängig von der Diskriminanten  $k^2/4 - k/T$  ergeben sich oszillierende oder aperiodische Verläufe  $\Delta\varphi(t)$ . Bei negativer Diskriminante  $k^2/4 - k/T < 0$  sind

die Wurzeln  $\underline{s}_{1,2}$  komplex und man erhält oszillierende Verläufe  $\Delta\varphi(t)$ . Für die Dämpfung gilt dann  $d < 1$ , siehe (D.38). Die Frequenz ist

$$\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{T} - \frac{k^2}{4}} = f_0 \sqrt{1 - d^2}, \quad (\text{D.40})$$

siehe (D.37) und (D.38).

## D.4.5. Phasenrauschen der Phasenregelschleife

### D.4.5.1. Rauschen in linearen zeitinvarianten Systemen

Zunächst wird allgemein die Verarbeitung eines Phasenrauschens  $\Delta\varphi(t)$  mit der Autokorrelationsfunktion  $R_{\varphi\varphi}(t)$  und dem Leistungsdichtespektrum

$$S_{\varphi\varphi}(f) = \mathcal{F}(R_{\varphi\varphi}(t)),$$

siehe (D.18), durch ein lineares zeitinvariantes System mit der Impulsantwort  $h(t)$  und der Übertragungsfunktion

$$\underline{H}(f) = \mathcal{F}(h(t))$$

gemäß (C.3) betrachtet, siehe Abbildung D.4. Das Phasenrauschen am Ausgang berechnet man mit dem Faltungsintegral zu

$$\Delta\psi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Delta\varphi(\tau) h(t - \tau) d\tau.$$

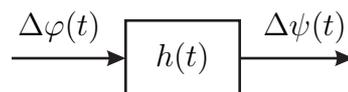


Abbildung D.4.: Lineares zeitinvariantes System

Die Autokorrelationsfunktion des Phasenrauschens  $\Delta\psi(t)$  am Ausgang ergibt

sich gemäß (C.69) mit der Substitution  $\tau''' = \tau'' - \tau'$  zu

$$\begin{aligned}
 R_{\psi\psi}(t) &= \mathbb{E}\{\Delta\psi(\tau) \Delta\psi(\tau + t)\} \\
 &= \mathbb{E}\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \Delta\varphi(\tau') h(\tau - \tau') d\tau' \int_{-\infty}^{\infty} \Delta\varphi(\tau'') h(\tau + t - \tau'') d\tau'' \right\} \\
 &= \mathbb{E}\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Delta\varphi(\tau') \Delta\varphi(\tau'') h(\tau - \tau') h(\tau + t - \tau'') d\tau' d\tau'' \right\} \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\mathbb{E}\{\Delta\varphi(\tau') \Delta\varphi(\tau' + \tau''')\}}_{R_{\varphi\varphi}(\tau''')} \\
 &\quad \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau - \tau') h(\tau + t - \tau' - \tau''') d\tau' d\tau'''}_{R_{hh}(t - \tau''')} \\
 &= R_{\varphi\varphi}(t) * R_{hh}(t).
 \end{aligned} \tag{D.41}$$

Durch Fourier-Transformation der Impulsautokorrelationsfunktion  $R_{hh}(t)$  erhält man mit dem Faltungstheorem (C.12), dem Ähnlichkeitssatz (C.7) und (C.13) das Energiedichtespektrum

$$\mathcal{F}(R_{hh}(t)) = \mathcal{F}(h^*(-t) * h(t)) = \underline{H}^*(f) \underline{H}(f) = |\underline{H}(f)|^2. \tag{D.42}$$

Mit dem Faltungstheorem (C.12) ergibt sich das Leistungsdichtespektrum des Phasenrauschens  $\psi(t)$  am Ausgang zu

$$S_{\psi\psi}(f) = \mathcal{F}(R_{\psi\psi}(t)) = S_{\varphi\varphi}(f) |\underline{H}(f)|^2, \tag{D.43}$$

siehe (C.70).

#### D.4.5.2. Übertragungsfunktionen der Phasenregelschleife

Aus (D.36) folgt im Frequenzbereich durch Ersetzen der Differentiationen durch Multiplikationen mit  $j2\pi f$  gemäß (C.8)

$$\begin{aligned}
 -4\pi^2 f^2 \mathcal{F}(\Delta\varphi(t)) &= -j2\pi f k \mathcal{F}(\Delta\varphi(t)) - \frac{k}{T} \mathcal{F}(\Delta\varphi(t)) \\
 &\quad + j2\pi f k \mathcal{F}(\Delta\varphi_R(t)) + \frac{k}{T} \mathcal{F}(\Delta\varphi_R(t)) \\
 &\quad - 4\pi^2 f^2 \mathcal{F}(\Delta\varphi_V(t)), \\
 \mathcal{F}(\Delta\varphi(t)) &= \frac{j2\pi f k + \frac{k}{T}}{\frac{k}{T} + j2\pi f k - 4\pi^2 f^2} \mathcal{F}(\Delta\varphi_R(t)) + \frac{-4\pi^2 f^2}{\frac{k}{T} + j2\pi f k - 4\pi^2 f^2} \mathcal{F}(\Delta\varphi_V(t)),
 \end{aligned}$$

was man mit (D.37) und (D.38) auch als

$$\mathcal{F}(\Delta\varphi(t)) = \underbrace{\frac{j2d\left(\frac{f}{f_0}\right) + 1}{1 + j2d\left(\frac{f}{f_0}\right) - \left(\frac{f}{f_0}\right)^2}}_{\underline{H}_R(f)} \mathcal{F}(\Delta\varphi_R(t)) + \underbrace{\frac{-\left(\frac{f}{f_0}\right)^2}{1 + j2d\left(\frac{f}{f_0}\right) - \left(\frac{f}{f_0}\right)^2}}_{\underline{H}_V(f)} \mathcal{F}(\Delta\varphi_V(t))$$

darstellen kann. Man erhält die Führungsübertragungsfunktion

$$\underline{H}_R(f) = \frac{j2d\left(\frac{f}{f_0}\right) + 1}{1 + j2d\left(\frac{f}{f_0}\right) - \left(\frac{f}{f_0}\right)^2} \quad (\text{D.44})$$

für das Phasenrauschen  $\Delta\varphi_R(t)$  des Referenzoszillators und die Störübertragungsfunktion

$$\underline{H}_V(f) = \frac{-\left(\frac{f}{f_0}\right)^2}{1 + j2d\left(\frac{f}{f_0}\right) - \left(\frac{f}{f_0}\right)^2} \quad (\text{D.45})$$

für das Phasenrauschen  $\Delta\varphi_V(t)$  des Oszillators variabler Frequenz. Es handelt sich um Übertragungsfunktionen zweiter Ordnung. Die zum Berechnen der Beiträge des Phasenrauschens  $\Delta\varphi_R(t)$  des Referenzoszillators und des Phasenrauschens  $\Delta\varphi_V(t)$  des Oszillators variabler Frequenz zum Leistungsdichtespektrum des Phasenrauschens  $\Delta\varphi(t)$  der Phasenregelschleife relevanten Energiedichtespektren, siehe (D.43), sind in Abbildung D.5 dargestellt.

Bei sehr kleinen Frequenzen  $f \ll f_0$  gilt

$$\underline{H}_R(f) \approx 1 \quad (\text{D.46})$$

und

$$\underline{H}_V(f) \approx -\left(\frac{f}{f_0}\right)^2 \rightarrow 0. \quad (\text{D.47})$$

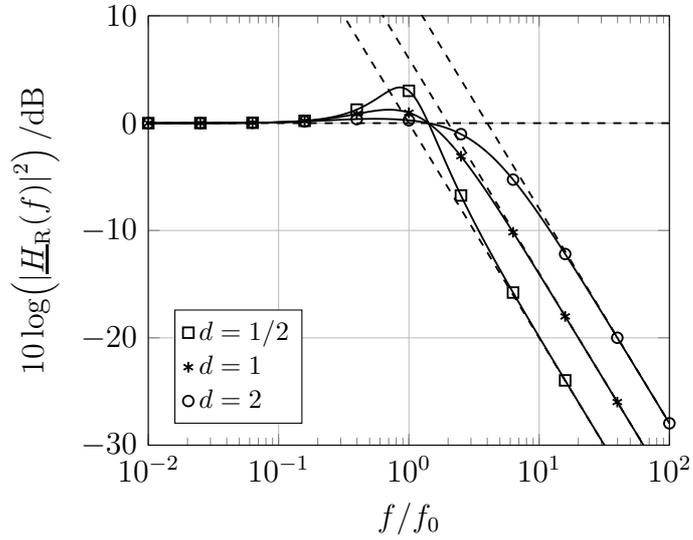
Bei sehr kleinen Frequenzen  $f \ll f_0$  wird das Phasenrauschen  $\Delta\varphi_V(t)$  des Oszillators variabler Frequenz von der Phasenregelschleife vollständig unterdrückt und das Phasenrauschen  $\Delta\varphi(t)$  der Phasenregelschleife folgt direkt dem Phasenrauschen  $\Delta\varphi_R(t)$  des Referenzoszillators.

Bei sehr hohen Frequenzen  $f \gg f_0$  gilt

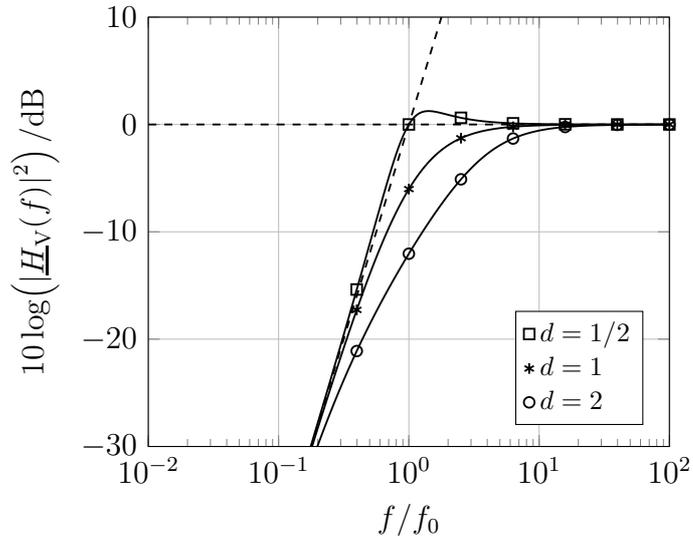
$$\underline{H}_R(f) \approx \frac{j2d}{-\left(\frac{f}{f_0}\right)} \rightarrow 0 \quad (\text{D.48})$$

und

$$\underline{H}_V(f) \approx 1. \quad (\text{D.49})$$



(a) Führungsübertragungsfunktion  $\underline{H}_R(f)$  für das Phasenrauschen  $\Delta\varphi_R(t)$  des Referenzoszillators



(b) Störübertragungsfunktion  $\underline{H}_R(f)$  für das Phasenrauschen  $\Delta\varphi_V(t)$  des Oszillators variabler Frequenz

Abbildung D.5.: Übertragungsfunktionen für das Phasenrauschen

Bei sehr hohen Frequenzen  $f \gg f_0$  kann die Phasenregelschleife dem Phasenrauschen  $\Delta\varphi_R(t)$  des Referenzoszillators nicht folgen und die Phasenregelschleife kann das Phasenrauschen  $\Delta\varphi_V(t)$  des Oszillators variabler Frequenz nicht unterdrücken, so dass das Phasenrauschen  $\Delta\varphi(t)$  der Phasenregelschleife dem Phasenrauschen  $\Delta\varphi_V(t)$  des Oszillators variabler Frequenz entspricht.

### D.4.6. Synthesizer

In vielen Anwendungen benötigt man einen Signalgenerator einstellbarer Frequenz. Die Frequenzstabilität eines Oszillators variabler Frequenz alleine ist zumeist unzureichend. Oszillatoren fester Frequenz haben im Allgemeinen eine viel höhere Frequenzstabilität. In einem Synthesizer stabilisiert man einen Oszillator variabler Frequenz unter Verwendung eines Referenzoszillators fester Frequenz. Der Synthesizer basiert auf einer Phasenregelschleife, in deren Rückführungsweig ein Teiler eingefügt wurde, siehe Abbildung D.6. Der Teiler teilt die Phase  $\varphi_V(t)$  und entsprechend auch die Momentanfrequenz durch  $N$ , siehe (D.26). Man kann den Teiler mit einem digitalen Zähler realisieren, der alle  $N$  Eingangsimpulse einen Ausgangsimpuls ausgibt.

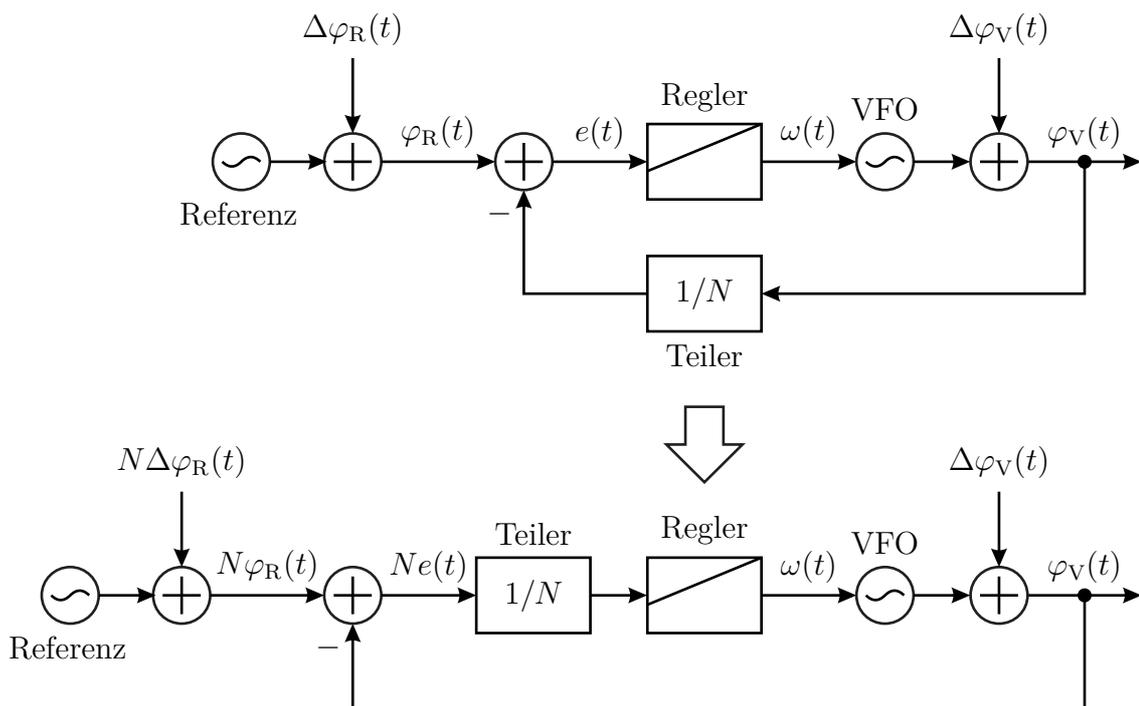


Abbildung D.6.: Synthesizer. Unten Umformung zur vereinfachten Analyse mit einem Referenzoszillator  $N$ -facher Frequenz

Ziel des Synthesizers ist es, den hier der Differenz

$$e(t) = \varphi_R(t) - \frac{\varphi_V(t)}{N} \quad (\text{D.50})$$

der Phase  $\varphi_R(t)$  des Referenzoszillators und der geteilten Phase  $\varphi_V(t)/N$  des Oszillators variabler Frequenz entsprechenden Phasenfehler verschwinden zu lassen. Die Momentanfrequenz des Oszillators variabler Frequenz muss hierzu das  $N$ -fache der Momentanfrequenz des Referenzoszillators sein, siehe (D.26). Durch Einstellen des Teilers  $N$  kann man dann die Momentanfrequenz des Oszillators variabler Frequenz einstellen, wobei die Schrittweite der Momentanfrequenz des Referenzoszillators entspricht.

Zur Analyse formt man den Synthesizer wie in Abbildung D.6 unten gezeigt in eine äquivalente Phasenregelschleife ohne Teiler im Rückführungszweig und mit einem Referenzoszillator  $N$ -facher Frequenz um. Den Teiler kann man dann als Bestandteil des Reglers auffassen. Durch entsprechend adaptierte Parametrisierung des Reglers kann man unabhängig vom Teiler  $N$  stets die gleiche Eigenfrequenz  $f_0$  und Dämpfung  $d$  einstellen. Die durch die Wurzeln (D.39) charakterisierten dynamischen Eigenschaften, die Führungsübertragungsfunktion (D.44) und die Störübertragungsfunktion (D.45) können somit unabhängig vom Teiler  $N$  gemacht werden. In der äquivalenten Phasenregelschleife ohne Teiler im Rückführungszweig hat der Referenzoszillator die Phase  $N\varphi_R(t)$  und insbesondere das Phasenrauschen  $N\Delta\varphi_R(t)$ . Bezogen auf den Synthesizer mit Teiler im Rückführungszweig wird das Leistungsdichtespektrum des Phasenrauschens  $\Delta\varphi_R(t)$  des Referenzoszillators um den Faktor  $N^2$  verstärkt, siehe (D.17) und (D.18). Das Phasenrauschen  $\Delta\varphi_R(t)$  des Referenzoszillators ist ursächlich für das Phasenrauschen  $\Delta\varphi(t)$  des Synthesizers bei kleinen Frequenzen  $f$ , siehe (D.44) und (D.45). Das Leistungsdichtespektrum des Phasenrauschens  $\Delta\varphi(t)$  des Synthesizers wird folglich bei kleinen Frequenzen  $f$  um den Faktor  $N^2$  verstärkt.

## D.5. Allan-Varianz

Die momentane relative Frequenzabweichung ist

$$y(t) = \frac{\Delta f(t)}{f_0} = \frac{1}{2\pi f_0} \frac{\partial \Delta\varphi(t)}{\partial t},$$

siehe (D.27). Die Autokorrelationsfunktion der momentanen relativen Frequenzabweichung  $y(t)$  ergibt sich zu

$$R_{yy}(t) = \text{E}\{y(\tau)y(\tau+t)\} = \frac{\text{E}\{\Delta f(\tau)\Delta f(\tau+t)\}}{f_0^2} = \frac{R_{ff}(t)}{f_0^2}$$

siehe (D.28). Mit (D.29) folgt das Leistungsdichtespektrum

$$S_{yy}(f) = \mathcal{F}(R_{yy}(t)) = \frac{S_{ff}(f)}{f_0^2} = \frac{f^2}{f_0^2} S_{\varphi\varphi}(f)$$

der momentanen relativen Frequenzabweichung  $y(t)$ .

Als Mittelwert der momentanen relativen Frequenzabweichung  $y(t)$  im Intervall

$$t_k \leq t \leq t_{k+1} = t_k + \tau$$

der Beobachtungsdauer  $\tau$  erhält man die mittlere relative Frequenzabweichung

$$\bar{y}_k(\tau) = \frac{1}{\tau} \int_{t_k}^{t_k+\tau} y(t) dt = y(t) * \frac{\text{rect}\left(\frac{t}{\tau} + \frac{1}{2}\right)}{\tau} \Bigg|_{t=t_k} = \frac{\Delta\varphi(t_k + \tau) - \Delta\varphi(t_k)}{2\pi f_0 \tau}. \quad (\text{D.51})$$

Basierend auf der mittleren relativen Frequenzabweichung  $\bar{y}_k(\tau)$  definiert man als Maß für die Frequenzstabilität die auch als Zweiwertvarianz bezeichnete Allan-Varianz [Ala66]

$$\begin{aligned} \sigma_y^2(\tau) &= \frac{1}{2} \mathbb{E} \left\{ \left( \bar{y}_{k+1}(\tau) - \bar{y}_k(\tau) \right)^2 \right\} \\ &= \mathbb{E} \left\{ \left( y(t) * \frac{\text{rect}\left(\frac{t}{\tau} + \frac{3}{2}\right) - \text{rect}\left(\frac{t}{\tau} + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{2}\tau} \right)^2 \right\} \\ &= \frac{1}{2} \mathbb{E} \left\{ \left( \frac{\Delta\varphi(t_k + 2\tau) - \Delta\varphi(t_k + \tau)}{2\pi f_0 \tau} - \frac{\Delta\varphi(t_k + \tau) - \Delta\varphi(t_k)}{2\pi f_0 \tau} \right)^2 \right\} \\ &= \frac{1}{8\pi^2 f_0^2 \tau^2} \mathbb{E} \left\{ \left( \Delta\varphi(t_k + 2\tau) - 2\Delta\varphi(t_k + \tau) + \Delta\varphi(t_k) \right)^2 \right\} \end{aligned} \quad (\text{D.52})$$

und die Allan-Deviation

$$\sigma_y(\tau) = \sqrt{\sigma_y^2(\tau)}. \quad (\text{D.53})$$

Eine konstante Phasenabweichung  $\mu_\varphi$  und eine konstante Frequenzabweichung  $\mu_f$  wirken sich nicht auf die Allan-Varianz aus, wie man durch Einsetzen von  $\Delta\varphi(t_k) + \mu_\varphi + 2\pi\mu_f t_k$ , vergleiche (D.27), leicht erkennt:<sup>8</sup>

$$\begin{aligned} \sigma_y^2(\tau) &= \frac{1}{8\pi^2 f_0^2 \tau^2} \mathbb{E} \left\{ \left( \Delta\varphi(t_k + 2\tau) + \mu_\varphi + 2\pi\mu_f (t_k + 2\tau) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2\Delta\varphi(t_k + \tau) - 2\mu_\varphi - 4\pi\mu_f (t_k + \tau) + \Delta\varphi(t_k) + \mu_\varphi + 2\pi\mu_f t_k \right)^2 \right\} \\ &= \frac{1}{8\pi^2 f_0^2 \tau^2} \mathbb{E} \left\{ \left( \Delta\varphi(t_k + 2\tau) - 2\Delta\varphi(t_k + \tau) + \Delta\varphi(t_k) \right)^2 \right\}. \end{aligned}$$

---

<sup>8</sup>Die Allan-Varianz macht keine Aussage über die durch die Frequenzabweichung  $\mu_f$  quantifizierte Frequenzgenauigkeit.

Die Allan-Varianz entspricht der Leistung am Ausgang eines linearen zeitinvarianten Systems mit dem Eingangssignal  $y(t)$  und der Impulsantwort

$$h(t) = \frac{\text{rect}\left(\frac{t}{\tau} + \frac{3}{2}\right) - \text{rect}\left(\frac{t}{\tau} + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{2}\tau}.$$

Mit (C.22), (C.15) und (C.9) erhält man die Übertragungsfunktion

$$\begin{aligned} \underline{H}(f) &= \mathcal{F}(h(t)) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sin(\pi f \tau)}{\pi f \tau} (e^{j3\pi f \tau} - e^{j\pi f \tau}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sin(\pi f \tau)}{\pi f \tau} e^{j2\pi f \tau} \underbrace{(e^{j\pi f \tau} - e^{-j\pi f \tau})}_{2j \sin(\pi f \tau)} \\ &= \sqrt{2} j e^{j2\pi f \tau} \frac{\sin^2(\pi f \tau)}{\pi f \tau}. \end{aligned}$$

Für die Allan-Varianz folgt

$$\begin{aligned} \sigma_y^2(\tau) &= \mathbb{E}\{(y(t) * h(t))^2\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} S_{yy}(f) |\underline{H}(f)|^2 df \\ &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} S_{yy}(f) \left| \frac{\sin^2(\pi f \tau)}{\pi f \tau} \right|^2 df \\ &= \frac{2}{\pi^2 f_0^2 \tau^2} \int_{-\infty}^{\infty} S_{ff}(f) \frac{\sin^4(\pi f \tau)}{f^2} df \\ &= \frac{2}{\pi^2 f_0^2 \tau^2} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\varphi\varphi}(f) \sin^4(\pi f \tau) df, \end{aligned} \tag{D.54}$$

siehe (D.7) (D.43) und [BCC+71].

Der Betrag des Leistungsdichtespektrums  $S_{\varphi\varphi}(f)$  des Phasenrauschens  $\Delta\varphi(t)$  muss bei hohen Frequenzen  $f$  stärker als mit  $1/f$  abnehmen, damit das Integral konvergiert und sich ein endlicher Wert für die Allan-Varianz  $\sigma_y^2(\tau)$  ergibt. Beispielsweise für weißes Phasenrauschen  $\Delta\varphi(t)$  mit einem konstanten Leistungsdichtespektrum  $S_{\varphi\varphi}(f)$  ergäbe sich kein endlicher Wert der Allan-Varianz  $\sigma_y^2(\tau)$ . Bei praktischen Messungen ergeben sich aufgrund der begrenzten Bandbreite des Messsystems dennoch endliche Werte für die Allan-Varianz  $\sigma_y^2(\tau)$ .

Für weißes Frequenzrauschen  $\Delta f(t)$  mit einem konstanten Leistungsdichtespektrum  $S_{ff}(f)$  erhält man die Allan-Varianz<sup>9</sup>

$$\sigma_y^2(\tau) \sim \frac{2}{\pi^2 f_0^2 \tau^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^4(\pi f \tau)}{f^2} df = \frac{1}{f_0^2 \tau}. \quad (\text{D.55})$$

Im  $\sigma$ - $\tau$ -Diagramm wird die Allan-Deviation

$$\sigma_y(\tau) \sim \frac{1}{f_0 \sqrt{\tau}} \quad (\text{D.56})$$

als Funktion der Beobachtungsdauer  $\tau$  doppellogarithmisch dargestellt, siehe Abbildung D.7. Die Steigung der Kurve im  $\sigma$ - $\tau$ -Diagramm ist charakteristisch für die Art des Rauschprozesses, hier weißem Frequenzrauschen.

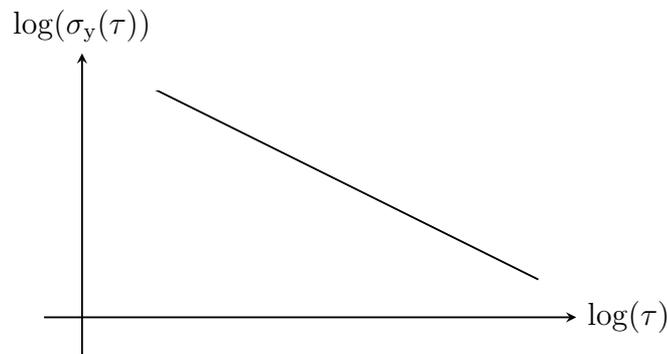


Abbildung D.7.:  $\sigma$ - $\tau$ -Diagramm für weißes Frequenzrauschen  $\Delta f(t)$ , Steigung der Geraden  $-1/2$

---

<sup>9</sup>Es wird das bestimmte Integral  $\int_0^{\infty} \frac{\sin^4(ax)}{x^2} dx = \frac{\pi a}{4}$  verwendet.

## Anhang E.

### Lösungen der Aufgaben

**Aufgabe 1.1** Für das infinitesimale Flächenelement  $dA_z$  gilt

$$\begin{aligned}
 \oint_{\partial dA_z} \langle \vec{D}, \vec{u} \rangle ds &= \int_{\substack{\text{rechts oben} \\ \text{rechts unten}}} \langle \vec{D}, \vec{u}_x \rangle ds + \int_{\substack{\text{links oben} \\ \text{rechts oben}}} \langle \vec{D}, \vec{u}_y \rangle ds \\
 &\quad - \int_{\substack{\text{links unten} \\ \text{links oben}}} \langle \vec{D}, \vec{u}_x \rangle ds - \int_{\substack{\text{rechts unten} \\ \text{links unten}}} \langle \vec{D}, \vec{u}_y \rangle ds \\
 &= \left( \frac{D_x\left(x_0 + \frac{dx}{2}, y_0, z_0\right) - D_x\left(x_0 - \frac{dx}{2}, y_0, z_0\right)}{dx} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{D_y\left(x_0, y_0 + \frac{dy}{2}, z_0\right) - D_y\left(x_0, y_0 - \frac{dy}{2}, z_0\right)}{dy} \right) dx dy \\
 &= \left( \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} \right) dA_z,
 \end{aligned}$$

siehe Abbildung E.1.

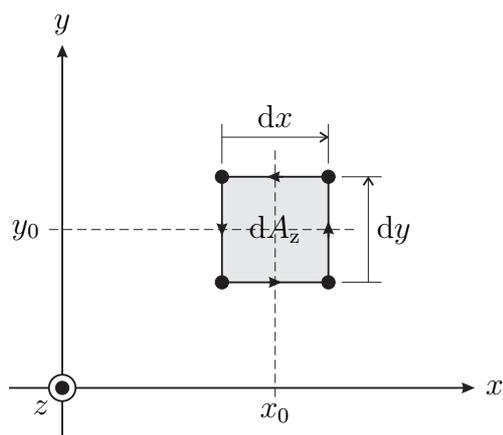


Abbildung E.1.: Infinitesimales Flächenelement  $dA_z = dx dy$

Da sich nicht infinitesimale Flächen  $A$  in unendlich viele infinitesimale Flächenelemente zerlegen lassen und sich die Linienintegrale entlang der inneren Begrenzungen wegekürzen, folgt

$$\iint_A \left( \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} \right) dA = \oint_{\partial A} \langle \vec{D}, \vec{u} \rangle ds.$$

**Aufgabe 1.2** Unter Verwenden von (1.14) und (1.32) erhält man

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\operatorname{rot}(\vec{H})) &= \operatorname{div} \left( \left( \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) \vec{u}_x + \left( \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \vec{u}_y + \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \vec{u}_z \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

**Aufgabe 1.3** Für die Differenz der Normalkomponenten der elektrischen Flussdichten erhält man mit der  $z$ -Komponente (1.20) des Durchflutungsgesetzes und (1.32)

$$\begin{aligned} \langle \vec{D}_1 - \vec{D}_2, \vec{u}_z \rangle &= \underline{D}_{1z} - \underline{D}_{2z} \\ &= \frac{1}{j\omega} \left( \frac{\partial}{\partial x} (\underline{H}_{1y} - \underline{H}_{2y}) - \frac{\partial}{\partial y} (\underline{H}_{1x} - \underline{H}_{2x}) \right) - \frac{1}{j\omega} (\underline{J}_{1z} - \underline{J}_{2z}) \\ &= \frac{1}{j\omega} \operatorname{div} \left( \begin{pmatrix} \underline{H}_{1y} - \underline{H}_{2y} \\ -\underline{H}_{1x} + \underline{H}_{2x} \\ 0 \end{pmatrix} \right) - \frac{1}{j\omega} (\underline{J}_{1z} - \underline{J}_{2z}) \\ &= \frac{1}{j\omega} \operatorname{div} \left( (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) \times \vec{u}_z \right) - \frac{1}{j\omega} (\underline{J}_{1z} - \underline{J}_{2z}). \end{aligned}$$

Mit der Grenzflächenbedingung (1.62) der Tangentialkomponenten der magnetischen Feldstärken und der Kontinuitätsgleichung (1.42) erhält man schließlich

$$\langle \vec{D}_1 - \vec{D}_2, \vec{u}_z \rangle = -\frac{1}{j\omega} \operatorname{div}(\vec{J}_F) - \frac{1}{j\omega} (\underline{J}_{1z} - \underline{J}_{2z}) = \underline{\rho}_{eF}.$$

Dies ist die Grenzflächenbedingung (1.59) der Normalkomponenten der elektrischen Flussdichten.

