Mobilkommunikation

4. Übung

Prof. Dr.-Ing. habil. Tobias Weber

9. Januar 2023

Universität Rostock

1. Aufgabe

Für den n -ten Subträger eines OFDM-Systems mit der Übertragungsfunktion $\underline{H}_n$ und dem gesendeten Datensymbol $\underline{d}_n$ erhält man das Empfangssignal

$$\tilde{\underline{e}}_n = \underline{H}_n \underline{d}_n + \tilde{\underline{n}}_n,$$

wobei $\tilde{\underline{n}}_n$ Rauschen der Leistung σ^2 ist.

- a) Zeigen Sie, dass die kontinuierlichwertige Schätzung

$$\hat{\underline{d}}_n = \frac{\tilde{\underline{e}}_n}{\underline{H}_n}$$

des n -ten Datensymbols $\underline{d}_n$ den Rekonstruktionsfehler $|\tilde{\underline{e}}_n - \underline{H}_n \hat{\underline{d}}_n|^2$ minimiert! Man bezeichnet diese Schätzung als Least-Squares-Schätzung (LS-Schätzung).

- b) Zeigen Sie, dass für die den mittleren quadratischen Fehler $E\left\{|\underline{d}_n - \hat{\underline{d}}_n|^2\right\}$ minimierende lineare Schätzung (Minimum-Mean-Square-Error-Schätzung, MMSE-Schätzung) des n -ten Datensymbols

$$\hat{\underline{d}}_n = \frac{\underline{H}_n^* \tilde{\underline{e}}_n}{|\underline{H}_n|^2 + \sigma^2}$$

gilt! Verwenden Sie den Ansatz

$$\hat{\underline{d}}_n = \underline{c}_n \tilde{\underline{e}}_n$$

für den linearen Schätzer und bestimmen Sie den optimalen Proportionalitätsfaktor $\underline{c}_n$.

Im Folgenden wird Gauß-Rauschen

$$p_n(\tilde{\underline{d}}_n) = \frac{1}{\pi\sigma^2} e^{-\frac{|\tilde{\underline{d}}_n|^2}{\sigma^2}}$$

angenommen.

c) Zeigen Sie, dass die Maximum-Likelihood-Schätzung (ML-Schätzung)

$$\hat{\underline{d}}_n = \arg \max_{\underline{d}_n} \{p_{e|d}(\tilde{\underline{e}}_n | \underline{d}_n)\} = \arg \max_{\underline{d}_n} \{\tilde{\underline{d}}_n = \tilde{\underline{e}}_n - \underline{H}_n \underline{d}_n\}$$

gleich der Least-Squares-Schätzung ist!

d) Zeigen Sie, dass bei normalverteilten Datensymbolen

$$p_d(\underline{d}_n) = \frac{1}{\pi} e^{-|\underline{d}_n|^2}$$

die Maximum-a-posteriori-Schätzung (MAP-Schätzung)

$$\hat{\underline{d}}_n = \arg \max_{\underline{d}_n} \{p_{d|e}(\underline{d}_n | \tilde{\underline{e}}_n)\}$$

gleich der Minimum-Mean-Square-Error-Schätzung ist!

2. Aufgabe

Der Empfangsvektor

$$\underline{e} = \underline{u} + \underline{n}$$

ergibt sich als Überlagerung einer bekannten Sendesignalform $\underline{u}$ und eines unbekanntes mittelwertfreien farbigen Rauschens $\underline{n}$ mit der Korrelationsmatrix $\underline{R}_{nn}$. Bestimmen Sie ein lineares durch die Impulsantwort $\underline{h}$ beschriebenes Filter so, dass das Signal-Rausch-Verhältnis

$$\gamma = \frac{|\underline{h}^T \cdot \underline{u}|^2}{E\left\{|\underline{h}^T \cdot \underline{n}|^2\right\}}$$

am Ausgang des Filters maximal wird! Ein möglicher Lösungsweg besteht darin, das Systemmodell zunächst durch Einsatz eines Prewhitening Filters in ein äquivalentes Modell mit weißem Rauschen zu überführen.