Mobilkommunikation

13. Übung

Prof. Dr.-Ing. habil. Tobias Weber

26. Januar 2023

Universität Rostock

1. Aufgabe

Die Singulärwertzerlegung der $M \times N$ Matrix $\underline{\mathbf{H}}$ ist

$$\underline{\mathbf{H}} = \underline{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{\Sigma} \cdot \underline{\mathbf{V}}^{*\mathrm{T}}.$$

Die Pseudoinverse der $M \times N$ Diagonalmatrix

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \sqrt{\lambda_R} & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

ist als $N \times M$ Matrix

$$\mathbf{\Sigma}^{\dagger} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \frac{1}{\sqrt{\lambda_R}} & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

definiert.

a) Berechnen Sie die Least-Squares-Pseudolösung

$$\underline{\mathbf{s}}_{\mathrm{LS}} = \left(\underline{\mathbf{H}}^{*\mathrm{T}} \cdot \underline{\mathbf{H}}\right)^{-1} \cdot \underline{\mathbf{H}}^{*\mathrm{T}} \cdot \underline{\mathbf{e}}$$

des überbestimmten linearen Gleichungssystems

$$\underline{\mathbf{e}} = \underline{\mathbf{H}} \cdot \underline{\mathbf{s}}$$

mit der hochformatigen Matrix $\underline{\mathbf{H}}$ als Funktion von $\underline{\mathbf{U}}$, $\boldsymbol{\Sigma}$, $\underline{\mathbf{V}}$ und $\underline{\mathbf{e}}$! Die Matrix $\left(\underline{\mathbf{H}}^{*\mathrm{T}} \cdot \underline{\mathbf{H}}\right)^{-1} \cdot \underline{\mathbf{H}}^{*\mathrm{T}}$ wird auch als linke Pseudoinverse von $\underline{\mathbf{H}}$ bezeichnet.

b) Berechnen Sie die Minimum-Mean-Square-Error-Pseudolösung

$$\underline{\mathbf{s}}_{\mathrm{MMSE}} = \left(\underline{\mathbf{H}}^{*\mathrm{T}} \cdot \underline{\mathbf{H}} + \frac{1}{\gamma}\mathbf{E}\right)^{-1} \cdot \underline{\mathbf{H}}^{*\mathrm{T}} \cdot \underline{\mathbf{e}}$$

des überbestimmten linearen Gleichungssystems

$$\underline{\mathbf{e}} = \underline{\mathbf{H}} \cdot \underline{\mathbf{s}}$$

mit der hochformatigen Matrix $\underline{\mathbf{H}}$ als Funktion von $\underline{\mathbf{U}}$, $\boldsymbol{\Sigma}$, $\underline{\mathbf{V}}$, γ und $\underline{\mathbf{e}}$!

c) Berechnen Sie die Lösung

$$\underline{\mathbf{s}} = \underline{\mathbf{H}}^{*\mathrm{T}} \cdot \left(\underline{\mathbf{H}} \cdot \underline{\mathbf{H}}^{*\mathrm{T}}\right)^{-1} \cdot \underline{\mathbf{e}}$$

kleinster Energie des unterbestimmten linearen Gleichungssystems

$$\underline{\mathbf{e}} = \underline{\mathbf{H}} \cdot \underline{\mathbf{s}}$$

mit der querformatigen Matrix $\underline{\mathbf{H}}$ als Funktion von $\underline{\mathbf{U}}$, $\boldsymbol{\Sigma}$, $\underline{\mathbf{V}}$ und $\underline{\mathbf{e}}$! Die Matrix $\underline{\mathbf{H}}^{*\mathrm{T}} \cdot \left(\underline{\mathbf{H}} \cdot \underline{\mathbf{H}}^{*\mathrm{T}}\right)^{-1}$ wird auch als rechte Pseudoinverse von $\underline{\mathbf{H}}$ bezeichnet.

2. Aufgabe

Bei einem SNR von γ ergibt sich die Bitfehlerwahrscheinlichkeit bei Übertragung eines BPSK-modulierten Datensymbols über einen Kanal mit weißem Gauß-Rauschen zu

$$P_{\mathrm{b}} = \frac{1}{2}\,\mathrm{erfc}(\sqrt{\gamma})\,.$$

Hierbei wird angenommen, dass der optimale aus einem signalangepasstem Filter und anschließendem Quantisierer bestehende Empfänger verwendet wird. In einem Mehrwegekanal ist die Amplitude des Nutzempfangssignals Rayleigh-verteilt und das SNR γ ist folglich exponentialverteilt. Die Bitfehlerwahrscheinlichkeit P_{b} ist eine Funktion der Zufallsvariablen γ und folglich selbst eine Zufallsvariable. Bestimmen Sie den Mittelwert $\overline{P}_{\mathrm{b}}$ der Bitfehlerwahrscheinlichkeit P_{b} als Funktion des Mittelwerts $\overline{\gamma}$ des SNRs γ! Skizzieren Sie den Mittelwert $\overline{P}_{\mathrm{b}}$ der Bitfehlerwahrscheinlichkeit als Funktion des mittleren SNRs $\overline{\gamma}$!