Dual erhält man für die Differenz der Normalkomponenten der magnetischen Flussdichten mit der  $z$ -Komponente (1.28) des Induktionsgesetzes, (1.32), der

Grenzflächenbedingung (1.60) der Tangentialkomponenten der elektrischen Feldstärken und der Kontinuitätsgleichung (1.45) die Grenzflächenbedingung (1.61) der Normalkomponenten der magnetischen Flussdichten:

$$\begin{aligned}
\langle \vec{B}_1 - \vec{B}_2, \vec{u}_z \rangle &= B_{1z} - B_{2z} \\
&= -\frac{1}{j\omega} \left( \frac{\partial}{\partial x} (\underline{E}_{1y} - \underline{E}_{2y}) - \frac{\partial}{\partial y} (\underline{E}_{1x} - \underline{E}_{2x}) \right) - \frac{1}{j\omega} (\underline{M}_{1z} - \underline{M}_{2z}) \\
&= -\frac{1}{j\omega} \operatorname{div} \left( \begin{pmatrix} \underline{E}_{1y} - \underline{E}_{2y} \\ -\underline{E}_{1x} + \underline{E}_{2x} \\ 0 \end{pmatrix} \right) - \frac{1}{j\omega} (\underline{M}_{1z} - \underline{M}_{2z}) \\
&= -\frac{1}{j\omega} \operatorname{div} \left( (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) \times \vec{u}_z \right) - \frac{1}{j\omega} (\underline{M}_{1z} - \underline{M}_{2z}) \\
&= -\frac{1}{j\omega} \operatorname{div}(\vec{M}_F) - \frac{1}{j\omega} (\underline{M}_{1z} - \underline{M}_{2z}) \\
&= \underline{\rho}_{mF}.
\end{aligned}$$

**Aufgabe 1.4** Unter Verwenden von (1.32) und (1.14) und unter Berücksichtigen der Produktregel der Differentiation erhält man

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(\vec{E} \times \vec{H}) &= \operatorname{div}((E_y H_z - E_z H_y) \vec{u}_x + (E_z H_x - E_x H_z) \vec{u}_y + (E_x H_y - E_y H_x) \vec{u}_z) \\
&= \frac{\partial}{\partial x} (E_y H_z - E_z H_y) + \frac{\partial}{\partial y} (E_z H_x - E_x H_z) + \frac{\partial}{\partial z} (E_x H_y - E_y H_x) \\
&= \frac{\partial E_y}{\partial x} H_z + E_y \frac{\partial H_z}{\partial x} - \frac{\partial E_z}{\partial x} H_y - E_z \frac{\partial H_y}{\partial x} \\
&\quad + \frac{\partial E_z}{\partial y} H_x + E_z \frac{\partial H_x}{\partial y} - \frac{\partial E_x}{\partial y} H_z - E_x \frac{\partial H_z}{\partial y} \\
&\quad + \frac{\partial E_x}{\partial z} H_y + E_x \frac{\partial H_y}{\partial z} - \frac{\partial E_y}{\partial z} H_x - E_y \frac{\partial H_x}{\partial z} \\
&= \left( \frac{\partial E_z}{\partial y} H_x - \frac{\partial E_y}{\partial z} H_x + \frac{\partial E_x}{\partial z} H_y - \frac{\partial E_z}{\partial x} H_y + \frac{\partial E_y}{\partial x} H_z - \frac{\partial E_x}{\partial y} H_z \right) \\
&\quad - \left( E_x \frac{\partial H_z}{\partial y} - E_x \frac{\partial H_y}{\partial z} + E_y \frac{\partial H_x}{\partial z} - E_y \frac{\partial H_z}{\partial x} + E_z \frac{\partial H_y}{\partial x} - E_z \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \\
&= \left\langle \left( \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \vec{u}_x + \left( \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \vec{u}_y + \left( \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \vec{u}_z, \vec{H} \right\rangle \\
&\quad - \left\langle \vec{E}, \left( \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) \vec{u}_x + \left( \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \vec{u}_y + \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \vec{u}_z \right\rangle \\
&= \langle \operatorname{rot}(\vec{E}), \vec{H} \rangle - \langle \vec{E}, \operatorname{rot}(\vec{H}) \rangle.
\end{aligned}$$

**Aufgabe 2.1** Setzt man die aus der magnetischen Feldstärke  $\vec{H}$  berechnete elektrische Feldstärke  $\vec{E}$  in die mit (2.2) umgeformte Helmholtz-Gleichung (2.5) ein, so erhält man unter Verwenden von (1.46) und der Quellenfreiheit der magnetischen Feldstärke

$$\begin{aligned}\Delta\vec{E} + \beta_0^2\vec{E} &= \text{grad}(\text{div}(\vec{E})) - \text{rot}(\text{rot}(\vec{E})) + \beta_0^2\vec{E} \\ &= -j\frac{1}{\omega\varepsilon} \left( \text{grad}(\text{div}(\text{rot}(\vec{H}))) - \text{rot}(\text{rot}(\text{rot}(\vec{H}))) + \beta_0^2 \text{rot}(\vec{H}) \right) \\ &= -j\frac{1}{\omega\varepsilon} \text{rot} \left( -\text{rot}(\text{rot}(\vec{H})) + \text{grad}(\text{div}(\vec{H})) + \beta_0^2\vec{H} \right) \\ &= -j\frac{1}{\omega\varepsilon} \text{rot}(\Delta\vec{H} + \beta_0^2\vec{H}) = \vec{0}.\end{aligned}$$

**Aufgabe 2.2** Unter Verwenden von (1.32), (1.14) und (2.1) folgt aus (2.2)

$$\begin{aligned}\Delta\vec{H} &= \text{grad}(\text{div}(\vec{H})) - \text{rot}(\text{rot}(\vec{H})) \\ &= \text{grad} \left( \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} \right) \\ &\quad - \text{rot} \left( \left( \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) \vec{u}_x + \left( \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \vec{u}_y + \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \vec{u}_z \right) \\ &= \left( \frac{\partial^2 H_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial x \partial z} \right) \vec{u}_x + \left( \frac{\partial^2 H_x}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 H_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y \partial z} \right) \vec{u}_y \\ &\quad + \left( \frac{\partial^2 H_x}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 H_y}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial z^2} \right) \vec{u}_z - \left( \frac{\partial^2 H_y}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial z \partial x} \right) \vec{u}_x \\ &\quad - \left( \frac{\partial^2 H_z}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial x \partial y} \right) \vec{u}_y - \left( \frac{\partial^2 H_x}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_y}{\partial y \partial z} \right) \vec{u}_z \\ &= \left( \frac{\partial^2 H_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} \right) \vec{u}_x + \left( \frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} \right) \vec{u}_y \\ &\quad + \left( \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial z^2} \right) \vec{u}_z \\ &= \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial z^2}.\end{aligned}$$

**Aufgabe 2.3** Die momentane elektrische Energiedichte ist

$$w_e = \frac{1}{2}\varepsilon (E_x^2 + E_y^2),$$

siehe (1.78) und (1.47). Die momentane magnetische Energiedichte (1.77) berechnet sich mit (1.51), (2.28), und (2.25) zu

$$w_m = \frac{1}{2}\mu (H_x^2 + H_y^2) = \frac{1}{2}\mu \left( \frac{E_y^2}{Z_F^2} + \frac{E_x^2}{Z_F^2} \right) = \frac{1}{2}\varepsilon (E_x^2 + E_y^2) = w_e.$$

Die Norm des Poynting-Vektors gemäß (1.76) berechnet sich mit (2.28), (1.2), (1.4) und (2.25) zu

$$\|\vec{S}\| = |E_x H_y - E_y H_x| = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} (E_x^2 + E_y^2).$$

Mit (2.30) und (2.44) folgt die Energiegeschwindigkeit

$$v_e = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}.$$

**Aufgabe 2.4** Ableiten der Phasengeschwindigkeit (2.43) nach der Kreisfrequenz ergibt

$$\frac{\partial v_p}{\partial \omega} = \frac{\beta - \omega \frac{\partial \beta}{\partial \omega}}{\beta^2}.$$

Auflösen nach der Gruppengeschwindigkeit (2.47) ergibt

$$v_g = \frac{\omega}{\beta - \beta^2 \frac{\partial v_p}{\partial \omega}},$$

was sich mit (2.43) zu

$$v_g = \frac{v_p}{1 - \frac{\omega}{v_p} \frac{\partial v_p}{\partial \omega}}$$

vereinfachen lässt.

**Aufgabe 2.5** Da

$$E_{0x} = \operatorname{Re}(\underline{E}_{0x} e^{j\omega t}) = \underbrace{\operatorname{Re}(\underline{E}_{0x})}_{A=1 \text{ V m}^{-1}} \cos(\omega t) - \underbrace{\operatorname{Im}(\underline{E}_{0x})}_{B=0,5 \text{ V m}^{-1}} \sin(\omega t)$$

gegenüber

$$E_{0y} = \operatorname{Re}(\underline{E}_{0y} e^{j\omega t}) = \underbrace{\operatorname{Re}(\underline{E}_{0y})}_{C=1 \text{ V m}^{-1}} \cos(\omega t) - \underbrace{\operatorname{Im}(\underline{E}_{0y})}_{D=-0,5 \text{ V m}^{-1}} \sin(\omega t).$$

voreilt, handelt es sich um eine elliptisch rechtsdrehend polarisierte Welle.<sup>1</sup> Die Maximalwerte der elektrischen Feldstärkekomponenten sind

$$E_{0x,\max} = |\underline{E}_{0x}| = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{1,25} \text{ V m}^{-1}$$

und

$$E_{0y,\max} = |\underline{E}_{0y}| = \sqrt{C^2 + D^2} = \sqrt{1,25} \text{ V m}^{-1}.$$

Der Betrag des momentanen elektrischen Feldstärkevektors  $\vec{E}_0$  ergibt sich zu<sup>2</sup>

$$\begin{aligned} \|\vec{E}_0\| &= \sqrt{E_{0x}^2 + E_{0y}^2} \\ &= \sqrt{\frac{A^2 + B^2 + C^2 + D^2}{2} + \frac{A^2 - B^2 + C^2 - D^2}{2} \cos(2\omega t) - (AB + CD) \sin(2\omega t)}. \end{aligned}$$

Die den Halbachsen entsprechenden Extremalwerte des Betrags des momentanen elektrischen Feldstärkevektors  $\vec{E}_0$  berechnet man damit zu<sup>3</sup>

$$\begin{aligned} \|\vec{E}_0\|_{\max,\min} &= \sqrt{\frac{A^2 + B^2 + C^2 + D^2}{2} \pm \sqrt{\frac{(A^2 - B^2 + C^2 - D^2)^2}{4} + (AB + CD)^2}} \\ &= \sqrt{\frac{2,5}{2} \pm \sqrt{\frac{2,25}{4}}} \text{ V m}^{-1} = \sqrt{1,25 \pm 0,75} \text{ V m}^{-1}. \end{aligned}$$

Für die Zeitpunkte, zu denen die Extremalwerte erreicht werden, gilt

$$2(\omega t)_{\max,\min} + \arctan\left(\frac{2(AB + CD)}{A^2 - B^2 + C^2 - D^2}\right) = 0, \quad +\pi.$$

Hier ist

$$\frac{2(AB + CD)}{A^2 - B^2 + C^2 - D^2} = 0.$$

Daraus folgt für die Zeitpunkte, zu denen die Extremalwerte erreicht werden

$$(\omega t)_{\max,\min} = 0, \quad \frac{\pi}{2}.$$

---

<sup>1</sup>Es wird die Eulersche Formel  $e^{j\alpha} = \cos(\alpha) + j\sin(\alpha)$  verwendet.

<sup>2</sup>Es werden die Additionstheoreme  $\cos^2(\alpha) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2\alpha))$ ,  $\sin^2(\alpha) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\alpha))$  und  $\sin(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}(\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta))$  verwendet.

<sup>3</sup>Die Überlagerung  $A_1 \cos(2\omega t) - A_2 \sin(2\omega t)$  einer Kosinusschwingung und einer Sinusschwingung gleicher Kreisfrequenz ergibt eine Kosinusschwingung  $\sqrt{A_1^2 + A_2^2} \cos(2\omega t + \varphi)$ , für deren Nullphase  $\tan(\varphi) = \frac{A_2}{A_1}$  gilt.

Für den Winkel  $\alpha$ , um den die große Hauptachse der Ellipse bezüglich der  $x$ -Achse verdreht ist, gilt

$$\tan(\alpha) = \frac{E_{0y}((\omega t)_{\max})}{E_{0x}((\omega t)_{\max})} = \frac{C \cos((\omega t)_{\max}) - D \sin((\omega t)_{\max})}{A \cos((\omega t)_{\max}) - B \sin((\omega t)_{\max})}.$$

Mit den vorgegebenen Werten und  $(\omega t)_{\max} = 0$  folgt

$$\tan(\alpha) = 1,$$

das heißt

$$\alpha = \frac{\pi}{4}.$$

Man erhält die in Abbildung E.2 gezeigte Polarisationsellipse.

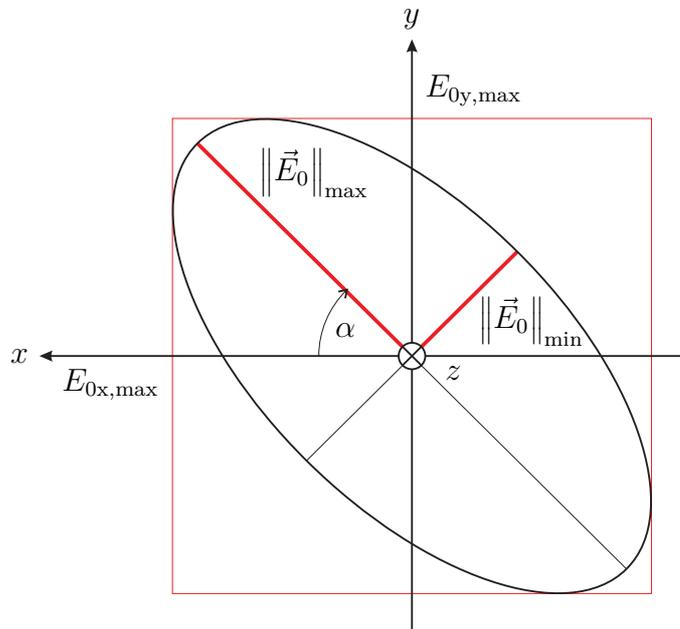


Abbildung E.2.: Polarisationsellipse für  $\underline{E}_{0x} = (1 + j0,5) \text{ V m}^{-1}$  und  $\underline{E}_{0y} = (1 - j0,5) \text{ V m}^{-1}$

**Aufgabe 3.1** Mit (3.2) folgt aus (2.36) die kritische Kreisfrequenz

$$\omega_c = \frac{\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}.$$

Tabelle E.1.: Kritische Kreisfrequenzen  $\omega_c$

$\omega_c$	$m$		
	0	1	2
0		$1,89 \cdot 10^{10} \text{ s}^{-1}$	$3,77 \cdot 10^{10} \text{ s}^{-1}$
$n$	1	$3,14 \cdot 10^{10} \text{ s}^{-1}$	$4,91 \cdot 10^{10} \text{ s}^{-1}$
	2	$6,28 \cdot 10^{10} \text{ s}^{-1}$	$7,33 \cdot 10^{10} \text{ s}^{-1}$

Mit den Abmessungen  $a = 50 \text{ mm}$  und  $b = 30 \text{ mm}$  und (2.45) ergeben sich die Zahlenwerte in Tabelle E.1.

Man erkennt, dass bei einer Kreisfrequenz von  $\omega = 2 \cdot 10^{10} \text{ s}^{-1}$  nur  $\text{TE}_{1,0}$ -Wellen ausbreitungsfähig sind. Damit ergeben sich mit (2.46), (2.48), (2.42), (2.38), (2.45) und (2.43):

$$v_p = \frac{c_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2}} = 9,17 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1},$$

$$v_g = c_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2} = 0,981 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1},$$

$$\lambda = \frac{2\pi v_p}{\omega} = 28,8 \text{ cm}.$$

**Aufgabe 3.2** Mit (1.69), (1.48), (3.3) und (3.4) ergibt sich die elektrische Flächenladungsdichte auf der linken Seitenwand  $x = 0$

$$\rho_{eF} = \varepsilon \underline{E}_x = j \frac{\omega \varepsilon \mu \underline{H}_0 n \pi}{\beta_c^2 b} \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{\mp j \beta z},$$

der rechten Seitenwand  $x = a$

$$\rho_{eF} = -\varepsilon \underline{E}_x = -j \frac{\omega \varepsilon \mu \underline{H}_0 n \pi}{\beta_c^2 b} \cos(m\pi) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{\mp j \beta z}$$

$$= \begin{cases} j \frac{\omega \varepsilon \mu \underline{H}_0 n \pi}{\beta_c^2 b} \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{\mp j \beta z} & m \text{ ungerade} \\ -j \frac{\omega \varepsilon \mu \underline{H}_0 n \pi}{\beta_c^2 b} \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{\mp j \beta z} & m \text{ gerade} \end{cases},$$

dem Boden  $y = 0$

$$\rho_{eF} = \varepsilon \underline{E}_y = -j \frac{\omega \varepsilon \mu \underline{H}_0 m \pi}{\beta_c^2 a} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) e^{\mp j \beta z}$$

und dem Deckel  $y = b$

$$\begin{aligned}\rho_{\text{eF}} &= -\varepsilon \underline{E}_y = j \frac{\omega \varepsilon \mu \underline{H}_0}{\beta_c^2} \frac{m\pi}{a} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos(n\pi) e^{\mp j\beta z} \\ &= \begin{cases} -j \frac{\omega \varepsilon \mu \underline{H}_0}{\beta_c^2} \frac{m\pi}{a} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) e^{\mp j\beta z} & n \text{ ungerade} \\ j \frac{\omega \varepsilon \mu \underline{H}_0}{\beta_c^2} \frac{m\pi}{a} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) e^{\mp j\beta z} & n \text{ gerade} \end{cases}.\end{aligned}$$

Der Normaleneinheitsvektor auf der linken Seitenwand entspricht dem Einheitsvektor  $\vec{u}_x$  in  $x$ -Richtung. Dies in (1.70) eingesetzt ergibt mit (3.1) und (3.6) die elektrische Flächenstromdichte

$$\begin{aligned}\vec{J}_{\text{F}} &= -\vec{H} \times \vec{u}_x = \underline{H}_y \vec{u}_z - \underline{H}_z \vec{u}_y \\ &= \pm j \frac{\beta \underline{H}_0}{\beta_c^2} \frac{n\pi}{b} \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{\mp j\beta z} \vec{u}_z - \underline{H}_0 \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{\mp j\beta z} \vec{u}_y\end{aligned}$$

auf der linken Seitenwand  $x = 0$  des Hohlleiters. Der Normaleneinheitsvektor der rechten Seitenwand entspricht dem negativen Einheitsvektor  $-\vec{u}_x$  in  $x$ -Richtung. Dies in (1.70) eingesetzt ergibt mit (3.1) und (3.6) die elektrische Flächenstromdichte

$$\begin{aligned}\vec{J}_{\text{F}} &= \vec{H} \times \vec{u}_x = -\underline{H}_y \vec{u}_z + \underline{H}_z \vec{u}_y \\ &= \mp j \frac{\beta \underline{H}_0}{\beta_c^2} \frac{n\pi}{b} \cos(m\pi) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{\mp j\beta z} \vec{u}_z + \underline{H}_0 \cos(m\pi) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{\mp j\beta z} \vec{u}_y\end{aligned}$$

auf der rechten Seitenwand  $x = a$  des Hohlleiters. Der Normaleneinheitsvektor auf dem Boden entspricht dem Einheitsvektor  $\vec{u}_y$  in  $y$ -Richtung. Dies in (1.70) eingesetzt ergibt mit (3.1) und (3.5) die elektrische Flächenstromdichte

$$\begin{aligned}\vec{J}_{\text{F}} &= -\vec{H} \times \vec{u}_y = \underline{H}_z \vec{u}_x - \underline{H}_x \vec{u}_z \\ &= \underline{H}_0 \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) e^{\mp j\beta z} \vec{u}_x \mp j \frac{\beta \underline{H}_0}{\beta_c^2} \frac{m\pi}{a} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) e^{\mp j\beta z} \vec{u}_z\end{aligned}$$

auf dem Boden  $y = 0$  des Hohlleiters. Der Normaleneinheitsvektor auf dem Deckel entspricht dem negativen Einheitsvektor  $-\vec{u}_y$  in  $y$ -Richtung. Dies in (1.70) eingesetzt ergibt mit (3.1) und (3.5) die elektrische Flächenstromdichte

$$\begin{aligned}\vec{J}_{\text{F}} &= \vec{H} \times \vec{u}_y = -\underline{H}_z \vec{u}_x + \underline{H}_x \vec{u}_z \\ &= -\underline{H}_0 \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos(n\pi) e^{\mp j\beta z} \vec{u}_x \pm j \frac{\beta \underline{H}_0}{\beta_c^2} \frac{m\pi}{a} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos(n\pi) e^{\mp j\beta z} \vec{u}_z\end{aligned}$$

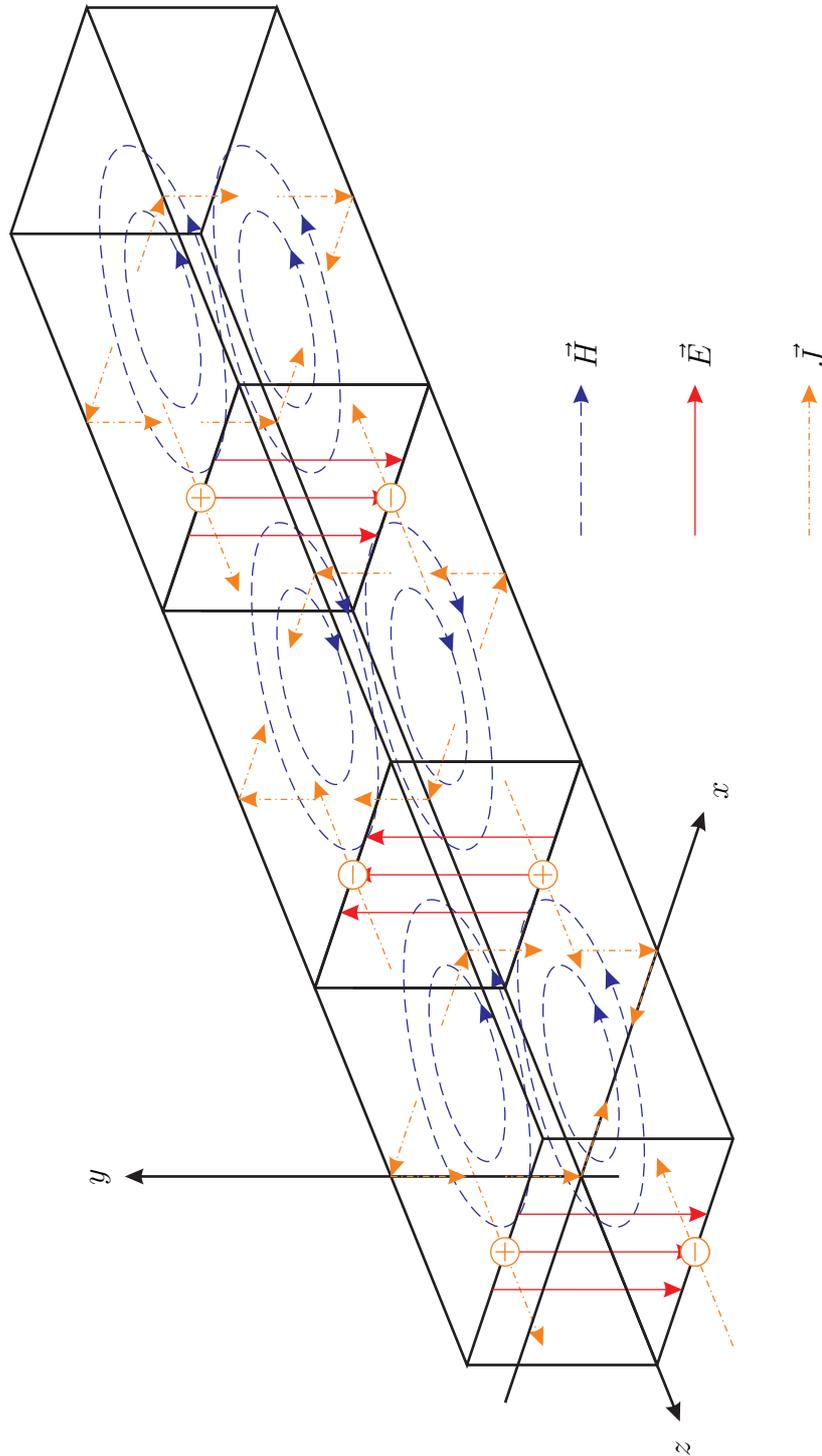


Abbildung E.3.: Sich in positive  $z$ -Richtung ausbreitende TE<sub>1,0</sub>-Welle

auf dem Deckel  $y = b$  des Hohlleiters.

In Abbildung E.3 sind die Ergebnisse für eine  $TE_{1,0}$ -Welle graphisch dargestellt.

Die Überprüfung mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung (1.42) ergibt mit (2.35) für die linke Seitenwand  $x = 0$  des Hohlleiters

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\vec{J}_F) &= \frac{\beta^2 \underline{H}_0}{\beta_c^2} \frac{n\pi}{b} \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{\mp j\beta z} + \underline{H}_0 \frac{n\pi}{b} \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{\mp j\beta z} \\ &= \frac{\omega^2 \varepsilon \mu \underline{H}_0}{\beta_c^2} \frac{n\pi}{b} \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{\mp j\beta z} \\ &= -j\omega \underline{\rho}_{eF},\end{aligned}$$

für die rechte Seitenwand  $x = a$  des Hohlleiters

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\vec{J}_F) &= -\frac{\beta^2 \underline{H}_0}{\beta_c^2} \frac{n\pi}{b} \cos(m\pi) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{\mp j\beta z} - \underline{H}_0 \cos(m\pi) \frac{n\pi}{b} \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{\mp j\beta z} \\ &= -\frac{\omega^2 \varepsilon \mu \underline{H}_0}{\beta_c^2} \frac{n\pi}{b} \cos(m\pi) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{\mp j\beta z} \\ &= -j\omega \underline{\rho}_{eF},\end{aligned}$$

für den Boden  $y = 0$  des Hohlleiters

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\vec{J}_F) &= -\underline{H}_0 \frac{m\pi}{a} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) e^{\mp j\beta z} - \frac{\beta^2 \underline{H}_0}{\beta_c^2} \frac{m\pi}{a} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) e^{\mp j\beta z} \\ &= -\frac{\omega^2 \varepsilon \mu \underline{H}_0}{\beta_c^2} \frac{m\pi}{a} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) e^{\mp j\beta z} \\ &= -j\omega \underline{\rho}_{eF}\end{aligned}$$

und für den Deckel  $y = b$  des Hohlleiters

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\vec{J}_F) &= \underline{H}_0 \frac{m\pi}{a} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos(n\pi) e^{\mp j\beta z} + \frac{\beta^2 \underline{H}_0}{\beta_c^2} \frac{m\pi}{a} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos(n\pi) e^{\mp j\beta z} \\ &= \frac{\omega^2 \varepsilon \mu \underline{H}_0}{\beta_c^2} \frac{m\pi}{a} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos(n\pi) e^{\mp j\beta z} \\ &= -j\omega \underline{\rho}_{eF}.\end{aligned}$$

**Aufgabe 3.3** Mit (1.14) und (2.1) erhält man

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}(\operatorname{grad}(\phi)) &= \operatorname{rot}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial\phi}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial\phi}{\partial z}\vec{u}_z\right) \\ &= \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial z} - \frac{\partial^2\phi}{\partial z\partial y}\right)\vec{u}_x + \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial z\partial x} - \frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial z}\right)\vec{u}_y + \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial x}\right)\vec{u}_z \\ &= \vec{0}.\end{aligned}$$

**Aufgabe 3.4** Mit (1.32) und (2.1) erhält man

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad}(\phi)) = \operatorname{div}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial\phi}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial\phi}{\partial z}\vec{u}_z\right) = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}.$$

**Aufgabe 3.5** Für die Kapazitätsbeläge gilt aus Symmetriegründen

$$C'_{1,0} = C'_{2,0} = C'_{1,2} = C',$$

siehe Abbildung 3.15. Mit (3.51), (3.51) und (3.51) folgen die Influenzbelagskoeffizienten:

$$\begin{aligned} c'_{1,1} &= C'_{1,0} + C'_{1,2} = 2C', \\ c'_{2,2} &= C'_{2,0} + C'_{1,2} = 2C', \\ c'_{1,2} &= -C'_{1,2} = -C'. \end{aligned}$$

Mit (3.58) erhält man schließlich den Kopplungsfaktor

$$k = -\frac{-C'}{2C'} = \frac{1}{2}.$$

**Aufgabe 4.1** Die Tangentialvektoren und die metrischen Größen ergeben sich entsprechend (4.11), (4.12) und (4.13) wie folgt:

$$\begin{aligned} \vec{t}_r &= \frac{\partial x}{\partial r}\vec{u}_x + \frac{\partial y}{\partial r}\vec{u}_y + \frac{\partial z}{\partial r}\vec{u}_z = \cos(\varphi)\vec{u}_x + \sin(\varphi)\vec{u}_y, \\ g_r &= \|\vec{t}_r\| = 1, \\ \vec{t}_\varphi &= \frac{\partial x}{\partial \varphi}\vec{u}_x + \frac{\partial y}{\partial \varphi}\vec{u}_y + \frac{\partial z}{\partial \varphi}\vec{u}_z = -r\sin(\varphi)\vec{u}_x + r\cos(\varphi)\vec{u}_y, \\ g_\varphi &= \|\vec{t}_\varphi\| = r, \\ \vec{t}_z &= \frac{\partial x}{\partial z}\vec{u}_x + \frac{\partial y}{\partial z}\vec{u}_y + \frac{\partial z}{\partial z}\vec{u}_z = \vec{u}_z, \\ g_z &= \|\vec{t}_z\| = 1. \end{aligned}$$

