Mobilkommunikation

5. Übung

Prof. Dr.-Ing. habil. Tobias Weber

6. Dezember 2022
Universität Rostock

1. Aufgabe

Gegeben ist ein durch die Kanalmatrix

$$\underline{\mathbf{H}} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -0{,}25 \\ 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -0{,}25 \\ \sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

charakterisierter MIMO-Kanal. Die gesamte verfügbare Sendeleistung ist

$$S = 1.$$

Das Gauß-Rauschen an den Empfangsantennen ist weiß mit der Leistung σ^2.

a) Berechnen Sie durch Eigenwertzerlegung der Gramschen Matrix der Spaltenvektoren $\underline{\mathbf{H}}^{*\mathrm{T}} \cdot \underline{\mathbf{H}}$ die in der Matrix $\underline{\mathbf{V}}$ enthaltenen rechten Singulärvektoren und die Singulärwerte $\mathbf{\Sigma}$ der Kanalmatrix!

b) Zeigen Sie, dass sich die linken Singulärvektoren $\underline{\mathbf{U}}_m$ gemäß

$$\underline{\mathbf{U}}_m = \frac{1}{\sqrt{\lambda_m}} \underline{\mathbf{H}} \cdot \underline{\mathbf{V}}_m$$

aus den Singulärwerten $\sqrt{\lambda_m}$ und den zugehörigen rechten Singulärvektoren $\underline{\mathbf{V}}_m$ berechnen lassen! Berechnen Sie die Matrix $\underline{\mathbf{U}}$ der linken Singulärvektoren!

c) Man kann die kanalkapazitätsmaximierende Leistungsallokation mittels Waterfilling berechnen. Skizzieren Sie die so erhaltenen normierten Sendeleistungen S_1/S, S_2/S und S_3/S der parallelen Kanäle als Funktionen von $10\log(S/\sigma^2)$ /dB!

2. Aufgabe

$\underline{\mathbf{H}}$ ist eine $M \times N$ Kanalmatrix mit der Singulärwertzerlegung

$$\underline{\mathbf{H}} = \underline{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{\Sigma} \cdot \underline{\mathbf{V}}^{*\mathrm{T}}.$$

Es wird ein Sender mit einer linearen durch die unitäre Matrix $\underline{\mathbf{V}}$ beschriebenen Sendesignalvorverarbeitung verwendet. Das n-te Diagonalement S_n der Diagonalmatrix $\mathbf{S}$ entspricht der für die Signatur in der n-ten Spalte von $\underline{\mathbf{V}}$ allokierten Sendeleistung, das heißt die Korrelationsmatrix des zu sendenden Datenvektors $\underline{\mathbf{t}}$ ist

$$\mathrm{E}\left\{\underline{\mathbf{t}} \cdot \underline{\mathbf{t}}^{*\mathrm{T}}\right\} = \mathbf{S}.$$

a) Berechnen Sie die Korrelationsmatrix

$$\underline{\mathbf{R}}_{\mathrm{ss}} = \mathrm{E}\left\{\underline{\mathbf{s}} \cdot \underline{\mathbf{s}}^{*\mathrm{T}}\right\}$$

des Sendesignals

$$\underline{\mathbf{s}} = \underline{\mathbf{V}} \cdot \underline{\mathbf{t}}$$

als Funktion von $\underline{\mathbf{V}}$ und der Sendeleistungsallokation $\mathbf{S}$!

Zunächst ist das Gauß-Rauschen $\underline{\mathbf{n}}$ an den Empfangsantennen weiß.

b) Berechnen Sie die Korrelationsmatrix

$$\underline{\mathbf{R}}_{\mathrm{ee}} = \mathrm{E}\left\{\underline{\mathbf{e}} \cdot \underline{\mathbf{e}}^{*\mathrm{T}}\right\}$$

des Empfangssignals

$$\underline{\mathbf{e}} = \underline{\mathbf{H}} \cdot \underline{\mathbf{s}} + \underline{\mathbf{n}}$$

als Funktion der Kanalmatrix $\underline{\mathbf{H}}$, der Korrelationsmatrix $\underline{\mathbf{R}}_{\mathrm{ss}}$ des Sendesignals $\underline{\mathbf{s}}$ und der Rauschleistung σ^2!

c) Zeigen Sie, dass sich die Kanalkapazität für eine gegebene Sendeleistungsallokation $\mathbf{S}$ zu

$$C = \mathrm{ld}\left(\det\left(\frac{\underline{\mathbf{R}}_{\mathrm{ee}}}{\sigma^2}\right)\right)$$

ergibt!

Nun ist das Gauß-Rauschen an den Empfangsantennen korreliert mit der Korrelationsmatrix

$$\underline{\mathbf{R}}_{\mathrm{nn}} = \mathrm{E}\left\{\underline{\mathbf{n}} \cdot \underline{\mathbf{n}}^{*\mathrm{T}}\right\}.$$

d) Berechnen Sie die Kanalkapazität C für eine gegebene Sendeleistungsallokation $\mathbf{S}$ als Funktion der Rauschkorrelationsmatrix $\underline{\mathbf{R}}_{\mathrm{nn}}$ und der Empfangskorrelationsmatrix $\underline{\mathbf{R}}_{\mathrm{ee}}$!