Durch Normieren der Tangentialvektoren erhält man die Einheitsvektoren, vergleiche (4.14), (4.15) und (4.16):

$$\begin{aligned} \vec{u}_r &= \cos(\varphi)\vec{u}_x + \sin(\varphi)\vec{u}_y, \\ \vec{u}_\varphi &= -\sin(\varphi)\vec{u}_x + \cos(\varphi)\vec{u}_y, \\ \vec{u}_z &= \vec{u}_z. \end{aligned}$$

Die Integrationselemente berechnet man entsprechend (4.19), (4.21) und (4.25) zu:

$$\begin{aligned}\|d\vec{s}\|^2 &= g_r^2 dr^2 + g_\varphi^2 d\varphi^2 + g_z^2 dz^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2, \\ d\vec{A}_r &= g_\varphi g_z d\varphi dz \vec{u}_r = r d\varphi dz \vec{u}_r, \\ d\vec{A}_\varphi &= g_r g_z dr dz \vec{u}_\varphi = dr dz \vec{u}_\varphi, \\ d\vec{A}_z &= g_r g_\varphi dr d\varphi \vec{u}_z = r dr d\varphi \vec{u}_z, \\ dV &= g_r g_\varphi g_z dr d\varphi dz = r dr d\varphi dz.\end{aligned}$$

Schließlich ergeben sich analog zu (4.27), (4.29), (4.31) und (4.33) noch die Differentialoperatoren in Zylinderkoordinaten:

$$\begin{aligned}\text{grad}(\underline{\phi}) &= \frac{1}{g_r} \frac{\partial \phi}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{g_\varphi} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \vec{u}_\varphi + \frac{1}{g_z} \frac{\partial \phi}{\partial z} \vec{u}_z \\ &= \frac{\partial \phi}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \vec{u}_\varphi + \frac{\partial \phi}{\partial z} \vec{u}_z, \\ \text{div}(\vec{D}) &= \frac{1}{g_r g_\varphi g_z} \left( \frac{\partial}{\partial r} (D_r g_\varphi g_z) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (D_\varphi g_r g_z) + \frac{\partial}{\partial z} (D_z g_r g_\varphi) \right) \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r D_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial D_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial D_z}{\partial z}, \\ \text{rot}(\vec{H}) &= \frac{1}{g_\varphi g_z} \left( \frac{\partial}{\partial \varphi} \{ \underline{H}_z g_z \} - \frac{\partial}{\partial z} (\underline{H}_\varphi g_\varphi) \right) \vec{u}_r \\ &\quad + \frac{1}{g_r g_z} \left( \frac{\partial}{\partial z} (\underline{H}_r g_r) - \frac{\partial}{\partial r} (\underline{H}_z g_z) \right) \vec{u}_\varphi \\ &\quad + \frac{1}{g_r g_\varphi} \left( \frac{\partial}{\partial r} (\underline{H}_\varphi g_\varphi) - \frac{\partial}{\partial \varphi} (\underline{H}_r g_r) \right) \vec{u}_z \\ &= \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial \underline{H}_\varphi}{\partial z} \right) \vec{u}_r + \left( \frac{\partial \underline{H}_r}{\partial z} - \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial r} \right) \vec{u}_\varphi + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \underline{H}_\varphi) - \frac{1}{r} \frac{\partial \underline{H}_r}{\partial \varphi} \right) \vec{u}_z, \\ \Delta \underline{\phi} &= \frac{1}{g_r g_\varphi g_z} \left( \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{g_\varphi g_z}{g_r} \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{g_r g_z}{g_\varphi} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{g_r g_\varphi}{g_z} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \right) \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}.\end{aligned}$$

**Aufgabe 4.2** Die Komponenten des vektoriellen Richtungsfaktors (4.42) ergeben sich, wenn man das Volumen gemäß Abbildung E.4 in zwei Hälften zerlegt, zu<sup>4</sup>

$$\begin{aligned} \underline{E}_{xyz} &= \iiint_{V'_1} \underline{J}_{xyz}(\vec{r}') e^{j\langle \vec{\beta}, \vec{r}' \rangle} dV' + \iiint_{V'_2} \underline{J}_{xyz}(\vec{r}') e^{j\langle \vec{\beta}, \vec{r}' \rangle} dV' \\ &= \iiint_{V'_1} \underline{J}_{xyz}(\vec{r}') e^{j\langle \vec{\beta}, \vec{r}' \rangle} dV' + \iiint_{V'_1} \underline{J}_{xyz}^*(\vec{r}') e^{-j\langle \vec{\beta}, \vec{r}' \rangle} dV' \\ &= \iiint_{V'_1} 2 \operatorname{Re}(\underline{J}_{xyz}(\vec{r}') e^{j\langle \vec{\beta}, \vec{r}' \rangle}) dV'. \end{aligned}$$

Der Richtungsfaktor  $\underline{E}_{xyz}$  ist hier reell. Damit ist das Argument  $\arg(\underline{E}_{xyz})$  des Richtungsfaktors von der Raumrichtung unabhängig.

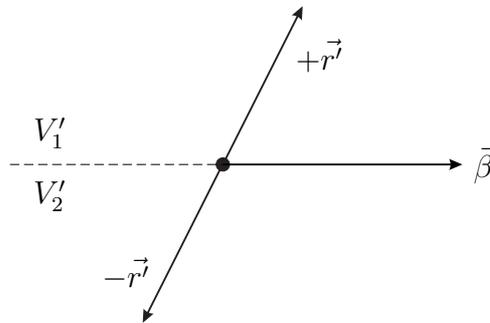


Abbildung E.4.: Zum Berechnen des Phasenzentrums

**Aufgabe 4.3** Mit

$$R = \sqrt{\rho^2 + z^2}$$

und der Greenschen Funktion

$$\underline{\psi}(z) = \frac{e^{-j\beta R}}{4\pi R}$$

---

<sup>4</sup>Der Realteil einer komplexen Größe berechnet sich zu  $\operatorname{Re}(\underline{x}) = \frac{1}{2}(\underline{x} + \underline{x}^*)$ .

ergibt sich die erste Ableitung der Greenschen Funktion nach  $z$  zu

$$\begin{aligned}\frac{\partial \psi(z)}{\partial z} &= \frac{\partial \psi(z)}{\partial R} \frac{\partial R}{\partial z} \\ &= \frac{-j\beta e^{-j\beta R} R - e^{-j\beta R}}{4\pi R^2} \frac{z}{\underbrace{\sqrt{\rho^2 + z^2}}_R} \\ &= -\frac{e^{-j\beta R}}{4\pi R^3} (j\beta R + 1) z.\end{aligned}$$

Die zweite Ableitung der Greenschen Funktion nach  $z$  berechnet sich zu

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \psi(z)}{\partial z^2} &= -\frac{\left(-j\beta e^{-j\beta R} (j\beta R + 1) + e^{-j\beta R} j\beta\right) R^3 - e^{-j\beta R} (j\beta R + 1) 3R^2}{4\pi R^6} \frac{z^2}{R} \\ &\quad - \frac{e^{-j\beta R}}{4\pi R^3} (j\beta R + 1) \\ &= \frac{(-\beta^2 R^2 + j3\beta R + 3) z^2 - j\beta R^3 - R^2}{4\pi R^5} e^{-j\beta R}.\end{aligned}$$

Mit

$$z^2 = R^2 - \rho^2$$

folgt schließlich

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \psi(z)}{\partial z^2} &= \frac{(-\beta^2 R^2 + j3\beta R + 3) (R^2 - \rho^2) - j\beta R^3 - R^2}{4\pi R^5} e^{-j\beta R} \\ &= \frac{-\beta^2 R^4 + j2\beta R^3 + 2R^2 + \beta^2 R^2 \rho^2 - j3\beta R \rho^2 - 3\rho^2}{4\pi R^5} e^{-j\beta R}.\end{aligned}$$

Für stückweise konstante Basisfunktionen  $f_n(z')$  vereinfacht sich (4.67) zu

$$\begin{aligned}\underline{Z}_{m,n} &= -jZ_F \int_{z_n - \frac{\Delta z}{2}}^{z_n + \frac{\Delta z}{2}} \left( \frac{1}{\beta} \frac{\partial^2 \psi(z - z')}{\partial z^2} \Big|_{z_m} + \beta \psi(z_m - z') \right) 2\pi \rho dz' \\ &= -jZ_F \int_{z_n - \frac{\Delta z}{2}}^{z_n + \frac{\Delta z}{2}} \frac{e^{-j\beta R_m}}{2\beta R_m^5} \left( j2\beta R_m^3 + 2R_m^2 + \beta^2 R_m^2 \rho^2 - j3\beta R_m \rho^2 - 3\rho^2 \right) \rho dz' \\ &= -jZ_F \int_{z_n - \frac{\Delta z}{2}}^{z_n + \frac{\Delta z}{2}} \frac{e^{-j\beta R_m}}{2\beta R_m^5} \left( (1 + j\beta R_m) (2R_m^2 - 3\rho^2) + \beta^2 \rho^2 R_m^2 \right) \rho dz'.\end{aligned}$$

**Aufgabe 4.4** Zweimaliges Anwenden der Produktintegrationsregel ergibt

$$\begin{aligned}
 & \int_{z_k}^{z_l} \left( \frac{\partial^2 \underline{\psi}(z - z')}{\partial z'^2} + \beta^2 \underline{\psi}(z - z') \right) f_n(z') \, dz' \\
 &= \int_{z_k}^{z_l} \left( \frac{\partial^2 \underline{\psi}(z - z')}{\partial z'^2} f_n(z') + \beta^2 \underline{\psi}(z - z') f_n(z') \right) \, dz' \\
 &= \left[ \frac{\partial \underline{\psi}(z - z')}{\partial z'} f_n(z') \right]_{z'=z_k}^{z_l} + \int_{z_k}^{z_l} \left( -\frac{\partial \underline{\psi}(z - z')}{\partial z'} \frac{\partial f_n(z')}{\partial z'} + \beta^2 \underline{\psi}(z - z') f_n(z') \right) \, dz' \\
 &= \left[ \frac{\partial \underline{\psi}(z - z')}{\partial z'} f_n(z') - \underline{\psi}(z - z') \frac{\partial f_n(z')}{\partial z'} \right]_{z'=z_k}^{z_l} \\
 &\quad + \int_{z_k}^{z_l} \left( \frac{\partial^2 f_n(z')}{\partial z'^2} + \beta^2 f_n(z') \right) \underline{\psi}(z - z') \, dz' \\
 &= - \left[ \frac{\partial \underline{\psi}(z - z')}{\partial z} f_n(z') + \underline{\psi}(z - z') \frac{\partial f_n(z')}{\partial z'} \right]_{z'=z_k}^{z_l} \\
 &\quad + \int_{z_k}^{z_l} \left( \frac{\partial^2 f_n(z')}{\partial z'^2} + \beta^2 f_n(z') \right) \underline{\psi}(z - z') \, dz'.
 \end{aligned}$$

Die Ableitungen der stückweise sinusförmigen Basisfunktionen  $f_n(z')$  berechnen sich zu

$$\frac{\partial f_n(z')}{\partial z'} = \begin{cases} \frac{\beta \cos(\beta(z' - z_{n-1}))}{\sin(\beta \Delta z)} & z_{n-1} \leq z' \leq z_n \\ \frac{-\beta \cos(\beta(z_{n+1} - z'))}{\sin(\beta \Delta z)} & z_n \leq z' \leq z_{n+1} \end{cases}$$

und

$$\frac{\partial^2 f_n(z')}{\partial z'^2} = \begin{cases} \frac{-\beta^2 \sin(\beta(z' - z_{n-1}))}{\sin(\beta \Delta z)} & z_{n-1} \leq z' \leq z_n \\ \frac{-\beta^2 \sin(\beta(z_{n+1} - z'))}{\sin(\beta \Delta z)} & z_n \leq z' \leq z_{n+1} \end{cases} = -\beta^2 f_n(z').$$

Damit folgen

$$\frac{\partial^2 f_n(z')}{\partial z'^2} + \beta^2 f_n(z') = 0$$

und

$$\begin{aligned}
 & \int_{z_k}^{z_l} \left( \frac{\partial^2 \underline{\psi}(z - z')}{\partial z'^2} + \beta^2 \underline{\psi}(z - z') \right) f_n(z') \, dz' \\
 &= - \left[ \frac{\partial \underline{\psi}(z - z')}{\partial z} f_n(z') + \underline{\psi}(z - z') \frac{\partial f_n(z')}{\partial z'} \right]_{z'=z_k}^{z_l}.
 \end{aligned}$$

Die Impedanzen (4.67) berechnen sich bei Verwenden stückweise sinusförmiger Basisfunktionen  $f_n(z')$  zu

$$\begin{aligned}
\underline{Z}_{m,n} &= -j \frac{Z_F 2\pi\rho}{\beta} \int_{z_{n-1}}^{z_{n+1}} \left( \left. \frac{\partial^2 \underline{\psi}(z-z')}{\partial z'^2} \right|_{z_m} + \beta^2 \underline{\psi}(z_m - z') \right) f_n(z') dz' \\
&= -j \frac{Z_F 2\pi\rho}{\beta} \int_{z_{n-1}}^{z_n} \left( \left. \frac{\partial^2 \underline{\psi}(z-z')}{\partial z'^2} \right|_{z_m} + \beta^2 \underline{\psi}(z_m - z') \right) f_n(z') dz' \\
&\quad - j \frac{Z_F 2\pi\rho}{\beta} \int_{z_n}^{z_{n+1}} \left( \left. \frac{\partial^2 \underline{\psi}(z-z')}{\partial z'^2} \right|_{z_m} + \beta^2 \underline{\psi}(z_m - z') \right) f_n(z') dz' \\
&= j \frac{Z_F 2\pi\rho}{\beta} \left[ \left. \frac{\partial \underline{\psi}(z-z')}{\partial z'} \right|_{z_m} f_n(z') + \underline{\psi}(z_m - z') \frac{\partial f_n(z')}{\partial z'} \right]_{z'=z_{n-1}}^{z_n} \\
&\quad + j \frac{Z_F 2\pi\rho}{\beta} \left[ \left. \frac{\partial \underline{\psi}(z-z')}{\partial z'} \right|_{z_m} f_n(z') + \underline{\psi}(z_m - z') \frac{\partial f_n(z')}{\partial z'} \right]_{z'=z_n}^{z_{n+1}}.
\end{aligned}$$

Da die stückweise sinusförmige Basisfunktion  $f_n(z')$  für  $z_{n-1}$  und für  $z_{n+1}$  Null wird, kürzen sich beim Einsetzen der Grenzen die Terme mit der Ableitung der Greenschen Funktion weg und man erhält<sup>5</sup>

$$\begin{aligned}
\underline{Z}_{m,n} &= j \frac{Z_F 2\pi\rho}{\beta} \left( \left. \underline{\psi}(z_m - z_n) \frac{\partial f_n(z')}{\partial z'} \right|_{z_n} - \left. \underline{\psi}(z_m - z_{n-1}) \frac{\partial f_n(z')}{\partial z'} \right|_{z_{n-1}} \right. \\
&\quad \left. + \left. \underline{\psi}(z_m - z_{n+1}) \frac{\partial f_n(z')}{\partial z'} \right|_{z_{n+1}} - \left. \underline{\psi}(z_m - z_n) \frac{\partial f_n(z')}{\partial z'} \right|_{z_n} \right) \\
&= j \frac{Z_F 2\pi\rho}{\beta} \left( \frac{e^{-j\beta R_{m,n}} \beta \cos(\beta \Delta z)}{4\pi R_{m,n} \sin(\beta \Delta z)} - \frac{e^{-j\beta R_{m,n-1}} \beta}{4\pi R_{m,n-1} \sin(\beta \Delta z)} \right. \\
&\quad \left. - \frac{e^{-j\beta R_{m,n+1}} \beta}{4\pi R_{m,n+1} \sin(\beta \Delta z)} + \frac{e^{-j\beta R_{m,n}} \beta \cos(\beta \Delta z)}{4\pi R_{m,n} \sin(\beta \Delta z)} \right) \\
&= -j \frac{1}{2} Z_F \rho \left( \frac{e^{-j\beta R_{m,n-1}}}{R_{m,n-1} \sin(\beta \Delta z)} - \frac{e^{-j\beta R_{m,n}} \sin(2\beta \Delta z)}{R_{m,n} \sin^2(\beta \Delta z)} + \frac{e^{-j\beta R_{m,n+1}}}{R_{m,n+1} \sin(\beta \Delta z)} \right).
\end{aligned}$$

#### Aufgabe 4.5

```
function J = momentenmethode(l, rho, N)
% MOMENTENMETHODE Strombelegung einer Dipolantenne berechnen.
```

<sup>5</sup>Es wird das Additionstheorem  $\sin(2\alpha) = 2 \sin(\alpha) \cos(\alpha)$  verwendet.

```

% Dipolantenne mit auf die Wellenlaenge normierten Radius rho
% und normierter Laenge l.
% Es werden 2*N+1 Segmente verwendet.
% Beispielaufruf:
% J = momentenmethode(1.5, 0.005, 100);

ZF = 120*pi; % Feldwellenwiderstand
beta = 2*pi; % Phasenkonstante
U = 1; % Fusspunktspannung
deltaz = 1/(2*N+1); % Segmentlaenge

% Impedanzmatrix berechnen
[zn,zm] = meshgrid((-N:N)*deltaz, (-N:N)*deltaz);
Z = -j*ZF*rho/2*( ...
    exp(-j*beta*sqrt(rho^2+(zm-zn+deltaz).^2)) ...
    ./sqrt(rho^2+(zm-zn+deltaz).^2)/sin(beta*deltaz) ...
    -exp(-j*beta*sqrt(rho^2+(zm-zn).^2)) ...
    *sin(2*beta*deltaz) ...
    ./sqrt(rho^2+(zm-zn).^2)/sin(beta*deltaz)^2 ...
    +exp(-j*beta*sqrt(rho^2+(zm-zn-deltaz).^2)) ...
    ./sqrt(rho^2+(zm-zn-deltaz).^2)/sin(beta*deltaz));

% Strombelegung durch Loesen des linearen Gleichungssystems
E = zeros(2*N+1, 1);
E(N+1) = -U/deltaz;
J = inv(Z)*E;

end

```

**Aufgabe 5.1** Aus der Länge  $l = \lambda/2$  der Dipolantenne folgt mit (4.43)

$$\frac{\beta l}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

Einsetzen in (5.21) ergibt mit (5.18) den Gruppenrichtungsfaktor

$$\underline{E}_G(\vartheta) = -\frac{2\underline{I}_0}{\beta} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos(\vartheta)\right)}{\sin^2(\vartheta)}$$

mit dem Betrag

$$|\underline{E}_G(\vartheta)| = \frac{2|\underline{I}_0|}{\beta} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos(\vartheta)\right)}{\sin^2(\vartheta)}.$$

In der Hauptstrahlrichtung  $\vartheta_{\max} = \pi/2$  erhält man

$$|\underline{E}_G|_{\max} = \frac{2 |\underline{I}_0|}{\beta}.$$

Mit (5.16) erhält man die Richtcharakteristik

$$C(\vartheta) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos(\vartheta)\right)}{\sin(\vartheta)}.$$

Der Richtfaktor ergibt sich mit (5.17) und der Substitution  $z = \cos(\vartheta)$  zu<sup>6</sup>

$$\begin{aligned} D &= \frac{2}{\int_0^\pi \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cos(\vartheta)\right)}{\sin(\vartheta)} d\vartheta} = \frac{2}{\int_{-1}^{+1} \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} z\right)}{1-z^2} dz} \\ &= \frac{4}{\int_{-1}^{+1} \left(\frac{1}{1-z} + \frac{1}{1+z}\right) \cos^2\left(\frac{\pi}{2} z\right) dz} \\ &= \frac{4}{\int_0^2 \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{2} z\right)}{z} dz + \int_0^2 \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{2} z\right)}{z} dz} = \frac{2}{\int_0^2 \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{2} z\right)}{z} dz} \\ &\approx \frac{2}{1,22} = 1,64. \end{aligned}$$

**Aufgabe 5.2** Der Gruppenrichtungsfaktor der konstant belegten Dipolantenne der Länge  $l = \lambda/2$  ergibt sich gemäß (5.19) als Fourier-Transformierte der Strombelegung  $\underline{I}(z')$ :<sup>7</sup>

$$\begin{aligned} \underline{E}_G(\beta_z) &= \underline{I}_0 \int_{-l/2}^{+l/2} e^{j\beta_z z'} dz' = 2\underline{I}_0 \int_0^{+l/2} \cos(\beta_z z') dz' = 2\underline{I}_0 \left[ \frac{\sin(\beta_z z')}{\beta_z} \right]_{z'=0}^{+l/2} \\ &= 2\underline{I}_0 \frac{\sin\left(\beta_z \frac{l}{2}\right)}{\beta_z} = \underline{I}_0 l \operatorname{si}\left(\frac{l}{2} \beta_z\right). \end{aligned}$$

Einsetzen von (5.18) ergibt

$$\underline{E}_G(\vartheta) = \underline{I}_0 l \operatorname{si}\left(\frac{l}{2} \beta \cos(\vartheta)\right).$$

<sup>6</sup>Es gilt  $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$ .

<sup>7</sup>Es wird die Eulersche Formel  $e^{j\alpha} = \cos(\alpha) + j \sin(\alpha)$  verwendet.



**Aufgabe 5.3** Mit (5.27) berechnet man den Gruppenrichtungsfaktor<sup>89</sup>

$$\begin{aligned}
\underline{E}_G(\beta_y, \beta_z) &= \underline{J}_{F0} \int_{-a/2}^{+a/2} \cos\left(\frac{\pi y'}{a}\right) e^{j\beta_y y'} dy' \int_{-b/2}^{+b/2} e^{j\beta_z z'} dz' \\
&= \underline{J}_{F0} \int_{-a/2}^{+a/2} \cos\left(\frac{\pi y'}{a}\right) \cos(\beta_y y') dy' \int_{-b/2}^{+b/2} \cos(\beta_z z') dz' \\
&= 2\underline{J}_{F0} \int_0^{+a/2} \left( \cos\left(\left(\frac{\pi}{a} - \beta_y\right) y'\right) + \cos\left(\left(\frac{\pi}{a} + \beta_y\right) y'\right) \right) dy' \int_0^{+b/2} \cos(\beta_z z') dz' \\
&= 2\underline{J}_{F0} \left( \left[ \frac{\sin\left(\left(\frac{\pi}{a} - \beta_y\right) y'\right)}{\frac{\pi}{a} - \beta_y} \right]_{z'=0}^{a/2} + \left[ \frac{\sin\left(\left(\frac{\pi}{a} + \beta_y\right) y'\right)}{\frac{\pi}{a} + \beta_y} \right]_{z'=0}^{a/2} \right) \left[ \frac{\sin(\beta_z z')}{\beta_z} \right]_{z'=0}^{b/2} \\
&= \frac{1}{2} \underline{J}_{F0} ab \left( \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta_y \frac{a}{2}\right)}{\frac{\pi}{2} - \beta_y \frac{a}{2}} + \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \beta_y \frac{a}{2}\right)}{\frac{\pi}{2} + \beta_y \frac{a}{2}} \right) \frac{\sin\left(\beta_z \frac{b}{2}\right)}{\beta_z \frac{b}{2}} \\
&= \frac{1}{2} \underline{J}_{F0} ab \left( \frac{\cos\left(\beta_y \frac{a}{2}\right)}{\frac{\pi}{2} - \beta_y \frac{a}{2}} + \frac{\cos\left(\beta_y \frac{a}{2}\right)}{\frac{\pi}{2} + \beta_y \frac{a}{2}} \right) \text{si}\left(\beta_z \frac{b}{2}\right) = \frac{2\underline{J}_{F0} ab \cos\left(\beta_y \frac{a}{2}\right)}{\pi \left(1 - \left(\frac{\beta_y a}{\pi}\right)^2\right)} \text{si}\left(\beta_z \frac{b}{2}\right).
\end{aligned}$$

Der Betrag des Gruppenrichtungsfaktors  $\underline{E}_G(\beta_y, \beta_z)$  ist

$$|\underline{E}_G(\beta_y, \beta_z)| = \frac{2|\underline{J}_{F0}| ab}{\pi} \left| \frac{\cos\left(\beta_y \frac{a}{2}\right)}{1 - \left(\frac{\beta_y a}{\pi}\right)^2} \right| \left| \text{si}\left(\beta_z \frac{b}{2}\right) \right|.$$

Die Hauptstrahlrichtung ist  $\beta_y = 0$  und  $\beta_z = 0$ , das heißt senkrecht zur Apertur. Der dort erreichte Maximalwert des Betrags des Gruppenrichtungsfaktors  $\underline{E}_G(\beta_y, \beta_z)$  berechnet sich zu

$$|\underline{E}_G|_{\max} = \frac{2\underline{J}_{F0} ab}{\pi},$$

so dass man mit (5.24) die Gruppenrichtcharakteristik

$$C_G(\beta_y, \beta_z) = \left| \frac{\cos\left(\beta_y \frac{a}{2}\right)}{1 - \left(\frac{\beta_y a}{\pi}\right)^2} \right| \left| \text{si}\left(\beta_z \frac{b}{2}\right) \right|$$

erhält, siehe Abbildung E.6.

<sup>8</sup>Es wird die Eulersche Formel  $e^{j\alpha} = \cos(\alpha) + j \sin(\alpha)$  verwendet.

<sup>9</sup>Es wird das Additionstheorem  $\cos(\alpha) \cos(\beta) = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$  verwendet.

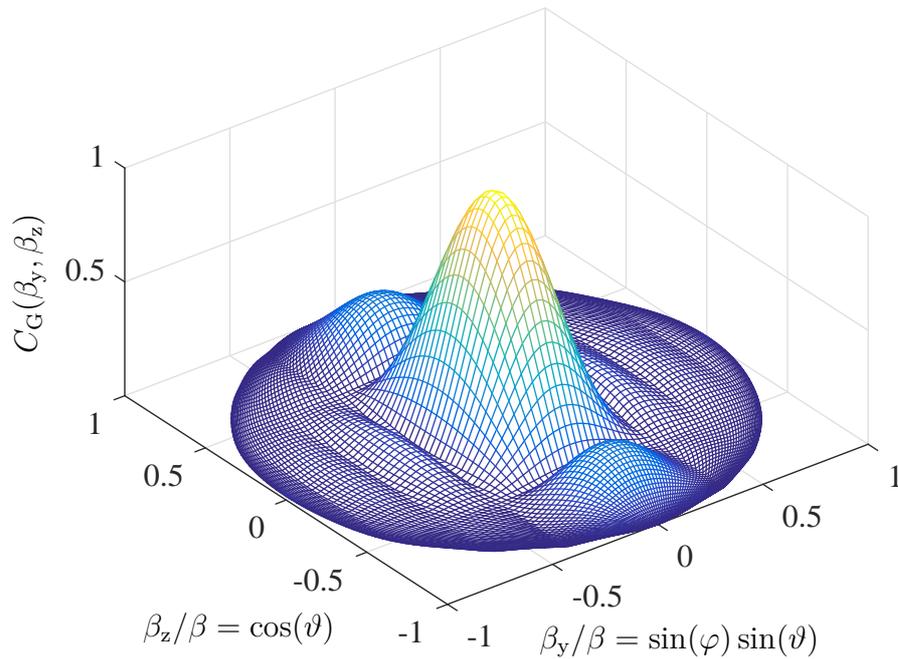


Abbildung E.6.: Gruppenrichtcharakteristik  $C_G(\beta_y, \beta_z)$  einer rechteckförmigen Aperturantenne mit kosinusförmiger Strombelegung. Breite  $a = 4\lambda$  und Höhe  $b = 2\lambda$

Für stark bündelnde Aperturantennen entspricht die Richtcharakteristik  $C(\beta_y, \beta_z)$  ungefähr der Gruppenrichtcharakteristik  $C_G(\beta_y, \beta_z)$  und der Richtfaktor kann gemäß (5.36) näherungsweise aus der Gruppenrichtcharakteristik alleine berechnet werden:

$$D \approx \frac{4\pi\beta^2}{\int_{\beta_z=-\infty}^{\infty} \int_{\beta_y=-\infty}^{\infty} \left( \frac{\cos(\beta_y \frac{a}{2})}{1 - \left(\frac{\beta_y a}{\pi}\right)^2} \right)^2 \text{si}^2\left(\beta_z \frac{b}{2}\right) d\beta_y d\beta_z}.$$

Die auftretenden Integrale berechnen sich zu<sup>10</sup>

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{si}^2\left(\beta_z \frac{b}{2}\right) d\beta_z = \frac{2\pi}{b}$$

<sup>10</sup>Es wird das bestimmte Integral  $\int_{-\infty}^{\infty} \text{si}^2(ax) dx = \frac{\pi}{|a|}$  verwendet.

und<sup>11</sup>

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\cos\left(\beta_y \frac{a}{2}\right)}{1 - \left(\frac{\beta_y a}{\pi}\right)^2} \right)^2 d\beta_y = \frac{\pi^4}{8} \int_0^{\infty} \left( \frac{\cos\left(\beta_y \frac{a}{2}\right)}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \left(\beta_y \frac{a}{2}\right)^2} \right)^2 d\beta_y = \frac{\pi^3}{4a}.$$

Mit (4.43) erhält man schließlich den Richtfaktor

$$D \approx \frac{8\beta^2 ab}{\pi^3} = 32 \frac{ab}{\pi \lambda^2}.$$

**Aufgabe 5.4** Da die Richtcharakteristik  $C(\vartheta)$  nur vom Poldistanzwinkel  $\vartheta$  abhängt, berechnet sich der Richtfaktor entsprechend (5.17) zu

$$D = \frac{2}{\int_0^{\pi} \frac{1}{N^2} \left| \sum_{n=0}^{N-1} e^{jn(\beta d \cos(\vartheta) - \psi)} \right|^2 \sin(\vartheta) d\vartheta}.$$

Mit der Substitution

$$z = \beta d \cos(\vartheta) - \psi$$

vereinfacht sich das Integral zu

$$D = \frac{2}{-\frac{1}{\beta d N^2} \int_{\beta d - \psi}^{-\beta d - \psi} \left| \sum_{n=0}^{N-1} e^{jn z} \right|^2 dz} = \frac{2}{\frac{1}{\beta d N^2} \int_{-\beta d - \psi}^{\beta d - \psi} \left( \sum_{n=0}^{N-1} e^{jn z} \right) \left( \sum_{m=0}^{N-1} e^{-jm z} \right) dz}.$$

Ausmultiplizieren ergibt den Richtfaktor

$$D = \frac{2}{\frac{1}{\beta d N^2} \int_{-\beta d - \psi}^{\beta d - \psi} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} e^{j(n-m)z} dz}.$$

Da immer Paare mit  $e^{\pm j(n-m)x}$  auftreten, kürzen sich die Sinusanteile weg und man erhält<sup>12</sup>

$$\begin{aligned} D &= \frac{2}{\frac{1}{\beta d N^2} \int_{-\beta d - \psi}^{\beta d - \psi} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} \cos((n-m)z) dz} \\ &= \frac{2}{\frac{1}{\beta d N^2} \int_{-\beta d - \psi}^{\beta d - \psi} \left( N + \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{\substack{m=0 \\ m \neq n}}^{N-1} \cos((n-m)z) \right) dz}. \end{aligned}$$

<sup>11</sup>Es wird das bestimmte Integral  $\int_0^{\infty} \frac{\cos^2(ax)}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - (ax)^2} dx = \frac{1}{\pi|a|}$  verwendet.

<sup>12</sup>Es wird die Eulersche Formel  $e^{j\alpha} = \cos(\alpha) + j \sin(\alpha)$  verwendet.

Terme mit der Indexdifferenz  $n-m = \pm p$  kommen in der Summe jeweils  $N-p$ -mal vor. Damit erhält man<sup>13</sup>

$$\begin{aligned}
 D &= \frac{2}{\frac{1}{\beta d N^2} \int_{-\beta d - \psi}^{\beta d - \psi} \left( \underbrace{\sum_{p=1}^{N-1} (N-p) \cos(pz)}_{n-m=-p} + \underbrace{N}_{n-m=0} + \underbrace{\sum_{p=1}^{N-1} (N-p) \cos(pz)}_{n-m=p} \right) dz} \\
 &= \frac{\frac{1}{\beta d N^2} \left[ Nz + 2 \sum_{p=1}^{N-1} \frac{N-p}{p} \sin(pz) \right]_{z=-\beta d - \psi}^{\beta d - \psi}}{2} \\
 &= \frac{\frac{1}{\beta d N^2} \left( 2\beta d N + 2 \sum_{p=1}^{N-1} (\sin(p(\beta d - \psi)) - \sin(p(-\beta d - \psi))) \right)}{N} \\
 &= 1 + \frac{2}{N} \sum_{p=1}^{N-1} (N-p) \frac{\sin(p\beta d) \cos(p\psi)}{p\beta d},
 \end{aligned}$$

siehe Abbildung E.7.

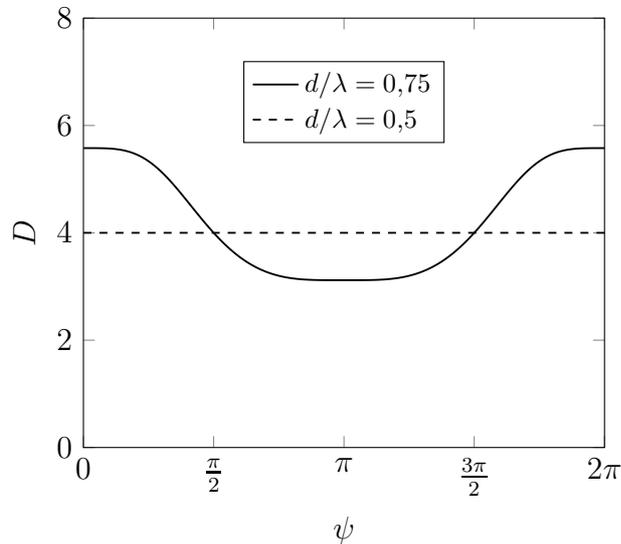


Abbildung E.7.: Richtfaktor  $D$  einer linearen Gruppenantenne.  $N = 4$

---

<sup>13</sup>Es wird das Additionstheorem  $\sin(\alpha) - \sin(\beta) = 2 \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$  verwendet.

Speziell für  $d = \lambda/2$  ist gemäß (4.43)  $\beta d = \pi$  und es folgt  $D = N$ . Bei anderen Antennennabständen auftretende abweichende Ergebnisse erklären sich dadurch, dass Verkopplungen der Antennenelemente nirgends korrekt berücksichtigt wurden.

**Aufgabe 5.5** Die Gruppenantenne aus  $N = 1$  Antennenelementen ist der Trivialfall mit dem Gruppenrichtungsfaktor

$$\underline{F}_{G1} = \underline{I}_0,$$

siehe (5.45). Durch Anwenden des Multiplikativen Gesetzes erhält man unter Verwenden des Gruppenrichtungsfaktors  $1 + e^{j\beta d \cos(\vartheta)}$  der Gruppenantenne aus zwei Antennenelementen mit konstanter Strombelegung für die Gruppenantenne mit binomialer Strombelegung mit einem zusätzlichen Antennenelement den Gruppenrichtungsfaktor<sup>14</sup>

$$\begin{aligned} \underline{F}_{GN+1} &= \underline{F}_{GN} (1 + e^{j\beta d \cos(\vartheta)}) = \underline{F}_{GN} e^{j\frac{1}{2}\beta d \cos(\vartheta)} (e^{-j\frac{1}{2}\beta d \cos(\vartheta)} + e^{j\frac{1}{2}\beta d \cos(\vartheta)}) \\ &= \underline{F}_{GN} 2 e^{j\frac{1}{2}\beta d \cos(\vartheta)} \cos\left(\frac{1}{2}\beta d \cos(\vartheta)\right). \end{aligned}$$

Iteratives Anwenden ergibt

$$\underline{F}_{GN} = \underline{I}_0 \left( 2 e^{j\frac{1}{2}\beta d \cos(\vartheta)} \cos\left(\frac{1}{2}\beta d \cos(\vartheta)\right) \right)^{N-1}.$$

Durch Betragsbilden und Normieren erhält man die Gruppenrichtcharakteristik

$$C_{GN} = \left| \cos\left(\frac{1}{2}\beta d \cos(\vartheta)\right) \right|^{N-1},$$

siehe (5.41). Speziell für einen Abstand von  $d = \lambda/2$  gilt

$$C_{GN} = \left| \cos\left(\frac{\pi}{2} \cos(\vartheta)\right) \right|^{N-1},$$

siehe Abbildung E.8. Diese Gruppenrichtcharakteristik hat keine Nebenkeulen.

Falls omnidirektionale Antennenelemente verwendet werden, entspricht die Richtcharakteristik  $C$  der Gruppenrichtcharakteristik. Da die Richtcharakteristik nur von  $\vartheta$  abhängt, ergibt sich der Richtfaktor entsprechend (5.17) zu

$$D = \frac{2}{\int_0^\pi C^2 \sin(\vartheta) d\vartheta} = \frac{2}{\int_0^\pi \left( \cos\left(\frac{\pi}{2} \cos(\vartheta)\right) \right)^{2(N-1)} \sin(\vartheta) d\vartheta}.$$

<sup>14</sup>Es wird die Eulersche Formel  $e^{j\alpha} = \cos(\alpha) + j \sin(\alpha)$  verwendet.

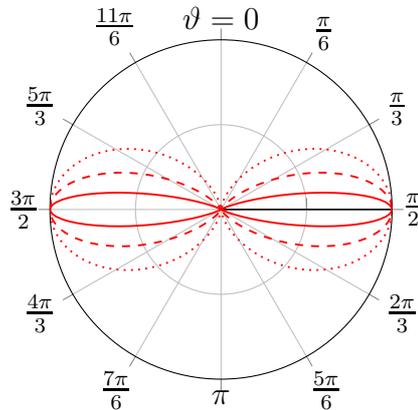


Abbildung E.8.: Vertikaldiagramm der Gruppenrichtcharakteristik einer Gruppenantenne mit binomialer Strombelegung. Gepunktet  $N = 2$  Antennenelemente, gestrichelt  $N = 4$  Antennenelemente und durchgezogen  $N = 16$  Antennenelemente.  $d = \lambda/2$

Mit der Substitution  $z = \cos(\vartheta)$  vereinfacht sich das Integral zu <sup>15</sup>

$$\begin{aligned}
 D &= \frac{2}{\int_{-1}^{+1} \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}z\right)\right)^{2(N-1)} dz} = \frac{2}{\int_{-1}^{+1} \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}z\right)\right)^{2(N-1)} dz} \\
 &= \frac{2}{\frac{2N-3}{2N-2} \int_{-1}^{+1} \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}z\right)\right)^{2(N-2)} dz} = \frac{2}{\frac{2N-3}{2N-2} \frac{2N-5}{2N-4} \int_{-1}^{+1} \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}z\right)\right)^{2(N-3)} dz} \\
 &= \dots = \frac{2}{\underbrace{\frac{2N-3}{2N-2} \frac{2N-5}{2N-4} \dots \frac{3}{4} \int_{-1}^{+1} \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}z\right)\right)^2 dz}_1} \\
 &= \frac{(2N-2)(2N-4)\dots 2}{(2N-3)(2N-5)\dots 1}.
 \end{aligned}$$

**Aufgabe 6.1** Mit (6.5) ergibt sich die Wellenlänge zu

$$\lambda = \sqrt{\frac{4\pi A_R}{G_R}} = 1,12 \text{ m.}$$

---

<sup>15</sup>Es wird die Rekursionsformel  $\int (\cos(ax))^n dx = \frac{(\cos(ax))^{n-1} \sin(ax)}{na} + \frac{n-1}{n} \int (\cos(ax))^{n-2} dx$  zum Berechnen der Stammfunktion verwendet.

Die Intensität am Ort des Empfängers ergibt sich mit (6.2) und dem Gewinn  $G_T = 1$  der Sendeantenne zu

$$S = \frac{P_T}{4\pi r^2} = 7,958 \mu\text{W m}^{-2}.$$

Schließlich erhält man mit (6.1) die Empfangsleistung

$$P_R = SA_R = 7,958 \mu\text{W}.$$

**Aufgabe 6.2** Oberhalb der Grenzfläche, das heißt im Gebiet 1, existieren die einfallende und die reflektierte elektromagnetische Welle mit den Normalkomponenten

$$\underline{S}_{Iz} = \frac{1}{2Z_{F1}} |\underline{E}_{I0y}|^2 \cos(\alpha_I)$$

und

$$\underline{S}_{Rz} = -\frac{1}{2Z_{F1}} |\underline{E}_{R0y}|^2 \cos(\alpha_I) = -\frac{\Gamma_{\perp}^2}{2Z_{F1}} |\underline{E}_{I0y}|^2 \cos(\alpha_I)$$

der komplexen Poynting-Vektoren, siehe (2.29). Dies ergibt nach Überlagern eine Normalkomponente

$$\underline{S}_{Iz} + \underline{S}_{Rz} = \frac{1 - \Gamma_{\perp}^2}{2Z_{F1}} |\underline{E}_{I0y}|^2 \cos(\alpha_I) = \frac{2Z_{F2} \cos^2(\alpha_I) \cos(\alpha_T)}{(Z_{F2} \cos(\alpha_I) + Z_{F1} \cos(\alpha_T))^2} |\underline{E}_{I0y}|^2$$

des resultierenden komplexen Poynting-Vektors, wobei im letzten Schritt der Reflexionsfaktor  $\Gamma_{\perp}$  für senkrechte Polarisation gemäß (6.20) eingesetzt wurde.

Die Normalkomponente des komplexen Poynting-Vektors der transmittierten Welle im Gebiet 2 ergibt sich mit dem Transmissionsfaktor  $T_{\perp}$  für senkrechte Polarisation gemäß (6.21) zu

$$\begin{aligned} \underline{S}_{Tz} &= \frac{1}{2Z_{F2}} |\underline{E}_{T0y}|^2 \cos(\alpha_T) = \frac{T_{\perp}^2}{2Z_{F2}} |\underline{E}_{I0y}|^2 \cos(\alpha_T) \\ &= \frac{2Z_{F2} \cos^2(\alpha_I) \cos(\alpha_T)}{(Z_{F2} \cos(\alpha_I) + Z_{F1} \cos(\alpha_T))^2} |\underline{E}_{I0y}|^2. \end{aligned}$$

Man erkennt, dass die Normalkomponenten der komplexen Poynting-Vektoren gleich sind.

**Aufgabe 6.3** Es wird der Einfallswinkel  $\alpha_I = \alpha_B$  gesucht, für den der Reflexionsfaktor Null wird. Im Fall senkrechter Polarisation folgt durch Nullsetzen des Zählerterms des Reflexionsfaktors  $\Gamma_{\perp}$  gemäß (6.20) die folgende Bedingung:<sup>16</sup>

$$0 = Z_{F2} \cos(\alpha_B) - Z_{F1} \cos(\alpha_T),$$

$$\frac{Z_{F2}^2}{Z_{F1}^2} = \frac{\cos^2(\alpha_T)}{\cos^2(\alpha_B)} = \frac{1 - \sin^2(\alpha_T)}{1 - \sin^2(\alpha_B)} = \frac{\frac{1}{\sin^2(\alpha_B)} - \frac{\sin^2(\alpha_T)}{\sin^2(\alpha_B)}}{\frac{1}{\sin^2(\alpha_B)} - 1},$$

$$\frac{1}{\sin^2(\alpha_B)} \left( \frac{Z_{F2}^2}{Z_{F1}^2} - 1 \right) = \frac{Z_{F2}^2}{Z_{F1}^2} - \frac{\sin^2(\alpha_T)}{\sin^2(\alpha_B)}.$$

Mit dem Snellius'schen Brechungsgesetz (6.14), (2.24) und dem sich mit den Feldwellenwiderständen gemäß (2.25) ergebenden Verhältnis

$$\frac{Z_{F2}}{Z_{F1}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_1 \mu_2}{\varepsilon_2 \mu_1}}$$

folgt:

$$\frac{1}{\sin^2(\alpha_B)} \left( \frac{\varepsilon_1 \mu_2}{\varepsilon_2 \mu_1} - 1 \right) = \frac{\varepsilon_1 \mu_2}{\varepsilon_2 \mu_1} - \frac{\varepsilon_1 \mu_1}{\varepsilon_2 \mu_2},$$

$$\frac{1}{\sin^2(\alpha_B)} \left( \frac{\mu_2}{\mu_1} - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \right) = \frac{\mu_2}{\mu_1} - \frac{\mu_1}{\mu_2},$$

$$\sin(\alpha_B) = \sqrt{\frac{\frac{\mu_2}{\mu_1} - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}{\frac{\mu_2}{\mu_1} - \frac{\mu_1}{\mu_2}}}.$$

Speziell für  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$  erhält man:<sup>16</sup>

$$\sin(\alpha_B) = \sqrt{\frac{\frac{\mu_2}{\mu_1} - 1}{\frac{\mu_2}{\mu_1} - \frac{\mu_1}{\mu_2}}},$$

$$\cos(\alpha_B) = \sqrt{1 - \sin^2(\alpha_B)} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\mu_1}{\mu_2}}{\frac{\mu_2}{\mu_1} - \frac{\mu_1}{\mu_2}}},$$

$$\frac{\sin(\alpha_B)}{\cos(\alpha_B)} = \sqrt{\frac{\frac{\mu_2}{\mu_1} - 1}{1 - \frac{\mu_1}{\mu_2}}} = \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}},$$

$$\alpha_B = \arctan\left(\sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}}\right).$$

---

<sup>16</sup>Es gilt  $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$ .

Im Fall paralleler Polarisation folgt durch Nullsetzen des Zählerterms des Reflexionsfaktors  $\Gamma_{\parallel}$  gemäß (6.25) die folgende Bedingung:<sup>17</sup>

$$\begin{aligned}
 0 &= Z_{F1} \cos(\alpha_B) - Z_{F2} \cos(\alpha_T), \\
 \frac{Z_{F1}^2}{Z_{F2}^2} &= \frac{\cos^2(\alpha_T)}{\cos^2(\alpha_B)} = \frac{1 - \sin^2(\alpha_T)}{1 - \sin^2(\alpha_B)} = \frac{\frac{1}{\sin^2(\alpha_B)} - \frac{\sin^2(\alpha_T)}{\sin^2(\alpha_B)}}{\frac{1}{\sin^2(\alpha_B)} - 1}, \\
 \frac{1}{\sin^2(\alpha_B)} \left( \frac{Z_{F1}^2}{Z_{F2}^2} - 1 \right) &= \frac{Z_{F1}^2}{Z_{F2}^2} - \frac{\sin^2(\alpha_T)}{\sin^2(\alpha_B)}, \\
 \frac{1}{\sin^2(\alpha_B)} \left( \frac{\varepsilon_2 \mu_1}{\varepsilon_1 \mu_2} - 1 \right) &= \frac{\varepsilon_2 \mu_1}{\varepsilon_1 \mu_2} - \frac{\varepsilon_1 \mu_1}{\varepsilon_2 \mu_2}, \\
 \frac{1}{\sin^2(\alpha_B)} \left( \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - \frac{\mu_2}{\mu_1} \right) &= \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}, \\
 \sin(\alpha_B) &= \sqrt{\frac{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - \frac{\mu_2}{\mu_1}}{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}}.
 \end{aligned}$$

Speziell für  $\mu_1 = \mu_2$  erhält man:<sup>17</sup>

$$\begin{aligned}
 \sin(\alpha_B) &= \sqrt{\frac{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - 1}{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}}, \\
 \cos(\alpha_B) &= \sqrt{1 - \sin^2(\alpha_B)} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}}, \\
 \frac{\sin(\alpha_B)}{\cos(\alpha_B)} &= \sqrt{\frac{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - 1}{1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}, \\
 \alpha_B &= \arctan\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}\right).
 \end{aligned}$$

**Aufgabe 6.4** Mit (6.36) erhält man die Phasenlaufzeit

$$t_p = \int dt = \int \frac{dz}{v_p(z)} = \int \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p(z)}{\omega}\right)^2}}{c_0} dz.$$

Mit der Approximation

$$\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p(z)}{\omega}\right)^2} \approx 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\omega_p(z)}{\omega}\right)^2$$

<sup>17</sup>Es gilt  $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$ .

folgt

$$t_p \approx \underbrace{\int \frac{dz}{c_0}}_{t_0} - \int \frac{\omega_p^2(z)}{2c_0\omega^2} dz.$$

Die um den Ionosphärenfehler bereinigte Phasenlaufzeit ergibt sich mit (6.33) zu

$$t_0 \approx t_p + \frac{1}{2c_0\omega^2} \int \omega_p^2(z) dz = t_p + \underbrace{\frac{e^2}{2m_e\varepsilon_0c_0} \int n(z) dz}_k \frac{1}{\omega^2}.$$

Der einzige Unterschied zur Ionosphärenfehlerkorrektur bei Gruppenlaufzeitmessungen besteht im Vorzeichen des Fehlers.

Messen der Phasenlaufzeiten bei zwei verschiedenen Kreisfrequenzen ergibt zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten  $k$  und  $t_0$ :

$$\begin{aligned} t_{p1} &\approx t_0 + \frac{k}{\omega_1^2}, \\ t_{p2} &\approx t_0 + \frac{k}{\omega_2^2}. \end{aligned}$$

Man erhält die um den Ionosphärenfehler bereinigte Phasenlaufzeit

$$t_0 \approx \frac{\omega_1^2 t_{p1} - \omega_2^2 t_{p2}}{\omega_1^2 - \omega_2^2}.$$

**Aufgabe 6.5** Die Länge des direkten Pfades ergibt sich zu

$$r^{(1)} = \sqrt{r^2 + (h_T - h_R)^2} \approx r + \frac{(h_T - h_R)^2}{2r},$$

siehe Abbildung E.9. Der reflektierte Pfad scheint von einem gespiegelten Sender auszugehen, siehe Abbildung 4.7. Die Länge des reflektierten Pfades ergibt sich zu

$$r^{(2)} = \sqrt{r^2 + (h_T + h_R)^2} \approx r + \frac{(h_T + h_R)^2}{2r},$$

siehe Abbildung E.9. Die Näherungen gelten jeweils für den betrachteten Fall, dass der horizontale Abstand viel größer als die Höhen ist, das heißt dass  $h_T/r$  und  $h_R/r$  sehr klein sind.

Mit (6.7) folgt die Transfermatrix

$$\mathbf{T}^{(1)} \approx \frac{e^{-j\beta\left(r + \frac{(h_T - h_R)^2}{2r}\right)}}{r + \frac{(h_T - h_R)^2}{2r}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \approx \frac{e^{-j\beta r}}{r} e^{-j\beta \frac{(h_T - h_R)^2}{2r}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

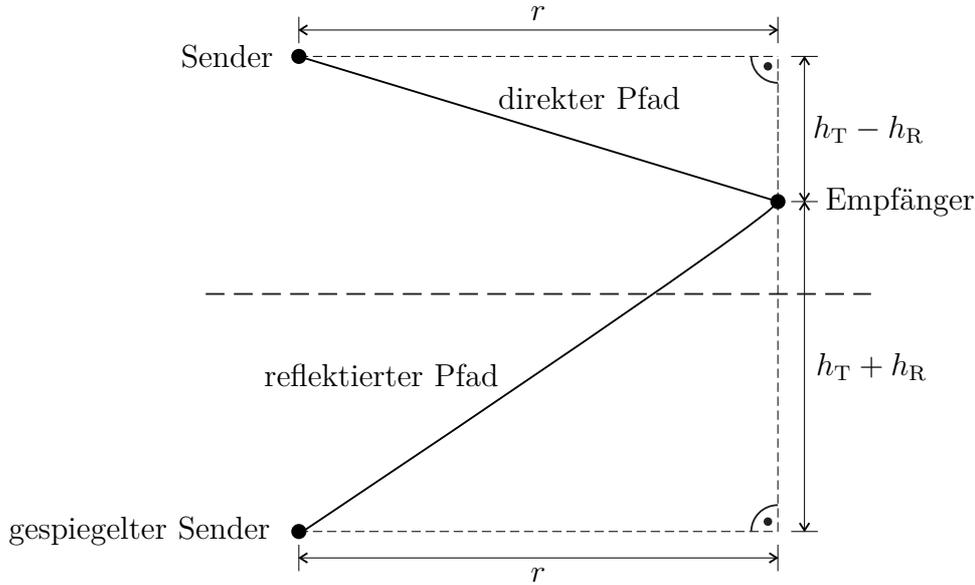


Abbildung E.9.: Spiegelung des Senders an der ideal elektrisch leitenden Ebene

des direkten Pfades. Beim Spiegeln des Senders ergibt sich gemäß Abbildung 4.7 im Fall horizontaler Polarisation eine zusätzliche Phasendrehung um  $\pi$ , vergleiche auch (6.28) und Abbildung 6.4. Mit (6.7) folgt die Transfermatrix

$$\underline{\mathbf{T}}^{(2)} \approx \frac{e^{-j\beta\left(r + \frac{(h_T + h_R)^2}{2r}\right)}}{r + \frac{(h_T + h_R)^2}{2r}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \approx \frac{e^{-j\beta r}}{r} e^{-j\beta \frac{(h_T + h_R)^2}{2r}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

des gespiegelten Pfades.

Entsprechend (6.49) erhält man mit (4.43) im Fall vertikaler Polarisation die Empfangsleistung<sup>18</sup>

$$\begin{aligned} P_R &\approx P_T \left( \frac{\lambda}{4\pi} \right)^2 \left| \frac{e^{-j\beta r}}{r} e^{-j\beta \frac{(h_T - h_R)^2}{2r}} + \frac{e^{-j\beta r}}{r} e^{-j\beta \frac{(h_T + h_R)^2}{2r}} \right|^2 \\ &= P_T \left( \frac{\lambda}{4\pi r} \right)^2 \left| e^{j\beta \frac{h_T h_R}{r}} + e^{-j\beta \frac{h_T h_R}{r}} \right|^2 = P_T \left( \frac{\lambda}{2\pi r} \right)^2 \cos^2 \left( 2\pi \frac{h_T h_R}{\lambda r} \right) \approx P_T \left( \frac{\lambda}{2\pi r} \right)^2. \end{aligned}$$

Die Näherung in der letzten Zeile gilt für sehr große horizontale Abstände  $r$ . Für sehr große horizontale Abstände  $r$  überlagern sich im Fall vertikaler Polarisation die Beiträge der beiden Pfade konstruktiv, so dass sich im Vergleich zur Freiraumbreitung (6.6) die doppelte Amplitude und die vierfache Leistung ergeben.

<sup>18</sup>Es wird die Eulersche Formel  $e^{j\alpha} = \cos(\alpha) + j \sin(\alpha)$  verwendet.

Im Fall horizontaler Polarisation erhält man auf analoge Art und Weise die Empfangsleistung<sup>19</sup>

$$P_R \approx P_T \left( \frac{\lambda}{4\pi r} \right)^2 \left| -\frac{e^{-j\beta r}}{r} e^{-j\beta \frac{(h_T - h_R)^2}{2r}} + \frac{e^{-j\beta r}}{r} e^{-j\beta \frac{(h_T + h_R)^2}{2r}} \right|^2$$

$$= P_T \left( \frac{\lambda}{4\pi r} \right)^2 \left| e^{j\beta \frac{h_T h_R}{r}} + e^{-j\beta \frac{h_T h_R}{r}} \right|^2 = P_T \left( \frac{\lambda}{2\pi r} \right)^2 \sin^2 \left( 2\pi \frac{h_T h_R}{\lambda r} \right) \approx P_T \frac{h_T^2 h_R^2}{r^4}.$$

Für sehr große horizontale Abstände  $r$  überlagern sich im Fall horizontaler Polarisation die Beiträge der beiden Pfade fast destruktiv, so dass sich eine sehr stark mit vierter Potenz des horizontalen Abstands  $r$  abnehmende Empfangsleistung  $P_R$  ergibt.

Abbildung E.10 zeigt typische Verläufe des Übertragungsfaktors  $P_R/P_T$  als Funktion des horizontalen Abstands  $r$ . Die starken Fluktuationen im Bereich kleiner horizontaler Abstände  $r$  resultieren aus dem raschen Wechsel zwischen konstruktiver und destruktiver Interferenz der beiden Pfade.

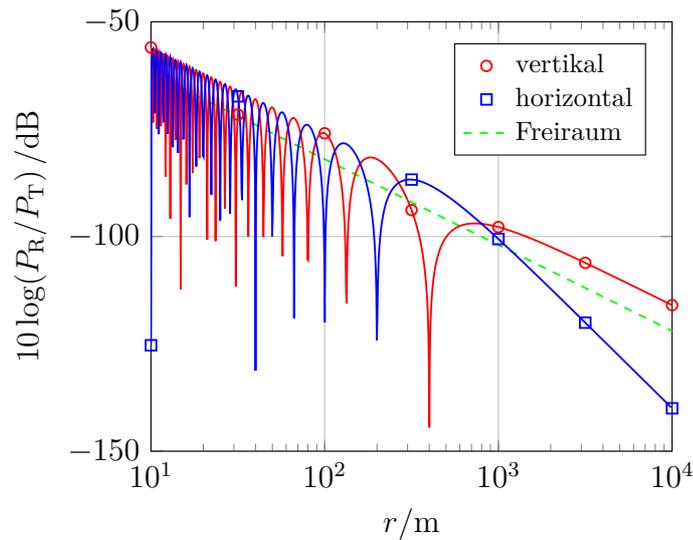


Abbildung E.10.: Übertragungsfaktor  $P_R/P_T$  als Funktion des horizontalen Abstands  $r$  bei Zweiwegeausbreitung bei unterschiedlichen linearen Polarisationen. Gestrichelt zum Vergleich Freiraumausbreitung.  $\lambda = 0,1 \text{ m}$ ,  $h_T = 10 \text{ m}$ ,  $h_R = 1 \text{ m}$

<sup>19</sup>Es wird die Eulersche Formel  $e^{j\alpha} = \cos(\alpha) + j \sin(\alpha)$  verwendet.

**Aufgabe 7.1** Die normierte resultierende komplexe Wellenamplitude lässt sich mit (7.7) und (7.13) wie folgt umformen:

$$\underline{c}'(z) = \frac{\underline{a}(z) (1 + \underline{\Gamma}(z))}{|\underline{a}_0| (1 + |\underline{\Gamma}_0|)} = \frac{\underline{a}_0 (e^{-j\beta z} + \underline{\Gamma}_0 e^{j\beta z})}{|\underline{a}_0| (1 + |\underline{\Gamma}_0|)} = \frac{e^{-j\beta z} + \underline{\Gamma}_0 e^{j\beta z}}{1 + |\underline{\Gamma}_0|} e^{j \arg(\underline{a}_0)}.$$

Der Betrag der normierten resultierenden komplexen Wellenamplitude ergibt sich zu<sup>2021</sup>

$$\begin{aligned} |\underline{c}'(z)| &= \frac{|e^{-j\beta z} + \underline{\Gamma}_0 e^{j\beta z}|}{1 + |\underline{\Gamma}_0|} = \frac{|e^{-j\beta z} (1 + |\underline{\Gamma}_0| e^{j \arg(\underline{\Gamma}_0)} e^{j2\beta z})|}{1 + |\underline{\Gamma}_0|} \\ &= \frac{1}{1 + |\underline{\Gamma}_0|} \sqrt{(1 + |\underline{\Gamma}_0| \cos(\arg(\underline{\Gamma}_0) + 2\beta z))^2 + |\underline{\Gamma}_0|^2 \sin^2(\arg(\underline{\Gamma}_0) + 2\beta z)} \\ &= \frac{1}{1 + |\underline{\Gamma}_0|} \sqrt{1 + |\underline{\Gamma}_0|^2 + 2 |\underline{\Gamma}_0| \cos(\arg(\underline{\Gamma}_0) + 2\beta z)}, \end{aligned}$$

Mit (7.15) erhält man den Betrag der normierten resultierenden komplexen Wellenamplitude abhängig von Anpassungsfaktor  $m$  und Reflexionsfaktorargument  $\arg(\underline{\Gamma}_0)$ :<sup>22</sup>

$$\begin{aligned} |\underline{c}'(z)| &= \frac{1+m}{2} \sqrt{1 + \left(\frac{1-m}{1+m}\right)^2 + 2 \frac{1-m}{1+m} \cos(\arg(\underline{\Gamma}_0) + 2\beta z)} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{(1+m)^2 + (1-m)^2 + 2(1-m^2) \cos(\arg(\underline{\Gamma}_0) + 2\beta z)} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{2 + 2m^2 + 2(1-m^2) \left(1 - 2 \sin^2\left(\frac{1}{2} \arg(\underline{\Gamma}_0) + \beta z\right)\right)} \\ &= \sqrt{1 + (m^2 - 1) \sin^2\left(\frac{1}{2} \arg(\underline{\Gamma}_0) + \beta z\right)}. \end{aligned}$$

**Aufgabe 7.2** Mit der kritischen Kreisfrequenz

$$\omega_c = \frac{\beta_c}{\sqrt{\varepsilon \mu}} = \frac{\omega_{c0}}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}},$$

siehe (2.36), (1.49) und (1.53), berechnet sich der Feldwellenwiderstand transversalelektrischer Wellen gemäß (2.31) zu

$$Z_{\text{FTE}} = \frac{Z_{\text{F}}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2}} = \frac{Z_{\text{F0}} \sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{c0}}{\omega \sqrt{\varepsilon_r \mu_r}}\right)^2}},$$

<sup>20</sup>Es wird die Eulersche Formel  $e^{j\alpha} = \cos(\alpha) + j \sin(\alpha)$  verwendet.

<sup>21</sup>Es gilt  $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$ .

<sup>22</sup>Es wird das Additionstheorem  $\cos(2\alpha) = 1 - 2 \sin^2(\alpha)$  verwendet.

siehe (2.42) und (2.25).

Unter Verwenden des Reflexionsfaktors

$$\underline{\Gamma} = \frac{\underline{E}_{R0y}}{\underline{E}_{H0y}} = -\frac{\underline{H}_{R0x}}{\underline{H}_{H0x}},$$

siehe (7.1), (7.4) und (7.7), und des Feldwellenwiderstands

$$Z_{\text{FTE1}} = -\frac{\underline{E}_{H0y}}{\underline{H}_{H0x}} = \frac{\underline{E}_{R0y}}{\underline{H}_{R0x}}$$

im ungefüllten Teil  $z < 0$  des Hohlleiters ergibt sich die Feldimpedanz

$$\underline{Z}_1 = -\frac{\underline{E}_{H0y} + \underline{E}_{R0y}}{\underline{H}_{H0x} + \underline{H}_{R0x}} = -\frac{\underline{E}_{H0y} (1 + \underline{\Gamma})}{\underline{H}_{H0x} (1 - \underline{\Gamma})} = Z_{\text{FTE1}} \frac{1 + \underline{\Gamma}}{1 - \underline{\Gamma}}$$

im ungefüllten Teil  $z < 0$  des Hohlleiters, siehe (2.32). Unter Verwenden des Feldwellenwiderstands

$$Z_{\text{FTE2}} = -\frac{\underline{E}_{T0y}}{\underline{H}_{T0x}},$$

im gefüllten Teil  $z > 0$  des Hohlleiters ergibt sich die Feldimpedanz

$$\underline{Z}_2 = -\frac{\underline{E}_{T0y}}{\underline{H}_{T0x}} = Z_{\text{FTE2}}$$

im gefüllten Teil  $z > 0$  des Hohlleiters, siehe (2.32). An der Grenzfläche müssen die resultierenden Tangentialkomponenten der Feldstärken gemäß (1.64) und (1.66) stetig sein. Es folgt, dass auch die Feldimpedanzen gleich sein müssen:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_1 &= \underline{Z}_2, \\ Z_{\text{FTE1}} \frac{1 + \underline{\Gamma}}{1 - \underline{\Gamma}} &= Z_{\text{FTE2}} \\ \underline{\Gamma} &= \frac{Z_{\text{FTE2}} - Z_{\text{FTE1}}}{Z_{\text{FTE2}} + Z_{\text{FTE1}}}. \end{aligned}$$

Damit keine Reflexion auftritt, müssen die Feldwellenwiderstände des ungefüllten und des gefüllten Hohlleiterbereichs gleich sein:

$$\begin{aligned} Z_{\text{FTE1}} &= Z_{\text{FTE2}}, \\ \frac{Z_{\text{F0}}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{c0}}{\omega}\right)^2}} &= \frac{Z_{\text{F0}} \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{c0}}{\frac{\omega}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}}}\right)^2}}, \\ 1 - \left(\frac{\frac{\omega_{c0}}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}}}{\omega}\right)^2 &= \frac{\mu_r}{\epsilon_r} \left(1 - \left(\frac{\omega_{c0}}{\omega}\right)^2\right). \end{aligned}$$

Hier ist  $\omega_{c0} = \omega/2$  und es folgt:

$$1 - \left( \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}} \right)^2 = \frac{\mu_r}{\varepsilon_r} \left( 1 - \left( \frac{1}{2} \right)^2 \right),$$

$$4 - \frac{1}{\varepsilon_r \mu_r} = 3 \frac{\mu_r}{\varepsilon_r},$$

$$3\mu_r^2 - 4\varepsilon_r \mu_r + 1 = 0.$$

Speziell für  $\varepsilon_r = 4$  erhält man eine quadratische Gleichung

$$3\mu_r^2 - 16\mu_r + 1 = 0$$

für die Permeabilität  $\mu_r$  mit den Lösungen

$$\mu_r = \frac{8}{3} \pm \sqrt{\frac{64}{9} - \frac{1}{3}} = \frac{8}{3} \pm \sqrt{\frac{61}{9}}.$$

**Aufgabe 7.3** Aus (7.24) folgt für den Reflexionsfaktor

$$\Gamma = \frac{R - Z_L}{R + Z_L}.$$

Der Betrag des Reflexionsfaktors ist

$$|\Gamma| = \pm \frac{R - Z_L}{R + Z_L},$$

wobei das obere Vorzeichen für  $R > Z_L$  gilt. Dies in (7.14) eingesetzt ergibt den Anpassungsfaktor

$$m = \frac{1 \mp \frac{R - Z_L}{R + Z_L}}{1 \pm \frac{R - Z_L}{R + Z_L}} = \frac{R + Z_L \mp R \pm Z_L}{R + Z_L \pm R \mp Z_L} = \begin{cases} \frac{Z_L}{R} & \text{falls } R > Z_L \\ \frac{R}{Z_L} & \text{falls } R < Z_L \end{cases}.$$

**Aufgabe 7.4** Eine beidseitig kurzgeschlossene Leitung der Länge  $l$  ist bei jenen Kreisfrequenzen in Resonanz, bei denen die Leitungslänge ganzzahliges Vielfaches der halben Wellenlänge ist, siehe (7.34) und (2.38):

$$l = p \frac{\lambda}{2} = p \frac{\pi}{\beta},$$

$$\frac{p\pi}{l} = \beta.$$

Zunächst werden  $\text{TE}_{m,n}$ -Wellen betrachtet, bei denen  $m$  oder  $n$  von Null verschieden sein muss. Mit (2.35) und (3.2) erhält man:

$$\begin{aligned} \left(\frac{p\pi}{l}\right)^2 = \beta^2 &= \beta_0^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2, \\ \beta_0^2 &= \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{l}\right)^2. \end{aligned}$$

Mit (2.3) folgt für die Resonanzkreisfrequenzen

$$\omega_{m,n,p} = \frac{\beta_0}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{l}\right)^2},$$

wobei  $p$  von Null verschieden sein muss.

Die kritischen Phasenkonstanten  $\beta_c$  der  $\text{TM}_{m,n}$ -Wellen berechnen sich mit der gleichen Formel (3.2), so dass sich auch die gleiche Formel für die Resonanzkreisfrequenzen  $\omega_{m,n,p}$  ergibt, mit dem Unterschied das jetzt  $m$  und  $n$  von Null verschieden sein müssen. Dafür darf  $p$  Null sein, was einer unendlichen Wellenlänge  $\lambda$  entspricht. Die Resonanzkreisfrequenz  $\omega_{m,n,0}$  entspricht dann der kritischen Kreisfrequenz der  $\text{TM}_{m,n}$ -Welle.

**Aufgabe 7.5** Mit (3.73), (3.60) und (3.61) erhält man den Wellenwiderstand

$$Z_L^{(-)} = Z_L \sqrt{\frac{1}{3}}$$

des Gegentaktmodes und den Wellenwiderstand

$$Z_L^{(+)} = Z_L \sqrt{3}$$

des Gleichtaktmodes. Aus (7.54) folgt mit (7.53)

$$\underline{Z}_{2,10} = \underline{Z}_{2,20} = Z_L^{(+)} = Z_L \sqrt{3}.$$

Aus (7.51) folgt mit (7.50)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\underline{Z}_{2,10}} + \frac{2}{\underline{Z}_{2,12}} &= \frac{1}{Z_L^{(-)}} = \frac{\sqrt{3}}{Z_L} = \frac{3}{\underline{Z}_{2,10}}, \\ \underline{Z}_{2,12} &= \underline{Z}_{2,10} = \underline{Z}_{2,20}. \end{aligned}$$

**Aufgabe 8.1** Es wird behauptet, dass die Orte konstanten normierten Wirkwiderstands  $\tilde{R}$  Kreise mit Mittelpunkt  $\frac{1}{2\tilde{R}}$  und Radius  $\frac{1}{2\tilde{R}}$  in der normierten Admittanzebene sind. Daher muss mit einem gegebenen normierten Wirkwiderstand  $\tilde{R}$  die folgende Kreisgleichung erfüllt sein:

$$\begin{aligned} \left| \tilde{Y} - \frac{1}{2\tilde{R}} \right|^2 &= \left( \frac{1}{2\tilde{R}} \right)^2, \\ \left| \frac{1}{\tilde{R} + j\tilde{X}} - \frac{1}{2\tilde{R}} \right|^2 &= \left( \frac{1}{2\tilde{R}} \right)^2, \\ |2\tilde{R} - (\tilde{R} + j\tilde{X})|^2 &= |\tilde{R} + j\tilde{X}|^2, \\ \tilde{R}^2 + \tilde{X}^2 &= \tilde{R}^2 + \tilde{X}^2. \end{aligned}$$

In der zweiten Zeile wurde die normierte Admittanz  $\tilde{Y}$  gemäß (8.5) eingesetzt.

Es wird behauptet, dass die Orte konstanten normierten Blindwiderstands  $\tilde{X}$  Kreise mit Mittelpunkt  $-j\frac{1}{2\tilde{X}}$  und Radius  $\frac{1}{2\tilde{X}}$  in der normierten Admittanzebene sind. Daher muss mit einem beliebigen gegebenen normierten Blindwiderstand  $\tilde{X}$  die folgende Kreisgleichung erfüllt sein:

$$\begin{aligned} \left| \tilde{Y} + j\frac{1}{2\tilde{X}} \right|^2 &= \left( \frac{1}{2\tilde{X}} \right)^2, \\ \left| \frac{1}{\tilde{R} + j\tilde{X}} + j\frac{1}{2\tilde{X}} \right|^2 &= \left( \frac{1}{2\tilde{X}} \right)^2, \\ |2\tilde{X} + j(\tilde{R} + j\tilde{X})|^2 &= |\tilde{R} + j\tilde{X}|^2, \\ \tilde{X}^2 + \tilde{R}^2 &= \tilde{R}^2 + \tilde{X}^2. \end{aligned}$$

In der zweiten Zeile wurde wieder die normierte Admittanz  $\tilde{Y}$  gemäß (8.5) eingesetzt.

**Aufgabe 8.2** Man wählt den Bezugswiderstand  $R_B = 100 \Omega$  und erhält so die in Tabelle E.2 zusammengestellten normierten Bauelementewerte.

Tabelle E.2.: Bauelementewerte

$R = 100 \Omega$	$\tilde{R} = 1$	$\tilde{G} = 1$
$X_L = \omega L = 200 \Omega$	$\tilde{X}_L = 2$	$\tilde{B}_L = -0,5$
$X_{C1} = -\frac{1}{\omega C_1} = -80 \Omega$	$\tilde{X}_{C1} = -0,8$	$\tilde{B}_{C1} = 1,25$
$X_{C2} = -\frac{1}{\omega C_2} = -200 \Omega$	$\tilde{X}_{C2} = -2$	$\tilde{B}_{C2} = 0,5$

Mit den Bauelementwerten zeichnet man den Transformationsweg im Inversionsdiagramm, siehe Abbildung E.11, und erhält so die Eingangsimpedanz

$$\underline{Z} = \tilde{Z}R_B = (0,5 - j0,5) R_B = (50 - j50) \Omega.$$

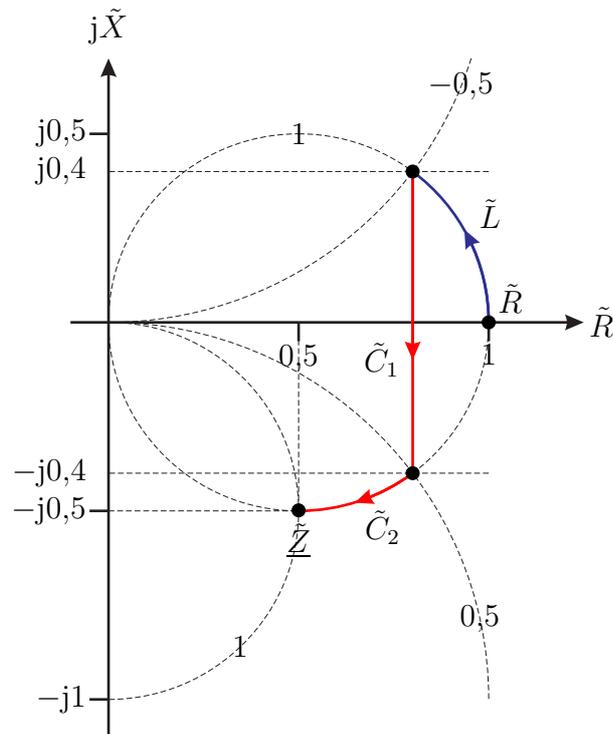


Abbildung E.11.: Transformationsweg in der Impedanzebene

**Aufgabe 8.3** Es wird behauptet, dass die Orte konstanten Anpassungsfaktors  $m$  Kreise mit Mittelpunkt  $\frac{1}{2} \left( \frac{1}{m} + m \right)$  und Radius  $\frac{1}{2} \left( \frac{1}{m} - m \right)$  in der auf den Wellenwiderstand  $Z_L$  normierten Impedanzebene sind. Daher muss mit einem gegebenen

Anpassungsfaktor  $m$  die folgende Kreisgleichung erfüllt sein:

$$\begin{aligned} \left| \tilde{Z} - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{m} + m \right) \right|^2 &= \left( \frac{1}{2} \left( \frac{1}{m} - m \right) \right)^2, \\ \left| \frac{m + j \tan(2\pi\tilde{l})}{1 + jm \tan(2\pi\tilde{l})} - \frac{1 + m^2}{2m} \right|^2 &= \left( \frac{1 - m^2}{2m} \right)^2, \\ |m^2 + jm \tan(2\pi\tilde{l}) - 1 - jm^3 \tan(2\pi\tilde{l})|^2 &= (1 - m^2)^2 |1 + jm \tan(2\pi\tilde{l})|^2, \\ (m^2 - 1)^2 |1 - jm \tan(2\pi\tilde{l})|^2 &= (1 - m^2)^2 |1 + jm \tan(2\pi\tilde{l})|^2 \\ (m^2 - 1)^2 (1 + m^2 \tan^2(2\pi\tilde{l})) &= (1 - m^2)^2 (1 + m^2 \tan^2(2\pi\tilde{l})). \end{aligned}$$

In der zweiten Zeile wurde die auf den Wellenwiderstand  $Z_L$  normierte Impedanz  $\tilde{Z}$  gemäß (8.13) eingesetzt.

Es wird behauptet, dass die Orte konstanter normierter Leitungslänge  $\tilde{l}$  Kreise mit Mittelpunkt  $-j \cot(4\pi\tilde{l})$  und Radius  $\left| \frac{1}{\sin(4\pi\tilde{l})} \right|$  in der auf den Wellenwiderstand  $Z_L$  normierten Impedanzebene sind. Daher muss mit einer gegebenen normierten Leitungslänge  $\tilde{l}$  die folgende Kreisgleichung erfüllt sein:<sup>2324</sup>

$$\begin{aligned} \left| \tilde{Z} + j \cot(4\pi\tilde{l}) \right|^2 &= \left( \frac{1}{\sin(4\pi\tilde{l})} \right)^2 \\ \left| \frac{m + j \tan(2\pi\tilde{l})}{1 + jm \tan(2\pi\tilde{l})} + j \frac{1 - \tan^2(2\pi\tilde{l})}{2 \tan(2\pi\tilde{l})} \right|^2 &= \left( \frac{1 + \tan^2(2\pi\tilde{l})}{2 \tan(2\pi\tilde{l})} \right)^2 \\ |m \tan(2\pi\tilde{l}) + j \tan^2(2\pi\tilde{l}) + j + m \tan^3(2\pi\tilde{l})|^2 & \\ &= (1 + \tan^2(2\pi\tilde{l}))^2 |1 + jm \tan(2\pi\tilde{l})|^2 \\ (1 + \tan^2(2\pi\tilde{l}))^2 |1 + jm \tan(2\pi\tilde{l})|^2 & \\ &= (1 + \tan^2(2\pi\tilde{l}))^2 |1 + jm \tan(2\pi\tilde{l})|^2. \end{aligned}$$

In der zweiten Zeile wurde wieder die auf den Wellenwiderstand  $Z_L$  normierte Impedanz  $\tilde{Z}$  gemäß (8.13) eingesetzt.

<sup>23</sup>Es wird das Additionstheorem  $\cot(2\alpha) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\tan(\alpha)} - \tan(\alpha) \right) = \frac{1 - \tan^2(\alpha)}{2 \tan(\alpha)}$  verwendet.

<sup>24</sup>Es gilt  $\frac{1}{\sin(2\alpha)} = \frac{1}{2 \sin(\alpha) \cos(\alpha)} = \frac{\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha)}{2 \sin(\alpha) \cos(\alpha)} = \frac{1 + \frac{\sin^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)}}{2 \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}} = \frac{1 + \tan^2(\alpha)}{2 \tan(\alpha)}$ .

**Aufgabe 8.4** Es wird behauptet, dass die Orte konstanten normierten Wirkwiderstands  $\tilde{R}$  Kreise mit Mittelpunkt  $\frac{\tilde{R}}{1+\tilde{R}}$  und Radius  $\frac{1}{1+\tilde{R}}$  in der Reflexionsfaktorebene sind. Daher muss mit einem gegebenen normierten Wirkwiderstand  $\tilde{R}$  die folgende Kreisgleichung erfüllt sein:

$$\begin{aligned} \left| \underline{\Gamma} - \frac{\tilde{R}}{1+\tilde{R}} \right|^2 &= \left( \frac{1}{1+\tilde{R}} \right)^2, \\ \left| \frac{\tilde{R} + j\tilde{X} - 1}{\tilde{R} + j\tilde{X} + 1} - \frac{\tilde{R}}{1+\tilde{R}} \right|^2 &= \left( \frac{1}{1+\tilde{R}} \right)^2, \\ \left| (\tilde{R} + j\tilde{X} - 1)(1 + \tilde{R}) - \tilde{R}(\tilde{R} + j\tilde{X} + 1) \right|^2 &= |\tilde{R} + j\tilde{X} + 1|^2, \\ |j\tilde{X} - 1 - \tilde{R}|^2 &= |\tilde{R} + j\tilde{X} + 1|^2, \\ (1 + \tilde{R})^2 + \tilde{X}^2 &= (\tilde{R} + 1)^2 + \tilde{X}^2. \end{aligned}$$

In der zweiten Zeile wurde der Reflexionsfaktor  $\underline{\Gamma}$  gemäß (8.15) eingesetzt, siehe auch (8.1).

Es wird behauptet, dass die Orte konstanten normierten Blindwiderstands  $\tilde{X}$  Kreise mit Mittelpunkt  $1 + j\frac{1}{\tilde{X}}$  und Radius  $\left| \frac{1}{\tilde{X}} \right|$  in der Reflexionsfaktorebene sind. Daher muss mit einem gegebenen normierten Blindwiderstand  $\tilde{X}$  die folgende Kreisgleichung erfüllt sein:

$$\begin{aligned} \left| \underline{\Gamma} - 1 - j\frac{1}{\tilde{X}} \right|^2 &= \left( \frac{1}{\tilde{X}} \right)^2, \\ \left| \frac{\tilde{R} + j\tilde{X} - 1}{\tilde{R} + j\tilde{X} + 1} - \frac{\tilde{X} + j}{\tilde{X}} \right|^2 &= \left( \frac{1}{\tilde{X}} \right)^2, \\ \left| (\tilde{R} + j\tilde{X} - 1)\tilde{X} - (\tilde{X} + j)(\tilde{R} + j\tilde{X} + 1) \right|^2 &= |\tilde{R} + j\tilde{X} + 1|^2, \\ |-\tilde{X} - j\tilde{R} - j|^2 &= |\tilde{R} + j\tilde{X} + 1|^2, \\ \tilde{X}^2 + (\tilde{R} + 1)^2 &= (\tilde{R} + 1)^2 + \tilde{X}^2. \end{aligned}$$

In der zweiten Zeile wurde wieder der Reflexionsfaktor  $\underline{\Gamma}$  gemäß (8.15) eingesetzt, siehe auch (8.1).

**Aufgabe 8.5** Der auf den Wellenwiderstand  $Z_L$  normierte Widerstand ist

$$\tilde{R} = \frac{R}{Z_L} = 1.$$

Die parallelgeschaltete kurzgeschlossene Stichleitung wirkt wie ein parallelgeschalteter normierter Blindleitwert  $\tilde{B}$ . Dieser muss so groß sein, dass das Transformationsergebnis auf dem Kreis konstanten Anpassungsfaktors  $m$  durch die auf den Wellenwiderstand  $Z_L$  normierte Eingangsimpedanz

$$\tilde{Z} = \frac{Z}{Z_L} = 4$$

liegt. Aus Abbildung E.12 liest man den erforderlichen normierten Blindleitwert

$$\tilde{B} = -1,5$$

ab. Als minimal erforderliche normierte Länge der kurzgeschlossenen Stichleitung zum Realisieren des normierten Blindleitwerts  $\tilde{B}$  liest man aus Abbildung E.12

$$\tilde{l}_1 = 0,094$$

ab. Zur Transformation in die normierte Eingangsimpedanz  $\tilde{Z}$  wird nun noch eine Leitung der kürzestmöglichen normierten Länge

$$\tilde{l}_2 = (0,25 - 0,074) = 0,176$$

benötigt, siehe Abbildung E.12.

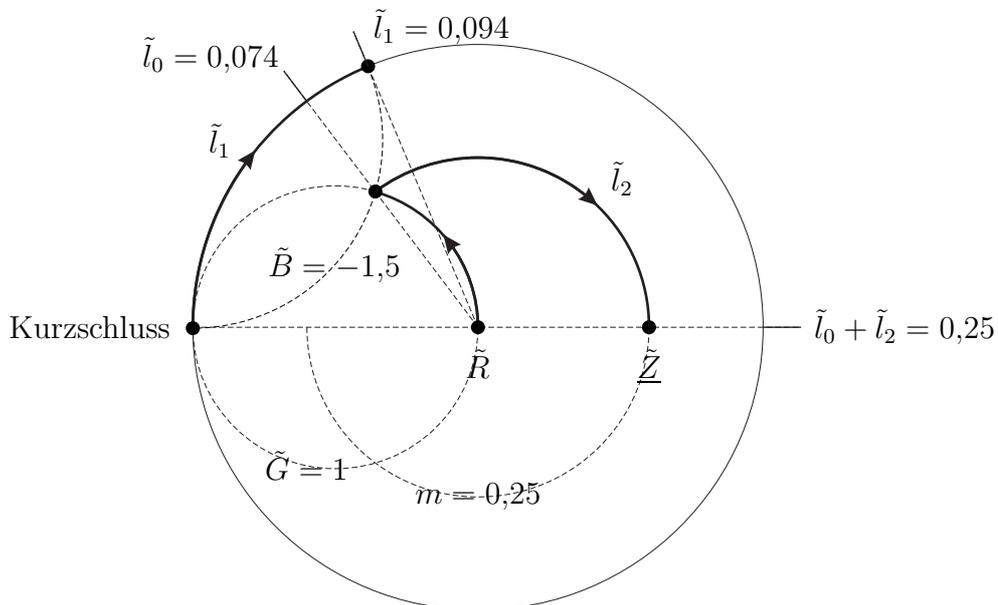


Abbildung E.12.: Transformationsweg im Smith-Diagramm

**Aufgabe 9.1** Es wird ein Betriebszustand betrachtet, in dem alle Spannungen bis auf die Spannung  $\underline{U}_n$  an Tor  $n$  Null sind. Mit (9.13) folgt für die verschwindende Summe der in die Tore hineinfließenden Ströme

$$0 = \sum_{m=1}^N \underline{I}_m = \sum_{m=1}^N \underline{Y}_{m,n} \underline{U}_n = \underline{U}_n \sum_{m=1}^N \underline{Y}_{m,n}.$$

Die Spaltensummen der Admittanzmatrix  $\underline{Y}$  eines massefreien Netzwerks müssen Null sein. Falls die Spannungen

$$\underline{U}_n = \underline{U}, \quad n = 1 \dots N,$$

an allen Toren gleich sind, ergibt sich der dann verschwindende in Tor  $m$  hineinfließende Strom mit (9.13) zu

$$0 = \underline{I}_m = \sum_{n=1}^N \underline{Y}_{m,n} \underline{U} = \underline{U} \sum_{n=1}^N \underline{Y}_{m,n}.$$

Die Zeilensummen der Admittanzmatrix  $\underline{Y}$  eines massefreien Netzwerks müssen Null sein.

**Aufgabe 9.2** Da die Streumatrix  $\underline{S}$  eines reziproken Mehrtors gemäß (9.8) symmetrisch ist, ergibt sich die transponierte Impedanzmatrix mit (9.17) zu

$$\begin{aligned} \underline{Z}^T &= R_B (\mathbf{E} - \underline{S})^{-1} \cdot (\mathbf{E} + \underline{S}) \\ &= R_B (\mathbf{E} - \underline{S})^{-1} \cdot (2\mathbf{E} - (\mathbf{E} - \underline{S})) \\ &= R_B (2(\mathbf{E} - \underline{S})^{-1} - \mathbf{E}) \\ &= R_B (2\mathbf{E} - (\mathbf{E} - \underline{S})) \cdot (\mathbf{E} - \underline{S})^{-1} \\ &= R_B (\mathbf{E} + \underline{S}) \cdot (\mathbf{E} - \underline{S})^{-1} \\ &= \underline{Z}, \end{aligned}$$

das heißt die Impedanzmatrix  $\underline{Z}$  eines reziproken Mehrtors ist symmetrisch.

Da die Inverse einer symmetrischen Matrix symmetrisch ist, muss auch die Admittanzmatrix symmetrisch sein

$$\underline{Y} = \underline{Y}^T.$$

Die mit (9.16) aus der Impedanzmatrix  $\underline{Z}$  berechenbare Streumatrix  $\underline{S}$  verlustfreier Mehrtere muss gemäß (9.7) unitär sein. Man erhält die Bedingung

$$\underbrace{(\underline{Z} + R_B \mathbf{E})^{-1} \cdot (\underline{Z} - R_B \mathbf{E})}_{\underline{S}} \cdot \underbrace{(\underline{Z}^{*T} - R_B \mathbf{E}) \cdot (\underline{Z}^{*T} + R_B \mathbf{E})^{-1}}_{\underline{S}^{*T}} = \mathbf{E}.$$

Durch Umformen erhält man

$$\begin{aligned} (\underline{\mathbf{Z}} - R_B \underline{\mathbf{E}}) \cdot (\underline{\mathbf{Z}}^{*\mathbf{T}} - R_B \underline{\mathbf{E}}) &= (\underline{\mathbf{Z}} + R_B \underline{\mathbf{E}}) \cdot (\underline{\mathbf{Z}}^{*\mathbf{T}} + R_B \underline{\mathbf{E}}) \\ \underline{\mathbf{Z}} \cdot \underline{\mathbf{Z}}^{*\mathbf{T}} - R_B \underline{\mathbf{Z}}^{*\mathbf{T}} - R_B \underline{\mathbf{Z}} + R_B^2 \underline{\mathbf{E}} &= \underline{\mathbf{Z}} \cdot \underline{\mathbf{Z}}^{*\mathbf{T}} + R_B \underline{\mathbf{Z}}^{*\mathbf{T}} + R_B \underline{\mathbf{Z}} + R_B^2 \underline{\mathbf{E}} \\ \underline{\mathbf{Z}} + \underline{\mathbf{Z}}^{*\mathbf{T}} &= 0. \end{aligned}$$

Da die Impedanzmatrix  $\underline{\mathbf{Z}}$  reziproker Mehrtere symmetrisch ist, folgt<sup>25</sup>

$$\operatorname{Re}(\underline{\mathbf{Z}}) = \mathbf{0}.$$

Da die Inverse einer imaginären Matrix ebenfalls imaginär ist, muss gleiches für die Admittanzmatrix gelten:

$$\operatorname{Re}(\underline{\mathbf{Y}}) = \mathbf{0}.$$

**Aufgabe 9.3** Ausdrücken der Spannungen und Ströme durch die komplexen Wellenamplituden gemäß (7.18) und (7.19) ergibt:

$$\begin{aligned} \underbrace{\sqrt{R_B} (a_1 + b_1)}_{\underline{U}_1} &= \underline{A} \underbrace{\sqrt{R_B} (a_2 + b_2)}_{\underline{U}_2} - \underline{B} \underbrace{\frac{a_2 - b_2}{\sqrt{R_B}}}_{\underline{I}_2}, \\ \underbrace{\frac{a_1 - b_1}{\sqrt{R_B}}}_{\underline{I}_1} &= \underline{C} \underbrace{(a_2 + b_2) \sqrt{R_B}}_{\underline{U}_2} - \underline{D} \underbrace{\frac{a_2 - b_2}{\sqrt{R_B}}}_{\underline{I}_2}. \end{aligned}$$

Auflösen nach  $a_1$  und  $b_1$  ergibt:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{2} \underbrace{\left( \underline{A} + \frac{\underline{B}}{R_B} + R_B \underline{C} + \underline{D} \right)}_{\underline{T}_{a,b}} b_2 + \frac{1}{2} \underbrace{\left( \underline{A} - \frac{\underline{B}}{R_B} + R_B \underline{C} - \underline{D} \right)}_{\underline{T}_{a,a}} a_2, \\ b_1 &= \frac{1}{2} \underbrace{\left( \underline{A} + \frac{\underline{B}}{R_B} - R_B \underline{C} - \underline{D} \right)}_{\underline{T}_{b,b}} b_2 + \frac{1}{2} \underbrace{\left( \underline{A} - \frac{\underline{B}}{R_B} - R_B \underline{C} + \underline{D} \right)}_{\underline{T}_{b,a}} a_2. \end{aligned}$$

Durch Auflösen nach den Kettenparametern erhält man:

$$\begin{aligned} \underline{A} &= \frac{1}{2} (\underline{T}_{a,b} + \underline{T}_{a,a} + \underline{T}_{b,b} + \underline{T}_{b,a}), \\ \underline{B} &= \frac{R_B}{2} (\underline{T}_{a,b} - \underline{T}_{a,a} + \underline{T}_{b,b} - \underline{T}_{b,a}), \\ \underline{C} &= \frac{1}{2R_B} (\underline{T}_{a,b} + \underline{T}_{a,a} - \underline{T}_{b,b} - \underline{T}_{b,a}), \\ \underline{D} &= \frac{1}{2} (\underline{T}_{a,b} - \underline{T}_{a,a} - \underline{T}_{b,b} + \underline{T}_{b,a}). \end{aligned}$$

<sup>25</sup>Der Realteil einer komplexen Größe berechnet sich zu  $\operatorname{Re}(\underline{x}) = \frac{1}{2} (\underline{x} + \underline{x}^*)$ .

Jetzt kann man noch gemäß (9.21) die Transmissionsparameter als Funktionen der Streuparameter einsetzen und erhält:

$$\begin{aligned}\underline{A} &= \frac{1}{2\underline{S}_{2,1}} \left( 1 - \underline{S}_{2,2} + \underline{S}_{1,1} - \det(\underline{\mathbf{S}}) \right), \\ \underline{B} &= \frac{R_B}{2\underline{S}_{2,1}} \left( 1 + \underline{S}_{2,2} + \underline{S}_{1,1} + \det(\underline{\mathbf{S}}) \right), \\ \underline{C} &= \frac{1}{2R_B\underline{S}_{2,1}} \left( 1 - \underline{S}_{2,2} - \underline{S}_{1,1} + \det(\underline{\mathbf{S}}) \right), \\ \underline{D} &= \frac{1}{2\underline{S}_{2,1}} \left( 1 + \underline{S}_{2,2} - \underline{S}_{1,1} - \det(\underline{\mathbf{S}}) \right).\end{aligned}$$

Auflösen der Gleichung für  $\underline{a}_1$  nach  $\underline{b}_2$  ergibt die ersten beiden Streuparameter als Funktionen der Kettenparameter:

$$\underline{b}_2 = \underbrace{\frac{2}{\underline{A} + \frac{B}{R_B} + R_B\underline{C} + \underline{D}}}_{\underline{S}_{2,1}} \underline{a}_1 + \underbrace{\frac{-\underline{A} + \frac{B}{R_B} - R_B\underline{C} + \underline{D}}{\underline{A} + \frac{B}{R_B} + R_B\underline{C} + \underline{D}}}_{\underline{S}_{2,2}} \underline{a}_2.$$

Dies in die Gleichung für  $\underline{b}_1$  eingesetzt und aufgelöst nach  $\underline{b}_1$  ergibt die übrigen beiden Streuparameter:

$$\begin{aligned}\underline{b}_1 &= \frac{\underline{A} + \frac{B}{R_B} - R_B\underline{C} - \underline{D}}{\underline{A} + \frac{B}{R_B} + R_B\underline{C} + \underline{D}} \underline{a}_1 \\ &\quad + \frac{1}{2} \left( \underline{A} + \frac{B}{R_B} - R_B\underline{C} - \underline{D} \right) \frac{-\underline{A} + \frac{B}{R_B} - R_B\underline{C} + \underline{D}}{\underline{A} + \frac{B}{R_B} + R_B\underline{C} + \underline{D}} \underline{a}_2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \left( \underline{A} - \frac{B}{R_B} - R_B\underline{C} + \underline{D} \right) \underline{a}_2 \\ &= \underbrace{\frac{\underline{A} + \frac{B}{R_B} - R_B\underline{C} - \underline{D}}{\underline{A} + \frac{B}{R_B} + R_B\underline{C} + \underline{D}}}_{\underline{S}_{1,1}} \underline{a}_1 + \underbrace{\frac{2\underline{A}\underline{D} - 2\underline{B}\underline{C}}{\underline{A} + \frac{B}{R_B} + R_B\underline{C} + \underline{D}}}_{\underline{S}_{1,2}} \underline{a}_2.\end{aligned}$$

**Aufgabe 9.4** Aus (9.36) folgt

$$\underline{\mathbf{S}} = \mathbf{U} \cdot \underline{\mathbf{M}} \cdot \mathbf{U}^T.$$

Einsetzen in (9.6) ergibt für ein passives Mehrtor

$$\begin{aligned}
 0 &\leq \underline{\mathbf{a}}^{*\text{T}} \cdot \left( \mathbf{E} - (\mathbf{U}^{\text{T}} \cdot \underline{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{U})^{*\text{T}} \cdot (\mathbf{U}^{\text{T}} \cdot \underline{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{U}) \right) \cdot \underline{\mathbf{a}} \\
 &= \underline{\mathbf{a}}^{*\text{T}} \cdot \left( \mathbf{U} \cdot \mathbf{U}^{\text{T}} - \mathbf{U} \cdot \underline{\mathbf{M}}^{*\text{T}} \cdot \mathbf{U}^{\text{T}} \cdot \mathbf{U} \cdot \underline{\mathbf{M}} \cdot \mathbf{U}^{\text{T}} \right) \cdot \underline{\mathbf{a}} \\
 &= \underbrace{\underline{\mathbf{a}}^{*\text{T}} \cdot \mathbf{U}}_{\underline{\mathbf{a}}'^{*\text{T}}} \cdot \left( \mathbf{E} - \underline{\mathbf{M}}^{*\text{T}} \cdot \underline{\mathbf{M}} \right) \cdot \underbrace{\mathbf{U}^{\text{T}} \cdot \underline{\mathbf{a}}}_{\underline{\mathbf{a}}'}.
 \end{aligned}$$

Mit passend gewähltem Vektor  $\underline{\mathbf{a}}'$  ergibt sich eine formal (9.6) entsprechende Gleichung mit der modalen Streumatrix  $\underline{\mathbf{M}}$  statt der Streumatrix  $\underline{\mathbf{S}}$ . Diese Ungleichung ist nur dann für alle Vektoren  $\underline{\mathbf{a}}'$  erfüllt, wenn die Matrix  $\mathbf{E} - \underline{\mathbf{M}}^{*\text{T}} \cdot \underline{\mathbf{M}}$  positiv semidefinit ist, das heißt keine negativen Eigenwerte hat.

Die nodale Streumatrix  $\underline{\mathbf{S}}$  reziproker Mehrtere ist gemäß (9.8) symmetrisch. Es folgt:

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{U} \cdot \underline{\mathbf{M}} \cdot \mathbf{U}^{\text{T}})^{\text{T}} &= \mathbf{U} \cdot \underline{\mathbf{M}} \cdot \mathbf{U}^{\text{T}}, \\
 \mathbf{U} \cdot \underline{\mathbf{M}}^{\text{T}} \cdot \mathbf{U}^{\text{T}} &= \mathbf{U} \cdot \underline{\mathbf{M}} \cdot \mathbf{U}^{\text{T}}, \\
 \underline{\mathbf{M}}^{\text{T}} &= \underline{\mathbf{M}}.
 \end{aligned}$$

Das heißt die modale Streumatrix  $\underline{\mathbf{M}}$  reziproker Mehrtere ist symmetrisch.

**Aufgabe 10.1** Die Streumatrix des Serienwiderstands ist

$$\underline{\mathbf{S}}^{(1)} = \frac{1}{R + 2R_{\text{B}}} \begin{pmatrix} R & 2R_{\text{B}} \\ 2R_{\text{B}} & R \end{pmatrix}$$

und die Streumatrix der Parallelkapazität ist

$$\underline{\mathbf{S}}^{(2)} = \frac{1}{2 + j\omega CR_{\text{B}}} \begin{pmatrix} -j\omega CR_{\text{B}} & 2 \\ 2 & -j\omega CR_{\text{B}} \end{pmatrix},$$

siehe (10.14) und (10.15). Mit (9.21) erhält man die Transmissionsmatrizen

$$\underline{\mathbf{T}}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{R}{2R_{\text{B}}} & -\frac{R}{2R_{\text{B}}} \\ \frac{R}{2R_{\text{B}}} & 1 - \frac{R}{2R_{\text{B}}} \end{pmatrix}$$

und

$$\underline{\mathbf{T}}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{j\omega CR_{\text{B}}}{2} & \frac{j\omega CR_{\text{B}}}{2} \\ -\frac{j\omega CR_{\text{B}}}{2} & 1 - \frac{j\omega CR_{\text{B}}}{2} \end{pmatrix}.$$

Die resultierende Transmissionsmatrix ist

$$\underline{\mathbf{T}} = \underline{\mathbf{T}}^{(1)} \cdot \underline{\mathbf{T}}^{(2)}.$$

Wegen

$$\underline{S}_{2,1} = \frac{1}{\underline{T}_{a,b}},$$

siehe (9.22), ist insbesondere

$$\begin{aligned} \underline{T}_{a,b} &= \underline{T}_{a,b}^{(1)} \underline{T}_{a,b}^{(2)} + \underline{T}_{a,a}^{(1)} \underline{T}_{b,b}^{(2)} \\ &= \left(1 + \frac{R}{2R_B}\right) \left(1 + \frac{j\omega CR_B}{2}\right) + \frac{R}{2R_B} \frac{j\omega CR_B}{2} \\ &= \frac{2R_B + R + j\omega CR_B (R_B + R)}{2R_B} \end{aligned}$$

von Interesse. Es folgt die Übertragungsfunktion

$$\underline{S}_{2,1} = \frac{2R_B}{2R_B + R + j\omega CR_B (R_B + R)}.$$

**Aufgabe 10.2** Aus Abbildung 10.8 liest man die Impedanzmatrix

$$\underline{\mathbf{Z}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{R_B^2}{\underline{Z}} + \underline{Z} & \frac{R_B^2}{\underline{Z}} - \underline{Z} \\ \frac{R_B^2}{\underline{Z}} - \underline{Z} & \frac{R_B^2}{\underline{Z}} + \underline{Z} \end{pmatrix}$$

symmetrischen Kreuzschaltung mit dualen Zweigimpedanzen ab. Die in Abbildung E.13 gezeigte symmetrische T-Schaltung hat die gleiche Impedanzmatrix  $\underline{\mathbf{Z}}$  und ist daher äquivalent.

Die für den Gegentaktmode sichtbare Impedanz ist

$$\underline{Z}^{(-)} = \underline{Z}.$$

Hieraus folgt mit (7.51) und (3.72)

$$\underline{M}^{(-)} = \frac{\underline{Z} - R_B}{\underline{Z} + R_B}.$$

Die für den Gleichtaktmode sichtbare Impedanz ist

$$\underline{Z}^{(+)} = \frac{R_B^2}{\underline{Z}}.$$

Hieraus folgt mit (7.54) und (3.72)

$$\underline{M}^{(+)} = \frac{R_B - \underline{Z}}{R_B + \underline{Z}}.$$

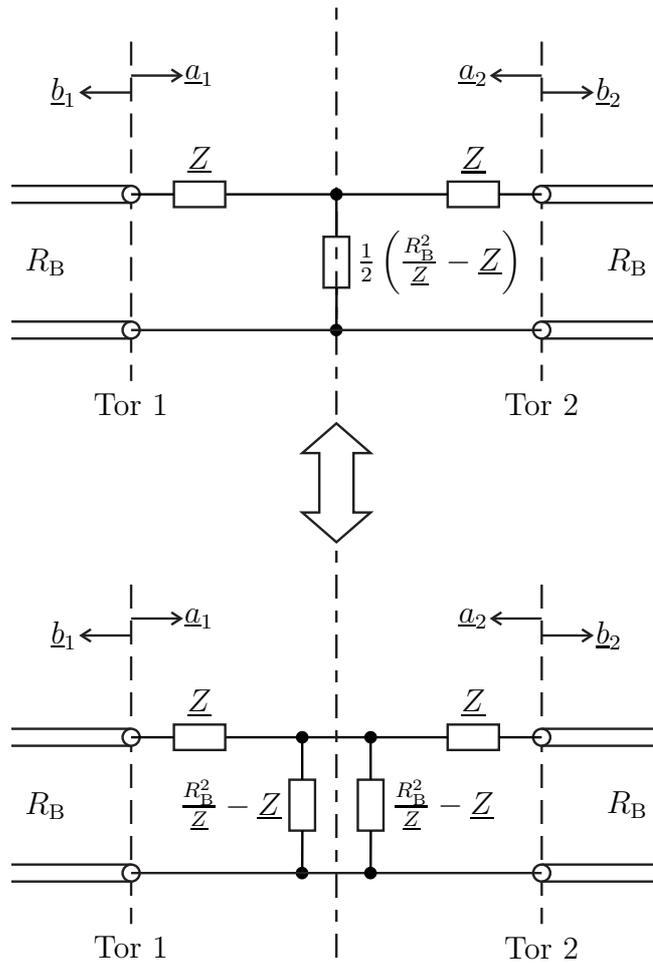


Abbildung E.13.: Zur symmetrischen Kreuzschaltung mit dualen Zweigimpedanzen äquivalente symmetrische T-Schaltung

Mit (10.6) und (10.9) folgen

$$\underline{S}_{1,1} = \frac{\underline{M}^{(++)} + \underline{M}^{(--)}}{2} = 0$$

und

$$\underline{S}_{1,2} = \frac{\underline{M}^{(++)} - \underline{M}^{(--)}}{2} = \frac{R_B - \underline{Z}}{R_B + \underline{Z}}.$$

Unter Berücksichtigen des symmetrischen Aufbaus erhält man schließlich die Streumatrix

$$\underline{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{R_B - \underline{Z}}{R_B + \underline{Z}} \\ \frac{R_B - \underline{Z}}{R_B + \underline{Z}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Die symmetrische Kreuzschaltung mit dualen Zweigimpedanzen ist stets eigenreflexionsfrei, siehe (9.5).

**Aufgabe 10.3** Die Streumatrix (10.19) des  $\lambda/4$ -Transformators bei Verwenden des Wellenwiderstands  $Z_L$  als Bezugswiderstand ergibt sich mit  $\beta l = \pi/2$ , siehe (2.38), zu

$$\underline{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} 0 & -j \\ -j & 0 \end{pmatrix}.$$

Hieraus folgt mit (9.18) die vom Bezugswiderstand  $R_B$  unabhängige Admittanzmatrix

$$\underline{\mathbf{Y}} = \frac{1}{R_B} \begin{pmatrix} 1 & j \\ j & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -j \\ -j & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{R_B} \begin{pmatrix} 1 & j \\ j & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & j \\ j & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{R_B} \begin{pmatrix} 0 & j \\ j & 0 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 10.4** Es werden zwei spezielle Betriebszustände des Leistungsteilers betrachtet, siehe Abbildung E.14.

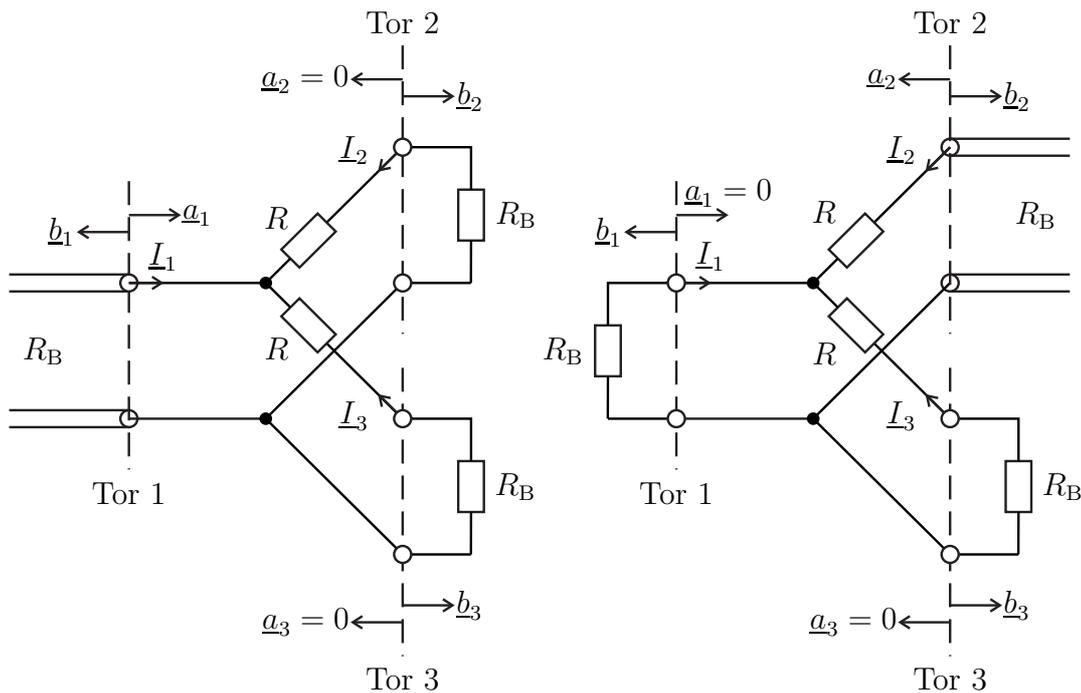


Abbildung E.14.: Spezielle Betriebszustände des eingangsseitig angepassten Leistungsteilers

---

Um an Tor 1 Eigenreflexionsfreiheit gemäß (9.5) zu erreichen, muss bei reflexionsfreiem Abschluss von Tor 2 und Tor 3 mit dem Bezugswiderstand  $R_B$  die an Tor 1 sichtbare Impedanz gemäß (7.23) gleich dem Bezugswiderstand  $R_B$  sein:

$$R_B = \frac{1}{2} (R + R_B),$$

$$R = R_B.$$

Der aus Tor 2 herausfließende Strom ist in diesem Betriebszustand aus Symmetriegründen halb so groß wie der in Tor 1 hineinfließende Strom. Mit (7.19) und (9.4) folgt:

$$-\underbrace{\frac{-b_2}{\sqrt{R_B}}}_{I_2} = \frac{1}{2} \underbrace{\frac{a_1 - b_1}{\sqrt{R_B}}}_{I_1},$$

$$b_2 = \frac{1}{2} (1 + \underline{S}_{1,1}) a_1,$$

$$\underline{S}_{2,1} = \frac{b_2}{a_1} = \frac{1}{2}.$$

Bei reflexionsfreiem Abschluss von Tor 1 und Tor 3 mit dem Bezugswiderstand  $R_B$  ist die an Tor 2 sichtbare Impedanz

$$R_2 = R_B + (R_B \parallel 2R_B) = \frac{5}{3} R_B.$$

Der an Tor 2 sichtbare Reflexionsfaktor gemäß (7.24) ist dann

$$\underline{S}_{2,2} = \frac{R_2 - R_B}{R_2 + R_B} = \frac{1}{4},$$

siehe (9.4). Die Summe der in die Tore hineinfließenden Ströme ist Null. Mit (7.19) und (9.4) folgt:

$$\underbrace{\frac{-b_1}{\sqrt{R_B}}}_{I_1} + \underbrace{\frac{a_2 - b_2}{\sqrt{R_B}}}_{I_2} + \underbrace{\frac{-b_3}{\sqrt{R_B}}}_{I_3} = 0,$$

$$-\underline{S}_{1,2} a_2 + (1 - \underline{S}_{2,2}) a_2 = b_3.$$

Unter Ausnutzen der Reziprozität (9.8) folgt mit (9.4):

$$b_3 = (-\underline{S}_{2,1} + 1 - \underline{S}_{2,2}) a_2,$$

$$\underline{S}_{3,2} = \frac{1}{4}.$$

Unter Berücksichtigen des symmetrischen Aufbaus des eingangsseitig angepassten Leistungsteilers und der Reziprozität (9.8) erhält man schließlich die Streumatrix

$$\underline{\mathbf{S}} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Der eingangsseitig angepasste Leistungsteiler ist nicht verlustfrei und nur an Tor 1 eigenreflexionsfrei, siehe (9.7) und (9.5).

**Aufgabe 11.1** Einsetzen von (11.3), (11.4) und (11.9) in (11.7) ergibt

$$\underline{b}' = \underbrace{\frac{\underline{S}_{4,2}\underline{S}_{3,1} - \underline{S}_{3,2}\underline{S}_{4,1}}{\underline{S}_{4,2} + \underline{S}_{3,2}\underline{S}_{4,3}\underline{\Gamma}_b - \underline{S}_{4,2}\underline{S}_{3,3}\underline{\Gamma}_b}}_{\underline{F}_{1,0}} \underline{b} + \underbrace{\frac{\underline{S}_{3,2} - \underline{S}_{3,2}\underline{S}_{4,4}\underline{\Gamma}_a + \underline{S}_{4,2}\underline{S}_{3,4}\underline{\Gamma}_a}{\underline{S}_{4,2} + \underline{S}_{3,2}\underline{S}_{4,3}\underline{\Gamma}_b - \underline{S}_{4,2}\underline{S}_{3,3}\underline{\Gamma}_b}}_{\underline{F}_{1,1}} \underline{a}'.$$

Man liest

$$\underline{F}_{1,0} = \frac{\underline{S}_{4,2}\underline{S}_{3,1} - \underline{S}_{3,2}\underline{S}_{4,1}}{\underline{S}_{4,2} + \underline{S}_{3,2}\underline{S}_{4,3}\underline{\Gamma}_b - \underline{S}_{4,2}\underline{S}_{3,3}\underline{\Gamma}_b}$$

und

$$\underline{F}_{1,1} = \frac{\underline{S}_{3,2} - \underline{S}_{3,2}\underline{S}_{4,4}\underline{\Gamma}_a + \underline{S}_{4,2}\underline{S}_{3,4}\underline{\Gamma}_a}{\underline{S}_{4,2} + \underline{S}_{3,2}\underline{S}_{4,3}\underline{\Gamma}_b - \underline{S}_{4,2}\underline{S}_{3,3}\underline{\Gamma}_b}$$

ab. Einsetzen von (11.3), (11.4) und (11.9) in (11.5) ergibt

$$\underline{a} = \left( \underline{S}_{1,1} - \frac{\underline{S}_{1,2}\underline{S}_{4,1}}{\underline{S}_{4,2}} \right) \underline{b} + \left( \frac{\underline{S}_{1,2}}{\underline{S}_{4,2}} - \frac{\underline{S}_{1,2}\underline{S}_{4,4}\underline{\Gamma}_a}{\underline{S}_{4,2}} + \underline{S}_{1,4}\underline{\Gamma}_a \right) \underline{a}' \\ + \left( -\frac{\underline{S}_{1,2}\underline{S}_{4,3}\underline{\Gamma}_b}{\underline{S}_{4,2}} + \underline{S}_{1,3}\underline{\Gamma}_b \right) \underline{b}'.$$

Mit  $\underline{b}'$  aus der ersten Gleichung folgen

$$\underline{F}_{0,0} = \underline{S}_{1,1} \\ + \frac{-\underline{S}_{1,2}\underline{S}_{4,1} + \underline{S}_{1,2}\underline{S}_{4,1}\underline{S}_{3,3}\underline{\Gamma}_b - \underline{S}_{1,2}\underline{S}_{4,3}\underline{\Gamma}_b\underline{S}_{3,1} + \underline{S}_{1,3}\underline{\Gamma}_b\underline{S}_{4,2}\underline{S}_{3,1} - \underline{S}_{1,3}\underline{\Gamma}_b\underline{S}_{3,2}\underline{S}_{4,1}}{\underline{S}_{4,2} + \underline{S}_{3,2}\underline{S}_{4,3}\underline{\Gamma}_b - \underline{S}_{4,2}\underline{S}_{3,3}\underline{\Gamma}_b}$$

und

$$\underline{F}_{0,1} = \left( \underline{S}_{1,2} - \underline{S}_{1,2}\underline{S}_{3,3}\underline{\Gamma}_b - \underline{S}_{1,2}\underline{S}_{4,4}\underline{\Gamma}_a + \underline{S}_{1,2}\underline{S}_{4,4}\underline{\Gamma}_a\underline{S}_{3,3}\underline{\Gamma}_b + \underline{S}_{4,2}\underline{S}_{1,4}\underline{\Gamma}_a \right. \\ \left. + \underline{S}_{1,4}\underline{\Gamma}_a\underline{S}_{3,2}\underline{S}_{4,3}\underline{\Gamma}_b - \underline{S}_{4,2}\underline{S}_{1,4}\underline{\Gamma}_a\underline{S}_{3,3}\underline{\Gamma}_b - \underline{S}_{1,2}\underline{S}_{4,3}\underline{\Gamma}_b\underline{S}_{3,4}\underline{\Gamma}_a + \underline{S}_{1,3}\underline{\Gamma}_b\underline{S}_{3,2} \right. \\ \left. - \underline{S}_{1,3}\underline{\Gamma}_b\underline{S}_{3,2}\underline{S}_{4,4}\underline{\Gamma}_a + \underline{S}_{1,3}\underline{\Gamma}_b\underline{S}_{4,2}\underline{S}_{3,4}\underline{\Gamma}_a \right) / \left( \underline{S}_{4,2} + \underline{S}_{3,2}\underline{S}_{4,3}\underline{\Gamma}_b - \underline{S}_{4,2}\underline{S}_{3,3}\underline{\Gamma}_b \right).$$

---

Im Falle eines Richtkopplers mit  $\underline{S}_{1,1} = \underline{S}_{1,4} = \underline{S}_{2,2} = \underline{S}_{2,3} = \underline{S}_{3,2} = \underline{S}_{3,3} = \underline{S}_{4,1} = \underline{S}_{4,4} = 0$ ,  $\underline{S}_{1,2} = \underline{S}_{2,1} = \underline{S}_{3,4} = \underline{S}_{4,3}$  und  $\underline{S}_{1,3} = \underline{S}_{2,4} = \underline{S}_{3,1} = \underline{S}_{4,2}$ , siehe (10.35), erhält man:

$$\begin{aligned} \underline{F}_{0,0} &= (\underline{S}_{1,3}^2 - \underline{S}_{1,2}^2) \underline{\Gamma}_b, \\ \underline{F}_{0,1} &= \frac{\underline{S}_{1,2} - \underline{S}_{1,2}^3 \underline{\Gamma}_b \underline{\Gamma}_a}{\underline{S}_{1,3}} + \underline{S}_{1,2} \underline{S}_{1,3} \underline{\Gamma}_b \underline{\Gamma}_a, \\ \underline{F}_{1,0} &= \underline{S}_{1,3}, \\ \underline{F}_{1,1} &= \underline{S}_{1,2} \underline{\Gamma}_a. \end{aligned}$$

Im Falle reflexionsfreier Messstellen  $\underline{\Gamma}_a = \underline{\Gamma}_b = 0$  erhält man:

$$\begin{aligned} \underline{F}_{0,0} &= \underline{S}_{1,1} - \frac{\underline{S}_{1,2} \underline{S}_{4,1}}{\underline{S}_{4,2}}, \\ \underline{F}_{0,1} &= \frac{\underline{S}_{1,2}}{\underline{S}_{4,2}}, \\ \underline{F}_{1,0} &= \underline{S}_{3,1} - \frac{\underline{S}_{3,2} \underline{S}_{4,1}}{\underline{S}_{4,2}}, \\ \underline{F}_{1,1} &= \frac{\underline{S}_{3,2}}{\underline{S}_{4,2}}. \end{aligned}$$

**Aufgabe 11.2** Die Messung am idealen Abschluss  $\underline{\Gamma}_M = 0$  ergibt

$$\underline{F}_{1,1} = \underline{\Gamma}'_M,$$

siehe (11.13). Für die Messungen am idealen Leerlauf  $\underline{\Gamma}_O = 1$  und am idealen Kurzschluss  $\underline{\Gamma}_S = -1$  folgen mit (11.13)

$$\underline{\Gamma}'_O = \underline{F}_{1,1} + \underline{\Gamma}'_O \underline{F}_{0,0} - \det(\mathbf{F})$$

beziehungsweise

$$\underline{\Gamma}'_S = \underline{F}_{1,1} - \underline{\Gamma}'_S \underline{F}_{0,0} + \det(\mathbf{F}).$$

Durch Addition beider Gleichungen erhält man

$$\underline{\Gamma}'_O + \underline{\Gamma}'_S = 2\underline{F}_{1,1} + (\underline{\Gamma}'_O - \underline{\Gamma}'_S) \underline{F}_{0,0}.$$

Einsetzen des aus der Messung am idealen Abschluss  $\underline{\Gamma}_M = 0$  bekannten Fehlerterms  $\underline{F}_{1,1}$  ergibt

$$\underline{F}_{0,0} = \frac{\underline{\Gamma}'_O + \underline{\Gamma}'_S - 2\underline{F}_{1,1}}{\underline{\Gamma}'_O - \underline{\Gamma}'_S} = \frac{\underline{\Gamma}'_O + \underline{\Gamma}'_S - 2\underline{\Gamma}'_M}{\underline{\Gamma}'_O - \underline{\Gamma}'_S}.$$

Schließlich erhält man aus der Messung am idealen Kurzschluss  $\underline{\Gamma}_S = -1$  unter Verwenden der bereits berechneten Fehlerterme  $\underline{E}_{1,1}$  und  $\underline{E}_{0,0}$

$$\begin{aligned}\det(\underline{\mathbf{E}}) &= \underline{\Gamma}'_S - \underline{E}_{1,1} + \underline{\Gamma}'_S \underline{E}_{0,0} \\ &= \underline{\Gamma}'_S - \underline{E}_{1,1} + \underline{\Gamma}'_S \frac{\underline{\Gamma}'_O + \underline{\Gamma}'_S - 2\underline{\Gamma}'_M}{\underline{\Gamma}'_O - \underline{\Gamma}'_S} \\ &= \frac{2\underline{\Gamma}'_O \underline{\Gamma}'_S - \underline{\Gamma}'_O \underline{\Gamma}'_M - \underline{\Gamma}'_S \underline{\Gamma}'_M}{\underline{\Gamma}'_O - \underline{\Gamma}'_S}.\end{aligned}$$

**Aufgabe 11.3** Aus (11.32) erhält man mit  $\underline{\Gamma}' = \underline{b}'_{11}/\underline{a}'_{11}$

$$-\underline{E}_{1,1} + \underline{\Gamma}' = -\det(\underline{\mathbf{E}}_A) \underline{\Gamma} + \underline{E}_{0,0} \underline{\Gamma}'.$$

Die Messung am idealen Abschluss  $\underline{\Gamma}_M = 0$  ergibt

$$\underline{E}_{1,1} = \underline{\Gamma}'_M.$$

Die Messungen an idealem Leerlauf  $\underline{\Gamma}_O = 1$  und am idealem Kurzschluss  $\underline{\Gamma}_S = -1$  ergeben

$$-\underline{E}_{1,1} + \underline{\Gamma}'_O = -\det(\underline{\mathbf{E}}_A) + \underline{E}_{0,0} \underline{\Gamma}'_O$$

beziehungsweise

$$-\underline{E}_{1,1} + \underline{\Gamma}'_S = \det(\underline{\mathbf{E}}_A) - \underline{E}_{0,0} \underline{\Gamma}'_S.$$

Durch Addition beider Gleichungen erhält man

$$-2\underline{E}_{1,1} + \underline{\Gamma}'_O + \underline{\Gamma}'_S = \underline{E}_{0,0} (\underline{\Gamma}'_O - \underline{\Gamma}'_S).$$

Einsetzen des aus der Messung am idealen Abschluss  $\underline{\Gamma}_M = 0$  bekannten Fehlerterms  $\underline{E}_{1,1}$  ergibt

$$\underline{E}_{0,0} = \frac{\underline{\Gamma}'_O + \underline{\Gamma}'_S - 2\underline{E}_{1,1}}{\underline{\Gamma}'_O - \underline{\Gamma}'_S} = \frac{\underline{\Gamma}'_O + \underline{\Gamma}'_S - 2\underline{\Gamma}'_M}{\underline{\Gamma}'_O - \underline{\Gamma}'_S}.$$

Schließlich erhält man aus der Messung am idealen Leerlauf  $\underline{\Gamma}_O = 1$  unter Verwenden der bereits berechneten Fehlerterme  $\underline{E}_{1,1}$  und  $\underline{E}_{0,0}$

$$\begin{aligned}\det(\underline{\mathbf{E}}_A) &= \underline{E}_{1,1} - \underline{\Gamma}'_O + \underline{E}_{0,0} \underline{\Gamma}'_O \\ &= \underline{\Gamma}'_M - \underline{\Gamma}'_O + \frac{\underline{\Gamma}'_O + \underline{\Gamma}'_S - 2\underline{\Gamma}'_M}{\underline{\Gamma}'_O - \underline{\Gamma}'_S} \underline{\Gamma}'_O \\ &= \frac{2\underline{\Gamma}'_O \underline{\Gamma}'_S - \underline{\Gamma}'_O \underline{\Gamma}'_M - \underline{\Gamma}'_S \underline{\Gamma}'_M}{\underline{\Gamma}'_O - \underline{\Gamma}'_S}.\end{aligned}$$

Aus (11.33) erhält man mit  $\underline{S}'_{T1,1} = \underline{b}'_{11}/\underline{a}'_{11}$  und  $\underline{S}'_{T2,1} = \underline{b}'_{12}/\underline{a}'_{11}$  für die Messung an der idealen Durchverbindung

$$-\underline{F}_{1,1} + \underline{S}'_{T1,1} = \frac{\underline{F}_{1,0}\underline{F}_{2,2}}{\underline{F}_{3,2}}\underline{S}'_{T2,1}$$

und

$$\frac{\underline{F}_{1,0}}{\underline{F}_{3,2}}\underline{S}'_{T2,1} = -\det(\underline{\mathbf{F}}_A) + \underline{F}_{0,0}\underline{S}'_{T1,1}.$$

Einsetzen des aus der Messung am idealen Abschluss  $\underline{\Gamma}_M = 0$  bekannten Fehlerterms  $\underline{F}_{1,1}$  ergibt

$$\frac{\underline{F}_{1,0}\underline{F}_{2,2}}{\underline{F}_{3,2}} = \frac{-\underline{F}_{1,1} + \underline{S}'_{T1,1}}{\underline{S}'_{T2,1}} = \frac{\underline{S}'_{T1,1} - \underline{\Gamma}'_M}{\underline{S}'_{T2,1}}.$$

Einsetzen der aus den Messungen an den idealen Eintoren bekannten Fehlerterme  $\det(\underline{\mathbf{F}}_A)$  und  $\underline{F}_{0,0}$  ergibt

$$\begin{aligned} \frac{\underline{F}_{1,0}}{\underline{F}_{3,2}} &= \frac{-\det(\underline{\mathbf{F}}_A) + \underline{F}_{0,0}\underline{S}'_{T1,1}}{\underline{S}'_{T2,1}} \\ &= \frac{\underline{\Gamma}'_O\underline{\Gamma}'_M + \underline{\Gamma}'_S\underline{\Gamma}'_M - 2\underline{\Gamma}'_O\underline{\Gamma}'_S + (\underline{\Gamma}'_O + \underline{\Gamma}'_S - 2\underline{\Gamma}'_M)\underline{S}'_{T1,1}}{\underline{S}'_{T2,1}(\underline{\Gamma}'_O - \underline{\Gamma}'_S)}. \end{aligned}$$

**Aufgabe 12.1** Bei Kurzschluss an Tor 3 gilt

$$\underline{U}_3 = 0.$$

Mit (9.13) folgt

$$\begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \\ \underline{I}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{Y}_{1,1} & \underline{Y}_{1,2} & \underline{Y}_{1,3} \\ \underline{Y}_{2,1} & \underline{Z}_{2,2} & \underline{Y}_{2,3} \\ \underline{Y}_{3,1} & \underline{Z}_{3,2} & \underline{Y}_{3,3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

das heißt man erhält die Admittanzmatrix des Zweitores durch Streichen der dritten Zeile und der dritten Spalte der Admittanzmatrix  $\underline{\mathbf{Y}}$  des Dreitors.

Gemäß Aufgabe 9.1 müssen die Spaltensummen der Admittanzmatrix  $\underline{\mathbf{Y}}$  eines masselosen Netzwerks Null sein. Es folgt:

$$\begin{aligned} \underline{Y}_{3,1} &= 1 - \underline{Y}_{1,1} - \underline{Y}_{2,1}, \\ \underline{Y}_{3,2} &= 1 - \underline{Y}_{1,2} - \underline{Y}_{2,2}. \end{aligned}$$

Gemäß Aufgabe 9.1 müssen die Zeilensummen der Admittanzmatrix  $\underline{Y}$  eines mas-sefreien Netzwerks Null sein. Es folgt:

$$\begin{aligned}\underline{Y}_{1,3} &= 1 - \underline{Y}_{1,1} - \underline{Y}_{1,2}, \\ \underline{Y}_{2,3} &= 1 - \underline{Y}_{2,1} - \underline{Y}_{2,2}.\end{aligned}$$

Schließlich erhält man noch

$$\underline{Y}_{3,3} = 1 - \underline{Y}_{3,1} - \underline{Y}_{3,2} = \underline{Y}_{1,1} + \underline{Y}_{2,1} + \underline{Y}_{1,2} + \underline{Y}_{2,2} - 1.$$

Hiermit ist es möglich, die Admittanzmatrix  $\underline{Y}$  des Dreitors aus der Admittanzmatrix des Zweitors zu berechnen.

**Aufgabe 12.2** Der Klemmenleistungsgewinn ergibt sich mit (10.19) und (12.28) zu

$$G = \frac{|e^{-j\beta l}|^2 (1 - |\underline{\Gamma}_L|^2)}{1 - |e^{-j2\beta l} \underline{\Gamma}_L|^2} = 1.$$

Die von der Leitung aufgenommene Leistung muss gleich der von der Leitung abgegebenen Leistung sein, da die Leitung verlustfrei ist.

Der Einfügensleistungsgewinn ergibt sich mit (10.19) und (12.30) zu

$$G_I = \frac{|e^{-j\beta l}|^2 |1 - \underline{\Gamma}_Q \underline{\Gamma}_L|^2}{|1 - e^{-j2\beta l} \underline{\Gamma}_Q \underline{\Gamma}_L|^2} = \frac{|1 - \underline{\Gamma}_Q \underline{\Gamma}_L|^2}{|1 - e^{-j2\beta l} \underline{\Gamma}_Q \underline{\Gamma}_L|^2}.$$

An reflexionsfreien Quellen  $\underline{\Gamma}_Q = 0$  oder reflexionsfreien Lasten  $\underline{\Gamma}_L = 0$  ist der Einfügensleistungsgewinn  $G_I = 1$ .

Der Übertragungsleistungsgewinn ergibt sich mit (10.19) und (12.32) zu

$$G_T = \frac{(1 - |\underline{\Gamma}_Q|^2) |e^{-j\beta l}|^2 (1 - |\underline{\Gamma}_L|^2)}{|1 - e^{-j2\beta l} \underline{\Gamma}_Q \underline{\Gamma}_L|^2} = \frac{(1 - |\underline{\Gamma}_Q|^2) (1 - |\underline{\Gamma}_L|^2)}{|1 - e^{-j2\beta l} \underline{\Gamma}_Q \underline{\Gamma}_L|^2}.$$

Der verfügbare Leistungsgewinn ergibt sich mit (10.19) und (12.35) zu

$$G_A = \frac{|e^{-j\beta l}|^2 (1 - |\underline{\Gamma}_Q|^2)}{1 - |e^{-j2\beta l} \underline{\Gamma}_Q|^2} = 1.$$

Dies ist aufgrund der Verlustfreiheit der Leitung zu erwarten.

---

Zum Berechnen des maximalen verfügbaren Leistungsgewinns  $G_{\text{MAG}}$  bestimmt man zunächst mit (10.19) und (12.22) den Stabilitätsfaktor

$$K = \frac{1 + \left| -e^{-j2\beta l} \right|^2}{2 \left| e^{-j\beta l} \right| \left| e^{-j\beta l} \right|} = 1.$$

Man erhält schließlich mit (10.19) und (12.39) den maximalen verfügbaren Leistungsgewinn

$$G_{\text{MAG}} = \frac{\left| e^{-j\beta l} \right|}{\left| e^{-j\beta l} \right|} = 1.$$

**Aufgabe 12.3** Die Einwegleitung ist wegen  $\underline{S}_{1,2} = 0$  rückwirkungsfrei, so dass der Übertragungsleistungsgewinn  $G_{\text{T}}$  dem unilateralen Übertragungsleistungsgewinn  $G_{\text{TU}}$  entspricht. Aus (10.24) und (12.42) folgt

$$G_{\text{T}} = G_{\text{TU}} = \underbrace{\left( 1 - \left| \underline{\Gamma}_{\text{Q}} \right|^2 \right)}_{G_{\text{Q}}} \underbrace{\left( 1 - \left| \underline{\Gamma}_{\text{L}} \right|^2 \right)}_{G_{\text{L}}}.$$

Der Klemmenleistungsgewinn ergibt sich mit (10.24) und (12.28) zu

$$G = 1 - \left| \underline{\Gamma}_{\text{L}} \right|^2,$$

vergleiche auch (12.37). Die Einwegleitung ist nicht verlustfrei.

Der verfügbare Leistungsgewinn ergibt sich mit (10.24) und (12.35) zu

$$G_{\text{A}} = 1 - \left| \underline{\Gamma}_{\text{Q}} \right|^2,$$

vergleiche auch (12.38).

Der Einfügungsleistungsgewinn ergibt sich mit (10.24) und (12.30) zu

$$G_{\text{I}} = \left| 1 - \underline{\Gamma}_{\text{Q}} \underline{\Gamma}_{\text{L}} \right|^2.$$

An einer reflexionsfreien Quelle  $\underline{\Gamma}_{\text{Q}} = 0$  oder an einer reflexionsfreien Last  $\underline{\Gamma}_{\text{L}} = 0$  ist der Einfügungsleistungsgewinn  $G_{\text{I}} = 1$ .

**Aufgabe 12.4** Mit

$$\left( K - \sqrt{K^2 - 1} \right) \left( K + \sqrt{K^2 - 1} \right) = K^2 - \left( K^2 - 1 \right) = 1$$

folgt aus (12.39) für den maximalen verfügbaren Leistungsgewinn unter Berücksichtigen des korrekten Vorzeichens vor der Wurzel

$$G_{\text{MAG}} = \frac{|\underline{S}_{2,1}|}{|\underline{S}_{1,2}|} \frac{1}{K + \sqrt{K^2 - 1}} \approx \frac{|\underline{S}_{2,1}|}{|\underline{S}_{1,2}|} \frac{1}{2K}.$$

Die Näherung gilt für rückwirkungsarme Zweitore mit sehr großen Stabilitätsfaktoren  $K$ . Im Grenzfall rückwirkungsfreier Zweitore  $\underline{S}_{1,2} \rightarrow 0$  erhält man mit (12.40)

$$G_{\text{MAG}} \rightarrow \frac{|\underline{S}_{2,1}|}{|\underline{S}_{1,2}|} \frac{|\underline{S}_{2,1}| |\underline{S}_{1,2}|}{\left(|\underline{S}_{1,1}|^2 - 1\right) \left(|\underline{S}_{2,2}|^2 - 1\right)} = |\underline{S}_{2,1}|^2 \frac{1}{\left(|\underline{S}_{1,1}|^2 - 1\right) \left(|\underline{S}_{2,2}|^2 - 1\right)}.$$

Dies entspricht dem maximalen unilateralen Übertragungsleistungsgewinn  $G_{\text{TUmax}}$  gemäß (12.54).

**Aufgabe 13.1** Aus der Streumatrix  $\underline{\mathbf{S}}$  der Paralleladmittanz gemäß (10.15) folgen mit (13.13)<sup>26</sup>

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \text{E}\{|b_{R1}|^2\} &= \frac{1}{2} \text{E}\{|b_{R2}|^2\} = kTB \left( 1 - \frac{|\underline{Y}R_B|^2}{|2 + \underline{Y}R_B|^2} - \frac{4}{|2 + \underline{Y}R_B|^2} \right) \\ &= kTB \frac{|2 + \underline{Y}R_B|^2 - |\underline{Y}R_B|^2 - 4}{|2 + \underline{Y}R_B|^2} \\ &= kTB \frac{2\underline{Y}^* R_B + 2\underline{Y}R_B}{|2 + \underline{Y}R_B|^2} \\ &= -kTB \frac{4 \text{Re}(\underline{Y}R_B)}{|2 + \underline{Y}R_B|^2} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \text{E}\{b_{R1} b_{R2}^*\} &= \frac{1}{2} \text{E}\{b_{R2} b_{R1}^*\} = -kTB \frac{-2\underline{Y}R_B - 2\underline{Y}^* R_B}{|2 + \underline{Y}R_B|^2} \\ &= kTB \frac{4 \text{Re}(\underline{Y}R_B)}{|2 + \underline{Y}R_B|^2} \\ &= \frac{1}{2} \text{E}\{|b_{R1}|^2\} = \frac{1}{2} \text{E}\{|b_{R2}|^2\}. \end{aligned}$$

---

<sup>26</sup>Der Realteil einer komplexen Größe berechnet sich zu  $\text{Re}(\underline{x}) = \frac{1}{2} (\underline{x} + \underline{x}^*)$ .

Für den normierten Korrelationskoeffizienten folgt

$$\underline{C} = 1.$$

Die Rauschquellen sind vollständig korreliert, wie man es aufgrund des Kurzschlusses zwischen Tor 1 und Tor 2 auch intuitiv erwartet.

**Aufgabe 13.2** Mit (13.13) und (10.24) ergibt sich die Rauschwellenkorrelationsmatrix der thermisch rauschenden Einwegleitung homogener Temperatur  $T$  zu

$$\underline{\mathbf{R}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \mathbb{E}\{|b_{R1}|^2\} & \frac{1}{2} \mathbb{E}\{b_{R1}b_{R2}^*\} \\ \frac{1}{2} \mathbb{E}\{b_{R1}^*b_{R2}\} & \frac{1}{2} \mathbb{E}\{|b_{R2}|^2\} \end{pmatrix} = kTB \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mit (13.14), (13.15) und (13.16) berechnet man die Rauschparameter:

$$\begin{aligned} R_{1,1} &= \frac{1}{2} \mathbb{E}\left\{\left|b_{R1} - \frac{S_{1,1}}{S_{2,1}}b_{R2}\right|^2\right\} = kTB, \\ R_{1,2} &= \frac{1}{2} \mathbb{E}\left\{\left(b_{R1} - \frac{S_{1,1}}{S_{2,1}}b_{R2}\right)\left(\frac{1}{S_{2,1}}b_{R2}\right)^*\right\} = 0, \\ R_{2,2} &= \frac{1}{2} \mathbb{E}\left\{\left|\frac{1}{S_{2,1}}b_{R2}\right|^2\right\} = 0. \end{aligned}$$

Mit (13.17) erhält man die effektive Rauschtemperatur

$$T_{\text{eff}} = T \frac{|\underline{\Gamma}_Q|^2}{1 - |\underline{\Gamma}_Q|^2}.$$

Hieraus folgt mit (13.22) die Rauschzahl

$$F = 1 + \frac{T}{T_0} \frac{|\underline{\Gamma}_Q|^2}{1 - |\underline{\Gamma}_Q|^2}.$$

Falls die Temperatur  $T$  der Einwegleitung der Bezugstemperatur  $T_0$  entspricht, erhält man

$$F = \frac{1}{1 - |\underline{\Gamma}_Q|^2}.$$

Dies entspricht dem Ergebnis, dass man aufgrund von (13.28) und dem Ergebnis von Aufgabe 12.3 erwartet.

**Aufgabe 13.3** Mit (12.36) und (13.31) erhält man

$$\begin{aligned}
 M &= \frac{F_1 + \frac{F_2-1}{G_{A1}} - 1}{1 - \frac{1}{G_{A1}G_{A2}}} \\
 &= \frac{F_1 - 1}{1 - \frac{1}{G_{A1}}} \frac{1 - \frac{1}{G_{A1}}}{1 - \frac{1}{G_{A1}G_{A2}}} + \frac{F_2 - 1}{1 - \frac{1}{G_{A2}}} \frac{1}{G_{A1}} \frac{1 - \frac{1}{G_{A2}}}{1 - \frac{1}{G_{A1}G_{A2}}} \\
 &= M_1 \left( 1 - \frac{G_{A2} - 1}{G_{A1}G_{A2} - 1} \right) + M_2 \frac{G_{A2} - 1}{G_{A1}G_{A2} - 1} \\
 &= M_1 + (M_2 - M_1) \frac{G_{A2} - 1}{G_{A1}G_{A2} - 1}.
 \end{aligned}$$

Falls die gewählte Reihenfolge optimal war, gilt gemäß (13.31):

$$\begin{aligned}
 F_1 + \frac{F_2 - 1}{G_{A1}} &< F_2 + \frac{F_1 - 1}{G_{A2}}, \\
 F_1 - 1 + \frac{F_2 - 1}{G_{A1}} &< F_2 - 1 + \frac{F_1 - 1}{G_{A2}}, \\
 \frac{F_1 - 1}{1 - \frac{1}{G_{A1}}} &< \frac{F_2 - 1}{1 - \frac{1}{G_{A2}}}, \\
 M_1 &< M_2.
 \end{aligned}$$

**Aufgabe 13.4** Aus (13.28) folgt, dass die Rauschzahl  $F$  minimal wird, wenn der verfügbare Leistungsgewinn  $G_A$  maximal wird. Aus (12.39) folgt

$$F_{\min} = \frac{1}{G_{\text{MAG}}} = \frac{|\underline{S}_{1,2}|}{|\underline{S}_{2,1}| (K - \sqrt{K^2 - 1})}.$$

Bei thermisch rauschenden Zweitoren homogener Temperatur  $T$  entspricht die Leistungsanpassung der Rauschanpassung.

## Literatur

- [Ala66] D. W. Allan. »Statistics of atomic frequency standards«. In: *Proceedings of the IEEE* 54.2 (Feb. 1966), S. 221–230.
- [BAB+07] K. Borre u. a. *A Software-Defined GPS and Galileo Receiver: A Single-Frequency Approach*. Boston, MA: Birkhäuser, 2007.
- [Bae02] W. Bächtold. *Mikrowellenelektronik: Komponenten, System- und Schaltungsentwurf*. Braunschweig: Vieweg, 2002.
- [Bae98] W. Bächtold. *Lineare Elemente der Höchstfrequenztechnik*. 2. Auflage. Zürich: Hochschulverlag AG an der ETH Zürich, 1998.
- [Bal05] C. A. Balanis. *Antenna Theory: Analysis and Design*. 3. Auflage. Hoboken, NJ: Wiley-Interscience, 2005.
- [Bar48] M. S. Bartlett. »Smoothing periodograms from time-series with continuous spectra«. In: *Nature* 161 (Mai 1948), S. 686–687.
- [BCC+71] J. A. Barnes u. a. »Characterization of frequency stability«. In: *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement* 20.2 (Mai 1971), S. 105–120.
- [Bes09] R. E. Best. *Phased-Locked Loops: Design, Simulation, and Applications*. 6. Auflage. New York, NY: McGraw-Hill, 2009.
- [Bla07] J. G. Van Bladel. *Electromagnetic Fields*. 2. Auflage. IEEE Press series on electromagnetic wave theory. Hoboken, NJ: Wiley-Interscience, 2007.
- [Bos11] K. Bosch. *Elementare Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung*. 11. Auflage. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2011.
- [BP81] G. J. Burke und A. J. Poggio. *Numerical Electromagnetics Code (NEC) – Method of Moments, Part I: Program Description – Theory*. Springfield, VA: National Technical Information Services, 1981.
- [BW99] M. Born und E. Wolf. *Principles of Optics: Electromagnetic Theory of Propagation, Interference and Diffraction of Light*. 7. Auflage. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1999.

- [CB09] M. Cheney und B. Borden. *Fundamentals of Radar Imaging*. CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics. Philadelphia, PA: Society of Industrial und Applied Mathematics, 2009.
- [CT65] J. W. Cooley und J. W. Tukey. »An algorithm for the machine computation of complex Fourier series«. In: *Mathematics of Computation* 19.90 (Apr. 1965), S. 297–301.
- [Dav11] D. B. Davidson. *Computational Electromagnetics for RF and Microwave Engineering*. 2. Auflage. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2011.
- [ES91] H.-J. Eul und B. Schiek. »A generalized theory and new calibration procedures for network analyzer self-calibration«. In: *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques* 39.4 (Apr. 1991), S. 724–731.
- [ES92] M. L. Edwards und J. H. Sinsky. »A new criterion for linear 2-port stability using a single geometrically derived parameter«. In: *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques* 40.12 (Dez. 1992), S. 2303–2311.
- [FB08] T. Frey und M. Bossert. *Signal- und Systemtheorie*. 2. Auflage. Wiesbaden: Vieweg + Teubner, 2008.
- [Fet86] A. Fettweis. »Wave Digital Filters: Theory and Practice«. In: *Proceedings of the IEEE* 74.2 (Feb. 1986), S. 270–327.
- [FKL+16] O. Föllinger u. a. *Regelungstechnik: Einführung in die Methoden und ihre Anwendung*. 12. Auflage. Berlin: VDE Verlag, 2016.
- [FP92] A. Ferrero und U. Pisani. »Two-port network analyzer calibration using an unknown “Thru”«. In: *IEEE Microwave and Guided Wave Letters* 2.12 (Dez. 1992), S. 505–507.
- [Fri44] H. T. Friis. »Noise figures of radio receivers«. In: *Proceedings of the IRE* 32.7 (Juli 1944), S. 419–422.
- [Fri46] H. T. Friis. »A note on a simple transmission formula«. In: *Proceedings of the IRE* 34.5 (Mai 1946), S. 254–256.
- [Gar05] F. M. Gardner. *Phaselock Techniques*. 3. Auflage. Hoboken, NJ: Wiley-Interscience, 2005.
- [Gil68] B. Gilbert. »A precise four-quadrant multiplier with subnanosecond response«. In: *Solid-State Circuits, IEEE Journal of* 3.4 (Dez. 1968), S. 365–373.

- 
- [Gon97] G. Gonzales. *Microwave Transistor Amplifiers: Analysis and Design*. 2. Auflage. Upper Saddle River: Prentice-Hall, 1997.
- [Gri18] D. J. Griffiths. *Elektrodynamik: Eine Einführung*. 4. Auflage. Halberghaus: Pearson, 2018.
- [GRS07] B. Girod, R. Rabenstein und A. K. E. Stenger. *Einführung in die Systemtheorie*. 4. Auflage. Wiesbaden: Teubner, 2007.
- [Gus13] F. Gustrau. *Hochfrequenztechnik: Grundlagen der mobilen Kommunikationstechnik*. 2. Auflage. München: Carl Hanser Verlag, 2013.
- [GW98] N. Geng und W. Wiesbeck. *Planungsmethoden für die Mobilkommunikation: Funknetzplanung unter realen physikalischen Ausbreitungsbedingungen*. Berlin: Springer, 1998.
- [HA59] H. A. Haus und R. B. Adler. *Circuit Theory of Linear Noisy Networks*. Cambridge, MA: Technology Press of the Massachusetts Institute of Technology, 1959.
- [Hec17] E. Hecht. *Optics*. 5. Auflage. Harlow, GB: Pearson Education, 2017.
- [Hie11] M. Hiebel. *Grundlagen der vektoriiellen Netzwerkanalyse*. 3. Auflage. München: Rohde & Schwarz, 2011.
- [Hof97] M. H. W. Hoffmann. *Hochfrequenztechnik: Ein systemtheoretischer Zugang*. Berlin: Springer, 1997.
- [Hor85] E.-H. Horneber. *Simulation elektrischer Schaltungen auf dem Rechner*. Berlin: Springer, 1985.
- [HR22] P. Heymann und M. Rudolph. *A Guide to Noise in Microwave Circuits: Devices, Circuits, and Measurements*. Hoboken, NJ: Wiley, 2022.
- [Jac14] J. D. Jackson. *Klassische Elektrodynamik*. Hrsg. von C. Witte und M. Diestelhorst. 5. Auflage. Berlin: de Gruyter, 2014.
- [JD93] D. H. Johnson und D. E. Dudgeon. *Array Signal Processing: Concepts and Techniques*. Upper Saddle River, NJ: PTR Prentice-Hall, 1993.
- [Jin15] J.-M. Jin. *Theory and Computation of Electromagnetic Fields*. 2. Auflage. Hoboken, NJ: Wiley, 2015.
- [Jon41] R. C. Jones. »A new calculus for the treatment of optical systems«. In: *Journal of the Optical Society of America* 31.7 (Juli 1941), S. 488–493.
- [Kam11] K. D. Kammeyer. *Nachrichtenübertragung*. 5. Auflage. Wiesbaden: Vieweg + Teubner, 2011.

- [Kar11] K. W. Kark. *Antennen und Strahlungsfelder: Elektromagnetische Wellen auf Leitungen, im Freiraum und ihre Abstrahlung*. 4. Auflage. Wiesbaden: Vieweg + Teubner, 2011.
- [Kay93] S. M. Kay. *Fundamentals of Statistical Signal Processing: Estimation Theory*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1993.
- [KD90] K. W. Kark und R. Dill. »A general theory on the graphical representation of antenna-radiation fields«. In: *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* 38.2 (Feb. 1990), S. 160–166.
- [KH00] H. Klausing und W. Holpp, Hrsg. *Radar mit realer und synthetischer Apertur: Konzeption und Realisierung*. München: Oldenbourg, 2000.
- [KK12] K. D. Kammeyer und K. Kroschel. *Digitale Signalverarbeitung: Filterung und Spektralanalyse mit MATLAB-Übungen*. 8. Auflage. Wiesbaden: Springer Vieweg, 2012.
- [Kra27] M. H. A. Kramers. »La diffusion de la lumière par les atoms«. In: *Atti Cong. Intern. Fisici, (Transactions of Volta Centenary Congress)*. Bd. 2. Como, 1927, S. 545–557.
- [Kro26] R. de L. Kronig. »On the theory of dispersion of X-rays«. In: *Journal of the Optical Society of America* 12.6 (Juni 1926), S. 547–557.
- [Lan69] R. Q. Lane. »The determination of device noise parameters«. In: *Proceedings of the IEEE* 57.8 (Aug. 1969), S. 1461–1462.
- [Leh10] G. Lehner. *Elektromagnetische Feldtheorie: Für Ingenieure und Physiker*. 7. Auflage. Berlin: Springer, 2010.
- [Lev88] N. Levanon. *Radar Principles*. New York, NY: Wiley, 1988.
- [Lov01] A. E. H. Love. »The integration of the equations of propagation of electric waves«. In: *Phil. Trans. R. Soc. London* 197 (Jan. 1901), S. 1–45.
- [Lun16] J. Lunze. *Regelungstechnik 1: Systemtheoretische Grundlagen, Analyse und Entwurf einschleifiger Regelungen*. 11. Auflage. Berlin: Springer, 2016.
- [Maa03] S. A. Maas. *Nonlinear Microwave and RF Circuits*. 2. Auflage. Boston, MA: Artech House, 2003.
- [Mar97] R. B. Marks. »Formulations of the basic vector network analyzer error model including switch-terms«. In: *50th ARFTG Conference Digest*. Bd. 32. Portland, OR, 1997, S. 115–126.

- 
- [Mas53] S. J. Mason. »Feedback theory – Some properties of signal flow graphs«. In: *Proceedings of the IRE* 41.9 (Sep. 1953), S. 1144–1156.
- [ME11] P. Misra und P. Enge. *Global Positioning System: Signals, Measurements, and Performance*. 2. Auflage. Lincoln, MA: Ganga-Jamuna Press, 2011.
- [Mic81] H.-J. Michel. *Zweitor-Analyse mit Leistungswellen*. Stuttgart: Teubner, 1981.
- [Mil92] O. Mildnerberger. *Entwurf analoger und digitaler Filter*. Braunschweig: Vieweg, 1992.
- [Mol11] A. F. Molisch. *Wireless Communications*. 2. Auflage. Chichester, UK: Wiley, 2011.
- [MS00] T. K. Moon und W. C. Stirling. *Mathematical Methods and Algorithms for Signal Processing*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2000.
- [MT74] V. A. Monaco und P. Tiberio. »Computer-aided analysis of microwave circuits«. In: *Microwave Theory and Techniques, IEEE Transactions on* 22.3 (1974), S. 246–263.
- [MYJ80] G. L. Matthaei, L. Young und E. M. T. Jones. *Microwave Filters, Impedance-Matching Networks, and Coupling Structures*. Norwood, MA: Artech House, 1980.
- [OL10] J.-R. Ohm und H. D. Lüke. *Signalübertragung: Grundlagen der digitalen und analogen Nachrichtenübertragungssysteme*. 11. Auflage. Berlin: Springer, 2010.
- [OS10] A. V. Oppenheim und R. W. Schaffer. *Discrete-Time Signal Processing*. 3. Auflage. Upper Saddle River, NJ: Pearson, 2010.
- [Pae12] M. Pätzold. *Mobile Radio Channels*. 2. Auflage. Chichester, UK: Wiley, 2012.
- [Pir96] P. Pirsch. *Architekturen der digitalen Signalverarbeitung*. Stuttgart: Teubner, 1996.
- [Poz12] D. M. Pozar. *Microwave Engineering*. 4. Auflage. Hoboken, NJ: Wiley, 2012.
- [PS08] J. Proakis und M. Salehi. *Digital Communications*. 5. Auflage. New York, NY: McGraw-Hill, 2008.
- [PTVF07] W. H. Press u. a. *Numerical Recipes*. 3. Auflage. New York, NY: Cambridge University Press, 2007.

- [RBI13] T. Rylander, A. Bondeson und P. Ingelström. *Computational Electromagnetics*. Bd. 51. Texts in applied mathematics. New York, NY: Springer, 2013.
- [Ric14] M. A. Richards. *Fundamentals of Radar Signal Processing*. 2. Auflage. New York, NY: McGraw-Hill Education, 2014.
- [Rol62] J. M. Rollett. »Stability and power-gain invariants of linear two-ports«. In: *IRE Transactions on Circuit Theory* 9.1 (März 1962), S. 29–32.
- [Rup72] W. Rupperecht. *Netzwerksynthese: Entwurfstheorie linearer passiver und aktiver Zweipole und Vierpole*. Berlin: Springer, 1972.
- [RWD94] S. Ramo, J. R. Whinnery und T. Van Duzer. *Fields and Waves in Communication Electronics*. 3. Auflage. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 1994.
- [Sch36] S. A. Schelkunoff. »Some equivalence theorems of electromagnetics and their application to radiation problems«. In: *Bell System Technical Journal* 15.1 (Jan. 1936), S. 92–112.
- [Sch99] B. Schiek. *Grundlagen der Hochfrequenz-Messtechnik*. Berlin: Springer, 1999.
- [SDM14] S. Sand, A. Dammann und C. Mensing. *Positioning in Wireless Communications Systems*. Chichester, UK: John Wiley & Sons, 2014.
- [SK11] H. R. Schwarz und N. Köckler. *Numerische Mathematik*. 8. Auflage. Wiesbaden: Vieweg + Teubner, 2011.
- [SM05] P. Stoica und R. Moses. *Spectral Analysis of Signals*. Upper Saddle River, NJ: Pearson Prentice Hall, 2005.
- [ST13] W. L. Stutzman und G. A. Thiele. *Antenna Theory and Design*. 3. Auflage. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 2013.
- [TH07] J. Teich und C. Haubelt. *Digitale Hardware/Software-Systeme: Synthese und Optimierung*. 2. Auflage. Berlin: Springer-Verlag, 2007.
- [Tre02] H. L. Van Trees. *Detection, estimation, and modulation theory: Part 4: Optimum Array Processing*. 4. Auflage. New York, NY: Wiley-Interscience, 2002.
- [TSG16] U Tietze, C. Schenk und E. Gamm. *Halbleiter-Schaltungstechnik*. 15. Auflage. Berlin: Springer Vieweg, 2016.
- [TWK98] M. Thumm, W. Wiesbeck und S. Kern. *Hochfrequenzmeßtechnik: Verfahren und Meßsysteme*. 2. Auflage. Stuttgart: Teubner, 1998.

- [Vie74] P. Vielhauer. *Passive lineare Netzwerke: Mikusinski-Operatoren, Leitungstheorie, Vieltortheorie, Netzwerksynthese*. Berlin: Verlag Technik, 1974.
- [Wit14] R. A. Witte. *Spectrum and Network Measurements*. 2. Auflage. Edison, NJ: SciTech Publishing, 2014.
- [ZF97] R. Zurmühl und S. Falk. *Matrizen und ihre Anwendungen 1: Grundlagen für Ingenieure, Physiker und Angewandte Mathematiker*. 7. Auflage. Berlin: Springer-Verlag, 1997.
- [Zve67] A. I. Zverev. *Handbook of Filter Synthesis*. New York, NY: Wiley, 1967.



# Index

- 10-Term-Fehlermodell, 266
- 3-Term-Fehlermodell, 253
- 5-Term-Fehlermodell, 263
- 7-Term-Fehlermodell, 259
  
- ABCD*-Matrix, *siehe* Kettenmatrix
- Abschluss, 163
  - symmetrischer, 178
  - symmetrischer massegekoppelter, 181
- Abschlussimpedanz, 169
- Abstandsfaktor, 83
- Abtasttheorem, 124, 363, 369
- Abtastung, 124, 360, 369
- Abzweigschaltung, 318
- Admittanzmatrix, 209
- Allan-Deviation, 392, 394
- Allan-Varianz, 392
- Amplitude, 161
- Amplitude, komplexe, 3, 161
- Amplitudengewinn, 332
- Amplitudenrauschen, 376
- Analog-Digital-Wandler, 347
- Anpassung, 163
- Anpassungsfaktor, 164
- Antenne, lineare, 107
- Antenne, omnidirektionale, 103
- Antennenelement, 120
- Apertur, 114
- Aperturantenne, 114
- Auflösebandbreite, 249, 370
- Ausgangskompressionspunkt, 333
  
- Ausgangssignal, 329
  - Eintonanregung, 331
    - Kleinsignalnäherung, 333
  - Zweitonanregung
    - Kleinsignalnäherung, 336
- Ausnutzungsfaktor, 271, 282
- Autokorrelationsfunktion, 110, 372, 386
  - Bandpassrauschen, 375, 379
  - Frequenzrauschen, 381
  - mittlere, 378
  - Phasenrauschen, 379
    - äquivalentes Tiefpassrauschen, 377
- Autotransformation, 175
- Available Power Gain, *siehe* Leistungsgewinn, verfügbarer
- Averaging, *siehe* Mitteln
- Azimutwinkel, 73
  
- Backward Scattering Alignment, 152
- Bandleitung, 57
- Bandpassmodus, 359
- Bandpassrauschen, 376
- Bandpasssignal, 346
- Bartlett-Methode, 374
- Bezugsebene, 204
- Bezugsfrequenz, 376
- Bezugsinduktivität, 184
- Bezugskapazität, 184
- Bezugskreisfrequenz, 183, 346
- Bezugsleitwert, 183
- Bezugstemperatur, 290
- Bezugswelle, 161, 204

- Bezugswiderstand, 183
- Boltzmann-Konstante, 290
- Brechungsgesetz, *siehe* Snellius'sches Brechungsgesetz
- Brechungsindex, 138
- Brechungswinkel, 137
- Brewster-Winkel, 143, 145
  
- Deembedding, 260
- Detektor, 371
- Determinante, 213
- Device under Test, *siehe* Messobjekt
- Dezibel, 133, 281, 290, 380
- Dielektrikum, 5
- Differentiation, Zeitbereich, 352
- Digital-Analog-Wandler, 346
- Dipol, 79
- Dipolantenne, 95, 107
- Dipolmoment, elektrisches, 79
- Dirac-Impuls, 18, 39, 81
- Dirac-Impulses, 350
- Dirac-Impulsfolge, 360
- Direktivität, 253, 260, 266
- Dirichlet-Kern, 126, 364, 370
- Dispersion, 40
- Divergenz
  - Berechnung, 76
  - Definition, 11
  - kartesische Koordinaten, 12
  - Kugelkoordinaten, 76
- Dreileitersystem, symmetrisches, 65, 177
  - massegekoppeltes, 69, 181, 214
- Dreitor, 235
- Dualität
  - Fourier-Transformation, 352
  - Maxwellsche Gleichungen, 17
- Dualtransformation, 176
- Durchflutungsgesetz, *siehe* erste Maxwellsche Gleichung
- Durchlassbereich, 317
- Durchlassdämpfung, 318
- Durchlassgrenze, 317
- Dynamikbereich, 340
- Dämpfung, 384
- Dämpfungsglied, 340
- Dämpfungskonstante, 35
  
- Eigenfrequenz, 384
- Eigenparameter, 216
- Eigenreflexionsfaktor, 205
- Eindeutigkeitstheorem, 88
- Einfallebene, 18, 136
- Einfallsrichtung, 18
- Einfallswinkel, 137
- Einfüguungsleistungsgewinn, 280
- Eingangsimpedanz, 169
- Eingangskompressionspunkt, 332
- Einheitsvektor, 8, 74
- Eintor, 225
- Eintor, rauschendes, 289
- Eintorquelle, 225
- Einwegleitung, 235
- Elektronenmasse, 146
- Elementardipol, 97
- Elementarladung, 146
- Elementrichtcharakteristik, 109, 116, 122
- Elementrichtungsfaktor, 108
- Empfangsleistung
  - Freiraumausbreitung, 131
  - Freiraumausbreitung, polarimetrisch, 135
  - Mehrwegeausbreitung, 155
  - Streuung, 150
  - Streuung, polarimetrisch, 154
- Energiedichte
  - elektrische, 24
  - magnetische, 24
- Energiedichtespektrum, 387

- Energieflussdichte, 24
- Energiegeschwindigkeit, 32
- Ersatzrauschquelle, 298
- Excess Noise Ratio, *siehe* Übertemperaturverhältnis
- Faltungstheorem, 352
- Fehlerkorrektur
  - Rauschzahlmessung, 306
  - Reflektometer, 252–255
  - Vektornetzwerkanalysator, 259–261
- Fehlerzweitor, 251, 257
- Feldimpedanz, 140, 143
- Feldstärke
  - elektrische, 3
    - Dipol, 86
    - Fernfeldnäherung, 85
  - magnetische, 3
    - Dipol, 86
    - Fernfeldnäherung, 84
- Feldwellenwiderstand, 85
  - in  $z$ -Richtung, 140, 142
  - transversalelektrische Welle, 34
  - transversalelektromagnetische Welle, 32
  - transversalmagnetische Welle, 35
  - Vakuum, 32
- Fensterfunktion, 124, 355, 369
- Fernfeld, 82
- Fernnebensprechen, 248
- Flussdichte
  - elektrische, 3
  - magnetische, 4
- Flächenelement
  - Berechnung, 75
  - Kugelkoordinaten, 75
- Flächenladungsdichte
  - elektrische, 18, 22
  - magnetische, 19, 22
- Flächenstromdichte
  - elektrische, 19, 22
  - magnetische, 18, 23
- Forward Scattering Alignment, 152
- Fourier-Korrespondenzen, 374
- Fourier-Reihe, 363
- Fourier-Transformation, 349
- Fourier-Transformation, diskrete, 365
- Fraunhofer-Näherung, *siehe* Fernfeldnäherung
- Freiraumwellenlänge, 36
- Frequenz, 3
- Frequenzabweichung
  - mittlere relative, 392
  - momentane relative, 391
- Frequenzbereich, 3
- Frequenzrauschen, 380
- Frequenzverschiebung, 353
- Fresnel-Näherung, 82
- Fresnelsche Formeln, 138
- Funkkommunikationssystem, iii
- Funknavigationssystem, iii
- Führungsübertragungsfunktion, 388
- Gauß, Satz von, 12
- Gaußscher Satz in der Ebene, 13
- Gegentaktmode, 177
- Gegentaktspannung, 67
  - resultierende, 178
- Gegentaktstrom, 69
  - resultierender, 178
- Gegentaktwelle, 66, 177
- Genauigkeit, stationäre, 385
- Gesamtelektroneninhalt, 148
- Gesetz, multiplikatives, 108
- Gewinn, 103, 133
  - Ausgangsanpassung, 286, 287
  - Eingangsanpassung, 286
- Gitterkeule, 125, 126
- Gleichanteil, 330
- Gleichgewicht, thermodynamisches, 291

- Gleichtaktmode, 177
- Gleichtaktspannung, 67
  - resultierende, 178
- Gleichtaktstrom, 69
  - resultierender, 178
- Gleichtaktwelle, 66, 177
- Gradient
  - Berechnung, 75
  - kartesische Koordinaten, 27
  - Kugelkoordinaten, 75
- Grating Lobe, *siehe* Gitterkeule
- Greensche Funktion, 81
  - Fernfeldnäherung, 82
- Grenzflächenbedingungen
  - Dielektrika, 21
  - elektrisches Feld, 18–19
  - idealer elektrischer Leiter, 21–22
  - idealer magnetischer Leiter, 22–23
  - magnetisches Feld, 19–20
- Grundwelle, 330
- Gruppenantenne, 120
- Gruppenantenne, lineare, 122
- Gruppengeschwindigkeit, 39, 147
  - Mehrleitersystem, 62
  - Zweileitersystem, 55
- Gruppenlaufzeit, 38
- Gruppenrichtcharakteristik, 109, 116, 122
  - konstante Strombelegung, 118
  - Strombelegung mit konstanten Phasendekrement, 127
- Gruppenrichtungsfaktor, 108
  - Aperturantenne, 115, 116
  - Dipolantenne, 110
  - Gruppenantenne, 121
  - konstante Strombelegung, 118
  - lineare Antenne, 108, 109
  - lineare Gruppenantenne, 123
  - Strombelegung mit konstanten Phasendekrement, 126
- Größe, metrische, 74
- Harmonische, 331, 333
- Harmonischenabstand, 334
- Hauptkeule, 112, 125, 126
- Helmholtz-Gleichung
  - elektrische Feldstärke, 27
  - magnetische Feldstärke, 27
  - Vektorpotential, 71
- Helmholtz-Gleichung, zweidimensionale
  - elektrische Feldstärke, 29
  - magnetische Feldstärke, 29
- Hertzscher Dipol, *siehe* Dipol
- Hilbert-Transformation, 354
- Hochfrequenzmesstechnik, iii
- Hochfrequenztechnik, iii
- Hochfrequenzverstärker, 267
- Hochpassprototyp, 320
- Hohlleiter, 45
- Hohlraumresonator, 175
- Horizontaldiagramm, 105
- Hornantenne, 114
- Huygens'sches Prinzip, 91
- Huygens-Äquivalent, 93
- Impedanz, 168
- Impedanzmatrix, 209
- Impulsantwort, 38, 350
  - reelle, 353
- Impulsautokorrelationsfunktion, 387
- Induktionsgesetz, *siehe* zweite Maxwell'sche Gleichung
- Induktivitätsbelag, 55
  - Bandleitung, 58
  - Koaxialleitung, 59
- Induktivitätsbelagsmatrix, 63
- Influenzbelagskoeffizientenmatrix, 63

- 
- Inphasekomponente, 346
  - Insertion Power Gain, *siehe* Einfügungsleistungsgewinn
  - Intensität
    - Dipol, 88
    - Fernfeldnäherung, 85
  - Interceptpunkt
    - ausgangsseitiger, 338
    - Kaskade, 342
    - eingangsseitiger, 337
    - Kaskade, 342
  - Interceptpunkt der Harmonischen
    - ausgangsseitiger, 335
    - eingangsseitiger, 334
  - Intermodulationsabstand, 336
  - Intermodulationsprodukt, 336
  - Interpolation, 367
  - Inversion, 183
  - Inversionsdiagramm, 185
  - Ionosphäre, 146
  - Ionosphärenfehlerkorrektur, 148
  - isotrop, 16
  
  - Jones-Vektor, 42
  
  - Kalibrierstandard, 253
  - Kapazitätsbelag, 55
    - Bandleitung, 57
    - Koaxialleitung, 58
  - Kaskade, 213, 301
  - kausal, 354
  - Kennlinie, 329
    - Kaskade, 341
  - Kettenbruch, 318
  - Kettenmatrix, 214
  - Kirchhoff-Helmholtz-Integral, 91
  - Kleinsignalnäherung, 333
  - Klemmenleistungsgewinn, 278, 279
  - Knotenregel, Kirchhoffsche, 15
  - Koaxialleitung, 58
  - Kontinuitätsgleichung, 14, 15
  - Konversionsparameter, 216
  - Koordinaten
    - krummlinige, 73
    - orthogonale, 74
  - Koordinatenlinie, 73
  - Kopplungsfaktor, 66
  - Kramers-Kronig-Beziehungen, 355
  - Kreisfrequenz, 3, 330
  - Kreisfrequenz, kritische, 35
  - Kreuzschaltung, 231
  - Kugelkoordinaten, 73
  
  - $\lambda/2$ -Transformator, 175, 234
  - $\lambda/4$ -Transformator, 176, 234
  - Ladung
    - elektrische, 10
    - magnetische, 14
  - Ladung, elektrische, 15
  - Ladungsdichte
    - elektrische, 4
    - magnetische, 4
  - Ladungserhaltung, 14–15
  - Ladungserhaltungssatz, 15
  - Laplace-Gleichung, 51
  - Laplace-Operator
    - Definition, 27
    - kartesische Koordinaten, 28
  - Laplace-Operator, skalarer
    - Berechnung, 78
    - Definition, 52
    - kartesische Koordinaten, 52
    - Kugelkoordinaten, 78
  - Laplace-Operator, zweidimensionaler, 29
  - Lasttoranpassung, 266
  - Leistung, 171
    - abgestrahlte, 85
    - ablaufende Welle, 204
    - Eintorquelle, 269

- hinlaufende Welle, 162
- Mehrtor, 204
- rücklaufende Welle, 162
- symmetrisches Dreileitersystem, 69
- verfügbare, 271
- zulaufende Welle, 203
- Zweileitersystem, 56
- Leistungsanpassung, 271
- Leistungsdichte, 372
- Leistungsdichtespektrum, 373, 386
  - Bandpassrauschen, 375
  - Frequenzrauschen, 381
  - mittleres, 379
  - Phasenrauschen, 379
  - äquivalentes Tiefpassrauschen, 377
- Leistungsgewinn, maximaler stabiler, 285
- Leistungsgewinn, maximaler verfügbarer, 282, 284
- Leistungsgewinn, verfügbarer, 281
  - Kaskade, 281
- Leistungsteiler, allseitig angepasster, 238
- Leistungsteiler, eingangsseitig angepasster, 239
- Leiter
  - idealer elektrischer, 21
  - idealer magnetischer, 22
- Leitfähigkeit, 17
- Leitung, koplanare, 60
- Leitung, kurzgeschlossene, 173
- Leitung, leerlaufende, 174
- Leitungsdiagramm, 191
- Leitungsgleichungen, 55
- Leitungsstrom
  - elektrischer, 5, 15
  - magnetischer, 9
- Leitungsstück, 232
- Leitungstransformation, 201
- Lichtgeschwindigkeit, 37
- Linienelement
  - Berechnung, 74
  - Kugelkoordinaten, 74
- Longitudinalkomponente, 30
- Lorentz-Reziprozitätstheorem, *siehe* Reziprozitätstheorem
- $\mu$ -Test, 276
- Main Lobe, *siehe* Hauptkeule
- Maschenregel, Kirchhoffsche, 10
- Mason-Regeln, 205
- Maximum Available Power Gain, *siehe* Leistungsgewinn, maximaler verfügbarer
- Maximum Stable Power Gain, *siehe* Leistungsgewinn, maximaler stabiler
- Maxwellsche Gleichung
  - dritte, 10–13
  - erste, 5–9
  - vierte, 14
  - zweite, 9–10
- Mehrleitersystem, 60
- Mehrtor, 203
  - eigenreflexionsfreies, 207
  - eigenreflexionssymmetrisches, 209
  - entkoppeltes, 296
  - lineares, 204
  - passives, 207
  - rauschendes, 292
  - reziprokes, 209
  - transmissionssymmetrisches, 209
  - verlustfreies, 207, 296
- Mehrwegeausbreitung, 155
- Messleitung, 171
- Messobjekt, 249, 251, 257, 304
- Messtoranpassung, 253, 260
- Mikrostreifenleitung, 60
- Mischer
  - additiver, 344

- idealer, 343
- multiplikativer, 345
- Mitteln, 373
- Mode, 30
- Modenkonzersion, 179, 216, 227, 241
- Momentanfrequenz, 380
- Momentenmethode, 94
- Multiplizierer, 343, 383
- Nahfeld-Fernfeld-Transformation, 93
- Nahnebensprechen, 248
- Nebenkeule, 112, 125
- Netzwerk, 220
  - massefreies, 211
  - rauschendes, 293
- Norm, 32
- Normaleneinheitsvektor, 13, 18
- Norton-Äquivalent, 226
- Nullphase, 161
- Oberwelle, 331
- Ohmsches Gesetz, 17
- Ordnung, 318
- Ortsbereich, 110
- OSM-Verfahren, 253
- II-Schaltung, 189
- Paralleladmittanz, 229
- Paralleleitungskoppler, 245
- Parallelschaltung
  - Blindleitwert, 189, 201
  - Wirkleitwert, 189, 200
- Periodogramm, 370, 373
- Permeabilität, 16
  - absolute, 16
  - komplexe, 17
  - relative, 16
- Permittivität, 16
  - absolute, 16
  - komplexe, 17
  - relative, 16
- Pfadlängenverkürzung, 108
- Phase, 380
- Phase Locked Loop, *siehe* Phasenregelschleife
- Phasendekrement, 124
- Phasendetektor, 383
- Phasengeschwindigkeit, 37, 147
  - Mehrleitersystem, 61
  - Zweileitersystem, 55
- Phasenkonstante, 28, 35, 71, 147
  - Mehrleitersystem, 61
  - transversalelektromagnetische Welle, 31
- Phasenkonstante, kritische, 30
  - transversalelektrische Welle
    - Hohlleiter, 47
  - transversalmagnetische Welle
    - Hohlleiter, 49
- Phasenlaufzeit, 37
- Phasenrauschen, 376
- Phasenregelschleife, 382
- Phasenschieber, 227
- Phasenvektor, 30, 82
- Phasenverschiebung, 83, 108
- Phasenzentrum, 84
- Plasmakreisfrequenz, 147
- Poisson-Gleichung, 80
- Polarisation, 42
  - lineare, 43
  - zirkulare, 43
- Polarisationsanpassung, 136
- Polarisationsbasen, 43
- Poldistanzwinkel, 73
- Potenzreihe, 329
- Power Gain, *siehe* Klemmenleistungsgewinn
- Poynting-Vektor
  - Dipol, 86
  - Fernfeldnäherung, 85
  - komplexer, 24

- reeller, 23
- transversalelektromagnetische Welle, 32
- Proportional-Integral-Regler, *siehe* Regler
- Proportionalitätsprinzip, 351
- Quadraturdemodulator, 347
- Quadraturkomponente, 346
- Quadraturmodulator, 346
- Quelle, 217
- Quelltoranpassung, 266
- Radargleichung, 151
- Radartechnik, iii
- Rauschabstand, 339
- Rauschanpassung, 310
- Rauschbandbreite, 373
- Rauschen
  - additives, 375
- Rauschen, thermisches, 290
- Rauschleistung, verfügbare, 289, 290, 292
- Rauschleistungsdichte, verfügbare, 290
- Rauschmaß, 302
- Rauschparameter, 298
- Rauschquelle, 304
- Rauschtemperatur, 292
- Rauschtemperatur, effektive, 298
  - Kaskade, 302
  - minimale, 307
- Rauschurwelle, 289, 292
- Rauschwellenkorrelationsmatrix, 293, 296
- Rauschzahl, 299, 301
  - Kaskade, 302
  - minimale, 310
- Rauschzahl, zusätzliche, 299
  - Kaskade, 302
- Rechteckfenster, 357, 369
- Rechteckhohlleiter, *siehe* Hohlleiter
- Reflektometer, 249
  - ideales, 251
  - imperfektes, 251
- Reflexionsfaktor, 162, 168, 225
  - idealer elektrischer Leiter, 145
  - idealer magnetischer Leiter, 145
  - parallele Polarisation, 143
  - senkrechte Polarisation, 140
- Reflexionsgleichlauf, 253, 260, 263
- Reflexionswinkel, 137
- Regler, 383
- Renormalisierung, 232
- Resolution Bandwidth, *siehe* Auflösbandbreite, *siehe* Auflösbandbreite
- Resonator, *siehe* Hohlraumresonator
- reziprok, 25
- Reziprozitätstheorem, 25, 208
- Richtcharakteristik, 109, 116, 122
  - Aperturantenne, 116
  - Definition, 104
  - Dipol, 105
  - Dipolantenne, 112
- Richtcharakteristik, vektorielle komplexe, 107
- Richtdiagramm, 105
- Richtfaktor
  - Definition, 103
  - Dipol, 104, 105
  - Dipolantenne, 112
  - konstante Strombelegung, 120
  - lineare Antenne, 109
  - Strombelegung mit konstanten Phasendekrement, 127
- Richtkoppler, 243
- Richtungsfaktor, 108
  - Aperturantenne, 116
  - lineare Antenne, 107
- Richtungsfaktor, vektorieller, 83

- 
- Ringmischer, 345
  - Rollett, *siehe* Stabilitätsfaktor
  - Rotation
    - Berechnung, 77
    - Definition, 6
    - kartesische Koordinaten, 8
    - Kugelkoordinaten, 77
  - rotationsinvariant, 379
  - Schaltungssimulation, 223
  - Selbstkalibrierung, 261
  - Serienimpedanz, 228
  - Serienschaltung
    - Blindwiderstand, 188, 200
    - Wirkwiderstand, 187, 200
  - Side Lobe, *siehe* Nebenkeule
  - Signal-Rausch-Verhältnis, 300
  - Signalflussgraph, 205
  - Sinclair-Matrix, *siehe* Streumatrix, komplexe polarimetrische
  - Skalarprodukt, 5
  - Smith-Diagramm, 196
  - Snellius'sches Brechungsgesetz, 137
  - Spaltfunktion, 118, 357
  - Spannung
    - resultierende, 167
    - Zweileitersystem, 53
  - Spannungsquelle, 218
  - Spannungsvektor
    - Mehrleitersystem, 62
  - Spektralanalysator, 304, 372
  - Spektralanalyse, 368
  - Spektrum, 368
  - Spektrumanalysator, *siehe* Spektralanalysator, *siehe* Spektralanalysator
  - Sperrbereich, 317, 318
  - Sperrdämpfung, 318
  - Sperrgrenze, 318
  - Spiegelung
    - idealer elektrischer Leiter, 90
    - idealer magnetischer Leiter, 91
  - Spiegelungsprinzip, 90–91
  - Sprungfunktion, 18
  - Spurious Free Dynamic Range, *siehe* Dynamikbereich
  - Stabilität
    - Eintorquelle, 269
    - Phasenregelschleife, 385
    - unbedingte, 275
    - Zweitor, 272
  - Stabilitätsfaktor, 277
  - Stabilitätskreis, 273, 274
  - Standing Wave Ratio, *siehe* Stehwellenverhältnis
  - Stehwellenverhältnis, 166
  - Stichleitung, 196
  - Stokes, Satz von, 8
  - Strahlungsleistung, 24
    - mittlere, 25
  - Streifenleitung, 60
  - Streuer, 149
  - Streumatrix, 205
    - komplexe polarimetrische, 154
  - Streuparameter, 205
    - komplexe polarimetrische, 152
    - modale, 215, 217, 226, 240
    - nodale, 216, 217
  - Streuquerschnitt, 150
    - bistatischer, 151
    - monostatischer, 151
  - Streuung, 149
  - Strom
    - elektrischer, 5
    - magnetischer, 9
    - resultierender, 167
    - Zweileitersystem, 54
  - Strombelegung, 82
    - binomiale, 129
    - konstante, 112, 117

- konstantes Phasendekrement, 124
- kosinusförmige, 120
- sinusförmige, 110
- Stromdichte
  - elektrische, 4
  - magnetische, 4
- Stromquelle, 219
- Stromvektor
  - Mehrleitersystem, 62
- Störabstand, 340
- Störübertragungsfunktion, 388
- Superpositionsprinzip, 351
- Symmetrie, Übertragungsfunktion, 353
- Synchronisation, 382–390
- Synthesizer, 390
- System, nichtlineares, 329
  - statisches, 329
- Systemrauschtemperatur, 299
- T-Schaltung, 189
  - überbrückte, 230
- Teiler, 390
- Thévenin-Äquivalent, 226
- Tiefpass-Bandpass-Transformation, 322–324, 346, 360, 378
- Tiefpass-Bandsperre-Transformation, 324–327
- Tiefpass-Hochpass-Transformation, 320–322
- Tiefpassmodus, 358
- Tiefpassprototyp, 317
- Tiefpassrauschen, äquivalentes, 376
- Tiefpasssignal, äquivalentes, 346
- Toleranzschema
  - Bandpass, 322
  - Bandsperre, 325
  - Hochpass, 320
  - Tiefpass, 317
- Topologiematrix, 222
- TOSM-Verfahren, 261, 266
- Total Electron Content, *siehe* Gesamtelektroneninhalt
- Totalreflexion, 138, 163
- Transducer Power Gain, *siehe* Übertragungsleistungsgewinn
- Transfermatrix, 136, 154
- Transformation
  - Impedanz, 169
  - Reflexionsfaktor, 163
  - symmetrisches Dreileitersystem, 179
- Transistor, 267
- Transmissionsfaktor
  - parallele Polarisation, 143
  - senkrechte Polarisation, 141
- Transmissionsgleichlauf, 260, 263
- Transmissionsmatrix, 212
  - Kaskade, 213
- Transmissionsparameter, 212
- Transversalkomponente, 30
- Unilateral Transducer Power Gain, *siehe* Übertragungsleistungsgewinn, unilateraler
- UOSM-Verfahren, 261
- Urwelle, 217, 225
- Vakuumlichtgeschwindigkeit, 38
- Variable Frequency Oscillator, 382
- Varianz, 372
- Vektornetzwerkanalysator, 255
  - idealer, 257
  - imperfekter, 257
  - vereinfachter, 262
  - vollwertiger, 255
- Vektorpotential
  - elektrisches, 72
  - magnetisches, 71, 81
    - Dipol, 86
    - Fernfeldnäherung, 82
- Vektorprodukt, 19

- 
- Verlustleistungsdichte, 23
  - Verschiebungsstrom
    - elektrischer, 5
    - magnetischer, 9
  - Vertikaldiagramm, 105
  - Verzweigung, 238
  - Viertor, 240
  - Viertor-Zweitord-Reduktion, 252
  - Volumenelement
    - Berechnung, 75
    - Kugelkoordinaten, 75
  - Vorverstärker, rauscharmer, 307
  - Vorzeichenfunktion, 354
  - Welle
    - ablaufende, 203
    - ebene, 41
    - ebene homogene, 41
    - elektromagnetische, 28
    - hinlaufende, 161
    - rücklaufende, 161
    - stehende, 163
    - transversalelektrische, 33
      - Hohlleiter, 46
    - transversalelektromagnetische, 31
      - Bandleitung, 57
      - Zweileitersystem, 52
    - transversalmagnetische, 34
      - Hohlleiter, 49
    - zulaufende, 203
  - Wellenamplitude, komplexe, 161, 167, 203
    - Rauschurwelle, 289, 292
    - symmetrisches Dreileitersystem, 177
    - Urwellen, 217, 225
  - Wellenamplitude, resultierende komplexe, 163
  - Wellenleiter, zylindrischer, 28
  - Wellenlänge, 36, 83
  - Wellenlänge, kritische, 36
  - Wellenwiderstand
    - Bandleitung, 58
    - Gegentaktwelle, 67
    - Gleichtaktwelle, 67
    - Koaxialleitung, 59
    - symmetrisches Dreileitersystem, 67
    - Zweileitersystem, 54, 55
  - Wellenwiderstandsmatrix, 62
  - Wellenzahl, 35
  - Wellenzahlbereich, 110
  - Wirkfläche, 131, 133
  - Wirkungsgrad, 103
  - Wurzelortskurve, 385
  - Y-Faktor, 305
  - Zeitbereichsanalyse, 350
  - Zero-Padding, 367
  - Zirkulator, 235
  - Zweileitersystem, 50
  - Zweitord
    - eigenreflexionsfreies, 296
    - rauschendes, 297, 301
    - symmetrisch aufgebautes, 226
  - Zweitordgewinn, unilateraler, 286
  - Zweiwertvarianz, *siehe* Allan-Varianz
  - zyklostationär, 378
  - Zylinderkoordinaten, 78
  - Ähnlichkeitssatz, 351
  - Überabtastung, 367, 371
  - Übertemperaturverhältnis, 306
  - Übertragungsfaktor, 132
  - Übertragungsfunktion, 38, 229, 349
  - Übertragungsleistungsgewinn, 280
  - Übertragungsleistungsgewinn, unilateraler, 285
    - maximaler, 288